

BÖLME-BÖLÜNEBİLME

A. BÖLME:

A, B, C, K birer doğal sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ - & C \\ \hline K & \end{array}$$

bölme işleminde,

- A ya bölünen, B ye bölen, C ye bölüm, K ya kalan denir.
- $A = B \times C + K$ dir.
- Kalan, bölenden küçüktür. ($K < B$)
- Kalan, bölümden (C den) küçük ise, bölen (B) ile bölümün (C) yeri değiştirilebilir. Bu durumda A ve K değişmez.
- $K = 0$ ise, A sayısı B ile tam bölünebilir.

B. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

2 İle Bölünebilme

Verilen bir sayının 2 ile tam olarak bölünebilmesi için son basamağının çift olması yani 0,2,4,6,8 olması gerekir. Eğer tek ise kalan 1'dir.

3 İle Bölünebilme

Verilen bir sayının 3 ile tam olarak bölünebilmesi için rakamlarının toplamı 3 veya 3'ün katı olmalıdır.

4 İle Bölünebilme

Verilen bir sayının 4 ile tam bölünebilmesi için son iki basamağının 4'e tam bölünmesi gerekir.

xyz sayısının 4 ile bölümünden kalan yz' nin (son iki basamak) 4 ile bölümünden kalana eşittir.

- xyz sayısının 4 ile bölümünden kalan

$z + 2 \cdot y$ nin 4 ile bölümünden kalana eşittir.

5 İle Bölünebilme

Verilen bir sayının 5 ile tam olarak bölünebilmesi için son basamağının 0 ve ya 5 olması gerekir.

Not: Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

6 İle Bölünebilme:

Verilen bir sayının 6 ile tam bölünebilmesi için hem 2 hem de 3 ile tam bölünmesi gerekir.

Not: 6 ile bölünebilmede de görüldüğü gibi verilen bir sayının istenen sayıya tam olarak bölünebilmesi için bu sayıyı oluşturan aralarında asal sayılara da bölünmesi gerekir. Aralarında asal sayıların çarpımına da tam olarak bölünmesi gerekir ÖR: 15à 3 ile 5 30à 3 ile 10 12 à 3 ile 4

7 İle Bölünebilme:

(n + 1) basamaklı $a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ sayısının 7 ile tam bölünebilmesi için,

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots - \dots = 7k$ olmalıdır.

Birler basamağı a_0 , onlar basamağı a_1 , yüzler basamağı a_2 , ... olan sayının ($\dots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ sayısının) 7 ile bölümünden kalan

$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots - \dots$ işleminin sonucunun 7 ile bölümünden kalana eşittir.

Not: Sekiz basamaklı ABCDEFGH sayısının 7 ile bölümünden kalan, $(H + 3 \times G + 2 \times F) - (E + 3 \times D + 2 \times C) + (B + 3 \times A)$ işleminin sonucunun 7 ile bölümünden kalandır.

8 İle Bölünebilme:

Verilen bir sayının 8 ile tam bölünebilmesi için son 3 basamağının 8 ile tam olarak bölünmesi gerekir.

4000, 3432, 84104 sayıları 8 ile tam bölünür.

Birler basamağı c , onlar basamağı b , yüzler basamağı a , ... olan sayının ($\dots abc$ sayısının) 8 ile bölümünden kalan $c + 2 \times b + 4 \times a$ toplamının 8 ile bölümünden kalana eşittir.

9 İle Bölünebilme:

Bölünmesi istenen sayının rakamları toplamı 9 ve 9'un katı ise bu sayı 9'a tam bölünür.

Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamlarının toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

10 İle Bölünebilme:

Verilen bir sayının 10 ile tam olarak bölünebilmesi için son basamağının "0" olması gerekir. Bir sayının birler basamağındaki rakam o sayının 10 ile bölümünden kalandır.

11 İle Bölünebilme:

(n + 1) basamaklı $a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ sayısının 11 ile tam bölünebilmesi için

$(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) = 11 \cdot k$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

(n + 1) basamaklı $a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ sayısının 11 ile bölümünden kalan

$(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$ işleminin sonucunun 11 ile bölümünden kalana eşittir.

Not: 4 ve 6 ile tam bölünen sayılar $4 \times 6 = 24$ ile tam bölünemeyebilir. Çünkü 4 ile 6 aralarında asal değildir.

C. BÖLEN KALAN İLİŞKİSİ

A, B, C, D, E, K_1 , K_2 uygun koşullarda birer doğal sayı olmak üzere,

ü A'nın C ile bölümünden kalan K_1 ve

ü B'nin C ile bölümünden kalan K_2 olsun.

Buna göre,

- $A \times B$ nin C ile bölümünden kalan $K_1 \times K_2$ dir.
- $A + B$ nin C ile bölümünden kalan $K_1 + K_2$ dir.
- $A - B$ nin C ile bölümünden kalan $K_1 - K_2$ dir.
- $D \times A$ nin C ile bölümünden kalan $D \times K_1$ dir.
- A^E nin C ile bölümünden kalan $(K_1)^E$ dir.

Yukarıdaki işlemlerde kalan değerler bölenden (C den) büyük ise, tekrar C ile bölünerek kalan bulunur. Bir A doğal sayısı $B \times C$ ile tam bölünüyorsa A sayısı B ve C doğal sayılarıyla da bölünebilir. **Fakat bu ifadenin karşıtı** (A sayısı B ile ve C ile tam bölünüyorsa A sayısı $B \times C$ ile tam bölünür.) **doğru olmayabilir.**

D. ÇARPANLAR İLE BÖLÜM

- 144 sayısı $2 \times 6 = 12$ ile tam bölünür ve 144 sayısı 2 ile ve 6 ile de tam bölünür.
- 6 sayısı 2 ile ve 6 ile tam bölünür. Fakat 6 sayısı $2 \times 6 = 12$ ile tam bölünemez.

E. BİR TAM SAYININ TAM BÖLENLERİ

Bir tam sayının, asal çarpanlarının kuvvetlerinin çarpımı biçiminde yazılmasına bu sayının asal çarpanlarının kuvvetleri biçiminde yazılması denir.

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar ve m, n, k pozitif tam sayılar olmak üzere,

$A = a^m \cdot b^n \cdot c^k$ olsun.

Bu durumda aşağıdakileri söyleyebiliriz:

- A'yı tam bölen asal sayılar a, b, c dir.
- A sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı,

$(m + 1) \times (n + 1) \times (k + 1)$ dir.

- A sayısının pozitif tam bölenlerinin ters işaretlileri de negatif tam bölenidir.
- A sayısının tam sayı bölenleri sayısı,
 - $2 \times (m + 1) \times (n + 1) \times (k + 1)$ dir.
 - A sayısının tam sayı bölenleri toplamı 0 (sıfır) dır.
 - A sayısının pozitif tam bölenlerinin toplamı,

$$\frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \text{ dir.}$$

- A sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin sayısı, A'nın tam sayı bölenlerinin sayısından A'nın asal bölenlerinin sayısı çıkarılarak bulunur.
- A'nın asal olmayan tam sayı bölenleri toplamı,

$$(a + b + c) \text{ dir.}$$

- A sayısından küçük A ile aralarında asal olan doğal sayıların sayısı,

$$A \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \text{ dir.}$$

- A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin çarpımı:

$$\sqrt{A^{(m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)}} \text{ dir.}$$