

KÖKLÜ İFADELER

A. TANIM

n , 1 den büyük bir sayma sayısı olmak üzere,

$x^n = a$ denklemini sağlayan x sayısına a nın n yinci dereceden **kökü** denir.

$$x^n = a \text{ ise, } x = \sqrt[n]{a} \text{ dır.}$$

B. KÖKLÜ İFADELERİN ÖZELİKLERİ

1) n tek ise, $\sqrt[n]{a}$ daima reeldir

2) n çift ve $a < 0$ ise, $\sqrt[n]{a}$ reel sayı belirtmez.

3) $a \geq 0$ ise, $\sqrt[n]{a}$ daima reeldir.

4) $a \geq 0$ ise, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ dır.

5) n tek ise, $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.

6) n çift ise, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ dır.

7)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

8) n çift ve b ile c aynı işaretli olmak üzere,

$$\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}} \text{ dır.}$$

9) n tek ise,

$$\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}} \text{ dır.}$$

büyüğü, 6. nın cevabı bu sayıların küçüğüdür.

a, pozitif reel (gerçel) sayı olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \text{ dir.}$$

F. KÖKLÜ İFADELERDE SIRALAMA

Kök dereceleri eşit olan (ya da eşitlenen) pozitif sayılarda, kök içindeki sayıların büyüklüğüne göre sıralama yapılır.

$$(a, b, c \text{ pozitif}) \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c} \text{ ise, } a < b < c \text{ dir.}$$

$$10) \sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \text{ dir.}$$

11) k pozitif tam sayı ve a pozitif gerçel sayı olmak üzere;

$$i) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{m \cdot k}}$$

$$ii) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k]{a^{\frac{m}{k}}} \text{ dir. } \left(\frac{n}{k} \in \mathbb{Z}^+ \right)$$

$$12) (a \neq 0 \text{ ve } b \neq 0) \text{ ise } \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

C. KÖKLÜ İFADELERDE YAPILAN İŞLEMLER

Kök dereceleri birbirine eşit ve kök içindeki sayılar da birbirine eşit olan ifadelerin kat sayıları toplanır ya da çıkarılır. Bulunan sonuç köklü ifadenin kat sayısı olur.

1. Toplama - Çıkarma İşlemi

$$b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} - d \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c - d) \cdot \sqrt[n]{a}$$

2. Çarpma İşlemi

n ve m, 1 den büyük tek sayı ya da a ve b negatif olmamak üzere,

$$1) c \cdot \sqrt[n]{a} \cdot d \cdot \sqrt[n]{b} = c \cdot d \cdot \sqrt[n]{a \cdot b} \text{ dir.}$$

$$2) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}} \text{ dir.}$$

$$3) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m} \cdot \sqrt[m \cdot n]{b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \text{ dir.}$$

3. Bölme İşlemi

Uygun koşullarda,

$$1) \frac{c \cdot \sqrt[n]{a}}{d \cdot \sqrt[n]{b}} = \frac{c}{d} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ dir.}$$

$$2) \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}} \text{ dir.}$$

$$3) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{n \cdot \sqrt[n \cdot m]{a^m}}{m \cdot \sqrt[n \cdot m]{b^n}} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a^m}{b^n}} \text{ dir.}$$

4. Paydayı Kökten Kurtarma

Uygun koşullarda,

$$\begin{aligned} 1) \frac{b}{\sqrt[n]{a}} &= \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} \\ &= \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{1+n-1}}} \\ &= \frac{b}{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$4) \frac{1}{a \cdot \sqrt{b} - c \cdot \sqrt{d}} = \frac{a \cdot \sqrt{b} + c \cdot \sqrt{d}}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}$$

$$5) \frac{1}{a \cdot \sqrt{b} + c \cdot \sqrt{d}} = \frac{a \cdot \sqrt{b} - c \cdot \sqrt{d}}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b} \end{aligned}$$

$$7) \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$$

D. İÇ İÇE KÖKLER

$$1) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a} \dots}} = \sqrt[n]{a}$$

$$2) \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a} : \dots}} = \sqrt[n+1]{a}$$

$$3) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a} \dots}}} = \sqrt[m \cdot n - 1]{a^{m+1}}$$

$$4) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b} \dots}}} = \sqrt[m \cdot n - 1]{a^m \cdot b}$$

$$5) \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

$$6) \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

E. SONSUZ KÖKLER

$$1) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a} \dots}} = \sqrt[n]{a}$$

$$2) \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a} : \dots}} = \sqrt[n+1]{a}$$

$$3) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a} \dots}}} = \sqrt[m \cdot n - 1]{a^{m+1}}$$

$$4) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b} \dots}}} = \sqrt[m \cdot n - 1]{a^m \cdot b}$$

$$5) \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

$$6) \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$