

Adı Soyadı :
Numara :
Süre: 70 dakika

I. Öğretim: ☐
II. Öğretim: ☐

Şubesi:
İmza:

OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI

Soru 1: Transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{s+10}{(s+2)(s^2+2s+5)}$ olan sistemin birim basamak cevabını hesaplayınız.

İpucu: $y(t) = L^{-1}\{G(s)U(s)\} = Au(t) + Be^{-2t} + \frac{1}{b}|K(a+bj)|e^{at}\sin(bt+\alpha) = ?$ (25 p).

Çözüm: $U(s) = \frac{1}{s}$ için $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+10}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$ olur.

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{K_c + jK_i}{s+1+2j} + \frac{K_c - jK_i}{s+1-2j}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$= -1 \pm 2j = a \pm bj$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 2 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow y(t) = Au(t) + Be^{-2t} + \frac{1}{b}|K(a+bj)|e^{at}\sin(bt+\alpha)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+10}{s(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{s+10}{s(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{-2+10}{(-2)[(-2)^2+2(-2)+5]} = \frac{8}{-10} = -0,8$$

$$K(a+bj) = \lim_{s \rightarrow -1+2j} (s^2+2s+5) \frac{s+10}{s(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{9+2j}{(-1+2j)(1+2j)} = \frac{9+2j}{-5}$$

$$|K(a+bj)| = \frac{\sqrt{81+4}}{5} \approx 1,844$$

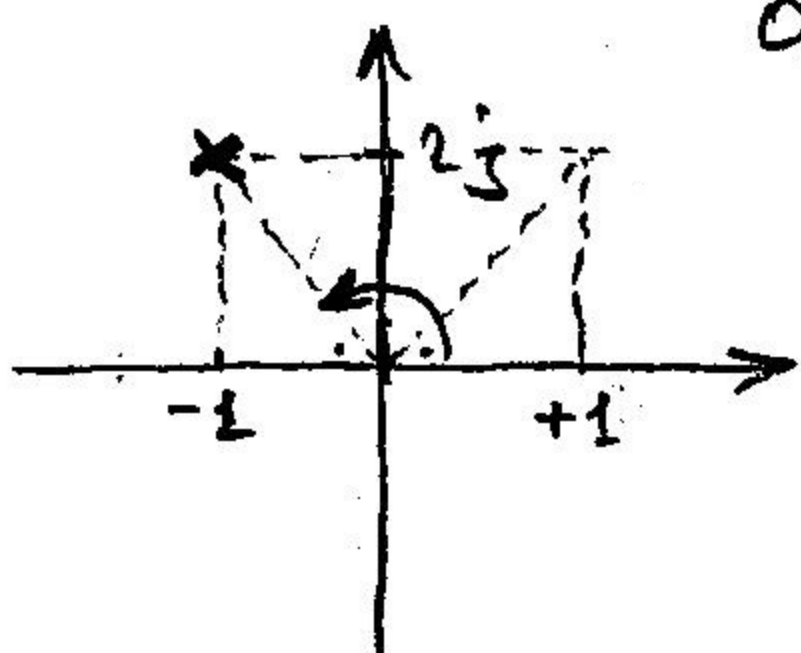
$$\alpha = \left(\text{Arctan} \frac{2}{9} \right) - \pi = 0,2187 - 3,1416 \approx -2,923 \text{ rad.}$$

↪ negatif sayıların açısı π dir. (işaret değişimine sebep olduğu için)

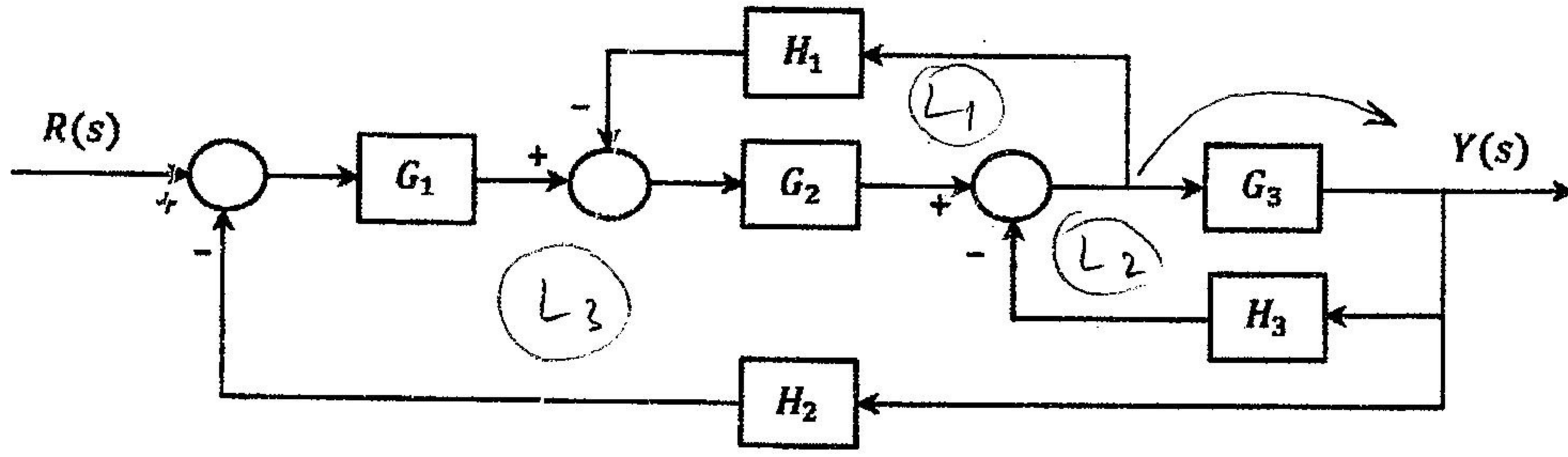
$$\Rightarrow y(t) = u(t) - 0,8e^{-2t} + 0,922e^{-t}\sin(2t - 2,923)$$

Not: $K(a+bj) = \frac{9+2j}{(-1+2j)(1+2j)}$ olarak bırakılırsa $|K(a+bj)| = \frac{\sqrt{81+4}}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+4}} \approx 1,844$

$$\begin{aligned} \alpha &= \underbrace{\text{Arctan} \frac{2}{9}}_{0,2187} - \underbrace{\text{Arctan} \frac{2}{-1}}_{\pi - \text{Arctan} \frac{2}{1}} - \underbrace{\text{Arctan} \frac{2}{1}}_{1,1071} = 0,2187 - (\pi - 1,1071) - 1,1071 \\ &= 0,2187 - 3,1416 \\ &\approx -2,923 \text{ rad.} \end{aligned}$$

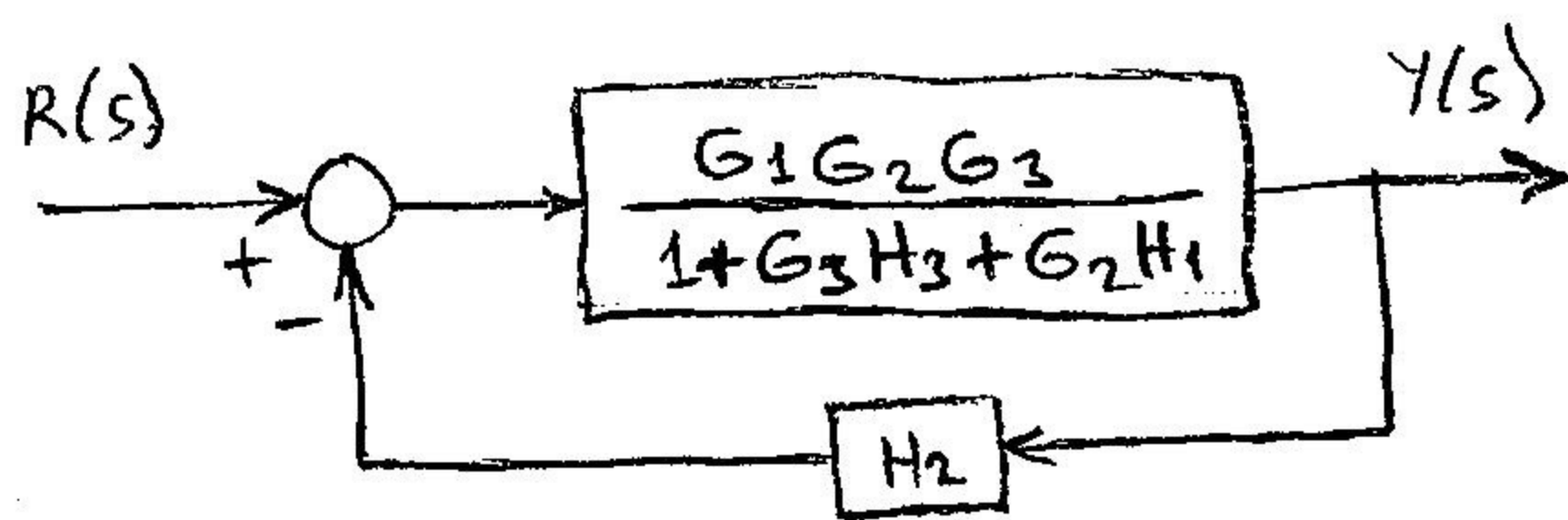
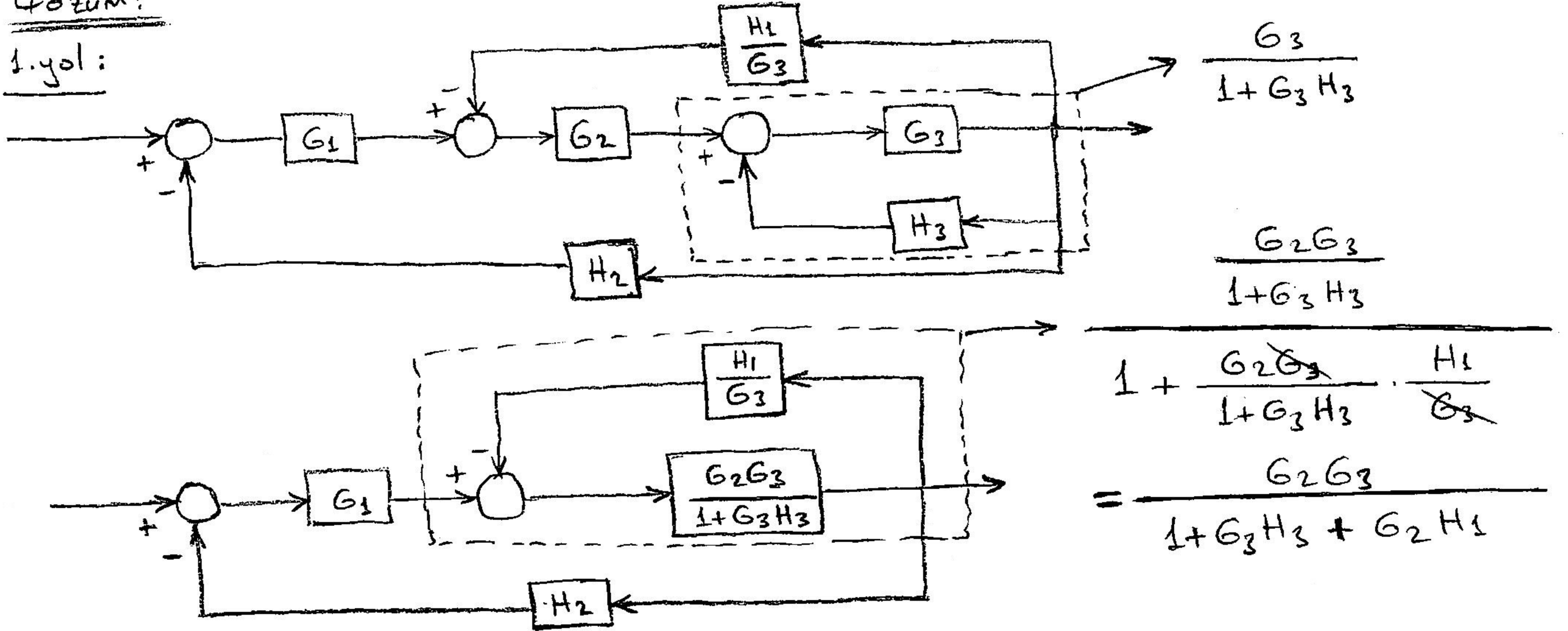


Soru 2: Aşağıda blok şeması verilen sistem $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = 5$, $G_3(s) = \frac{1}{s+1}$ ve $H_1(s) = 2$, $H_2(s) = 1$, $H_3(s) = 0.1$ için nasıl bir dinamik davranış gösterir? (25 p)



Çözüm:

1. yol:



$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_3 + G_2 H_1}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_3 + G_2 H_1} \cdot H_2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

2. yol:

$$M_1 = G_1 G_2 G_3$$

$$L_1 = -G_2 H_1$$

$$L_2 = -G_3 H_3$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3 H_2$$

$$\Delta_1 = 1 \quad (\text{1. ileri yol kaldırılırsa gerilim kalmaz})$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

Verilen transfer fonksiyonları yerine yazılırsa:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} \cdot 5 \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + 5 \cdot 2 + \frac{1}{s+1} \cdot 0,1 + \frac{1}{s} \cdot 5 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 1}$$

$$= \frac{5}{11s(s+1) + 0,1s + 5} = \frac{5}{s^2 + \frac{11,1}{11}s + \frac{5}{11}}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{5}{11}}$$

$$2\zeta\omega_n = 2\zeta\sqrt{\frac{5}{11}} = \frac{11,1}{11} \Rightarrow \zeta = 0,7484$$

$\zeta < 1$ olduğu için salınımlı sönümlü bir dinamik davranış gösterir.

Soru 3: Karakteristik denklemi $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 2 = 0$ olan sistemin kararlılık analizini yapınız. (25 p)

Çözüm: Gerek şartı göre bütün katsayılar mevcut ve aynı işaretli.

Routh tablosu:

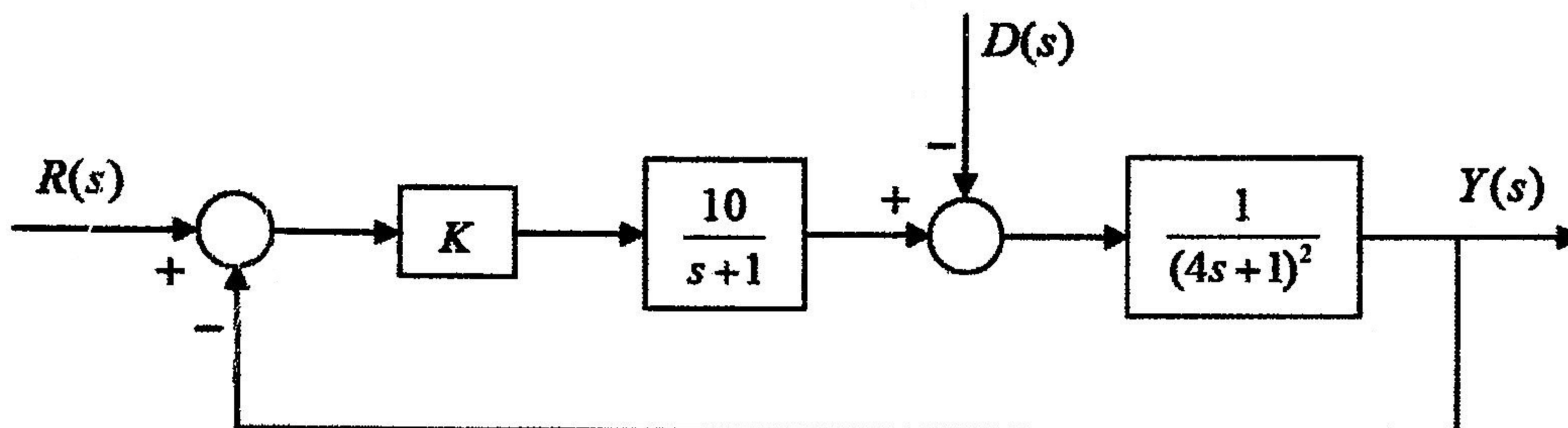
s^5	1	3	5	
s^4	2	6	2	
s^3	$0(\epsilon)$	4	0	
s^2	$\frac{6\epsilon-8}{\epsilon}$	2		$\rightarrow \frac{6\epsilon-8}{\epsilon} \approx \frac{-8}{\epsilon} \rightarrow (\text{negatif})$
s^1	$\frac{6\epsilon-8}{\epsilon} \cdot 4 - 2\epsilon$			$\rightarrow \frac{24\epsilon-32-2\epsilon^2}{6\epsilon-8} \approx \frac{-32}{-8} \approx +4$
	$\frac{6\epsilon-8}{\epsilon}$			
s^0	2			

Yeter şartı göre Routh tablosunun 1. sütunu aynı işaretli olmalı.

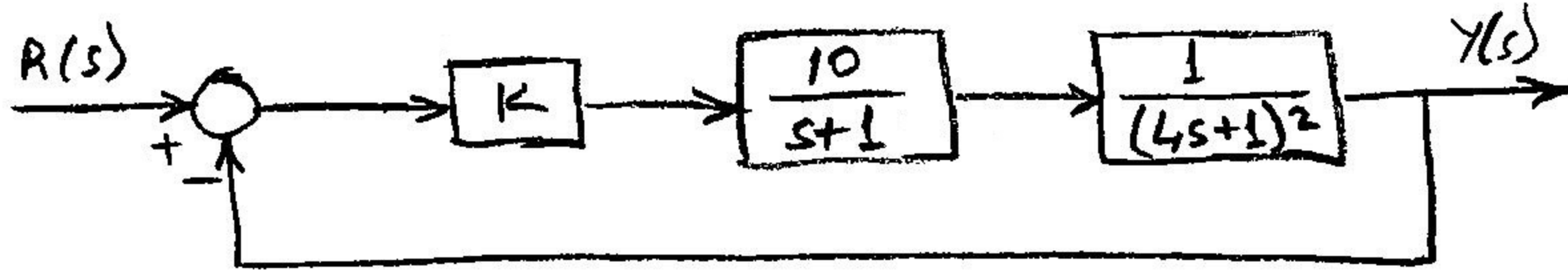
Fakat yukarıdan aşağıya doğru bakıldığında (s^2 'li satırdaki eleman negatif olduğu için) 2 tane işaret değişimi vardır. Yani karakteristik denklemin köklerinden 2 tanesi sağ yarı s -düzleminde (kararsız bölgededir). Sistem kararsızdır.

Soru 4: Şekildeki kontrol sisteminde

- Birim basamak referans giriş için kalıcı durum hatasını 0.02 yapan K değerini bulunuz. (10 p)
- a) şıkında bulunan K değeri kullanıldığında birim basamak bozucu giriş için kalıcı durum hatası ne olur? Toplam kalıcı durum hatasını bulunuz. (15 p)



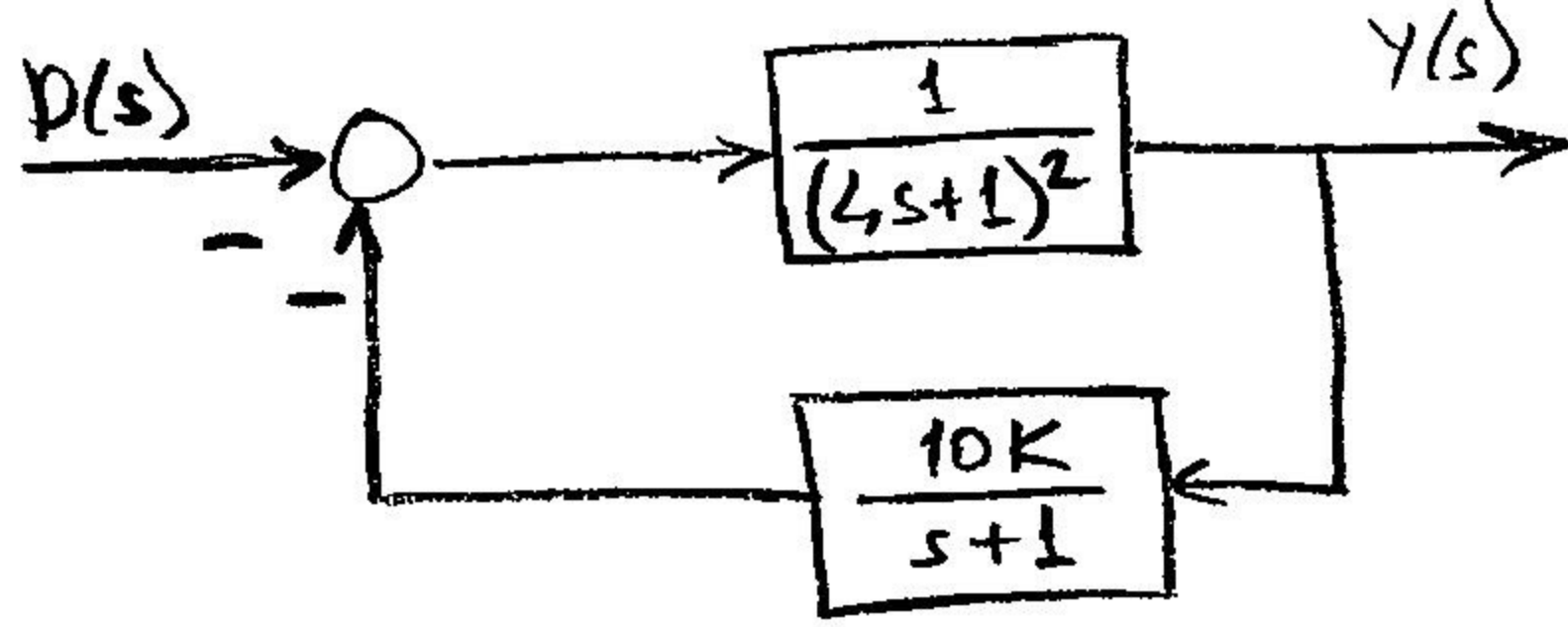
Gözüm: $D(s)=0$ için $\frac{Y(s)}{R(s)}=?$



$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10K}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10K}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K}$$

$R(s)=0$ için $\frac{Y(s)}{D(s)}=?$



$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{-D(s)} = \frac{1}{(4s+1)^2 + \frac{10K}{s+1}}$$

$$-\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K}$$

a) Kısa yol: (burada $\frac{Y(s)}{R(s)}$ lazım değil)

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10K}{(s+1)(4s+1)^2} = 10K$$

$$e_{kd1} = \frac{A}{1+K_p} = \frac{1}{1+10K} = 0,02 \Rightarrow 1+10K = \frac{1}{0,02} \Rightarrow \underline{\underline{K=4,9}} \text{ bulunur.}$$

Uzun Yol: Genel formül ile: $e_{kd1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{Y(s)}{R(s)} \right] R(s)$ kullanılarak da bulunabilir:

$$e_{kd1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{10K}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K} \right] \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(s+1)(4s+1)^2 + 10K - 10K}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K} \right] = \frac{1}{1+10K}$$

$$e_{kd1} = \frac{1}{1+10K} = 0,02 \Rightarrow 1+10K = \frac{1}{0,02} \Rightarrow \underline{\underline{K=4,9}}$$

$$b) e_{kd2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[-\frac{Y(s)}{D(s)} \right] D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{s+1}{(s+1)(4s+1)^2 + 10K} \right] \frac{1}{s} = \frac{1}{1+10K}$$

$$K=4,9 \text{ için } e_{kd2} = \frac{1}{1+10K} = \frac{1}{1+49} = 0,02 \text{ olur.}$$

$$K=4,9 \text{ için toplam kalıcı durum hatası: } e_{kd} = e_{kd1} + e_{kd2}$$

$$e_{kd} = 0,02 + 0,02$$

$$\underline{\underline{e_{kd} = 0,04}}$$