ELEKTRİK DEVRE TEMELLERİ DERS NOTLARI

4. HAFTA

Düğüm Analizi

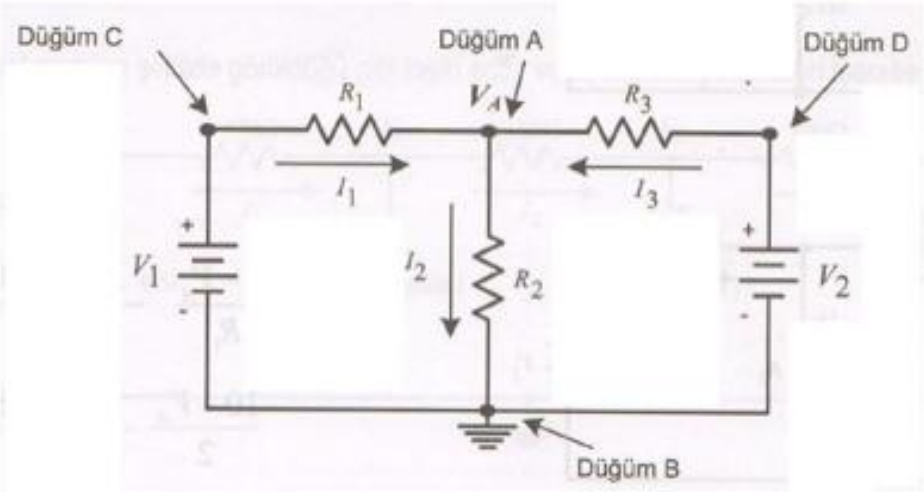
DÜĞÜM ANALİZİ

- Bir devredeki tüm akım ve gerilimleri bulmak için kullanılan sistematik yollardan birisidir.
- Düğüm bir elektrik devresinde iki veya daha fazla elemanın birbirine bağlandığı ve akımların girdiği veya çıktığı ek noktasıdır.
- Devrelerdeki düğümlere göre Kirchhoff'un akım kanunu denklemleri yazılabilir.
- Bazen üç veya daha çok elemanın birbirine bağlandığı düğümlere ana düğüm adı da verilmektedir.
- Düğüm çözümlemesi için bir ana düğüm referans düğüm olarak belirlenir. Bu düğüm devre ağının mümkün olduğunca çok sayıda elemanının bağlandığı düğümdür.
- Daha sonra referans düğüme göre diğer düğümlerin her biri için gerilimler belirlenir. Kirchhoff'un akım kanunu denklemi referans düğüme göre her bir düğüm için yazılır.

Düğüm Analizi Stratejisi

1. Düğümleri belirleyin ve bir tanesini referans olarak seçin.
2. Bilinen düğüm gerilimlerini belirleyin.
3. Her bir düğüme kak uygulayarak denklemleri oluşturun.
4. Akımları düğüm gerilimleri ile değiştirin ve cebirsel denklemleri elde edin.

Düğüm Analizi Stratejisi



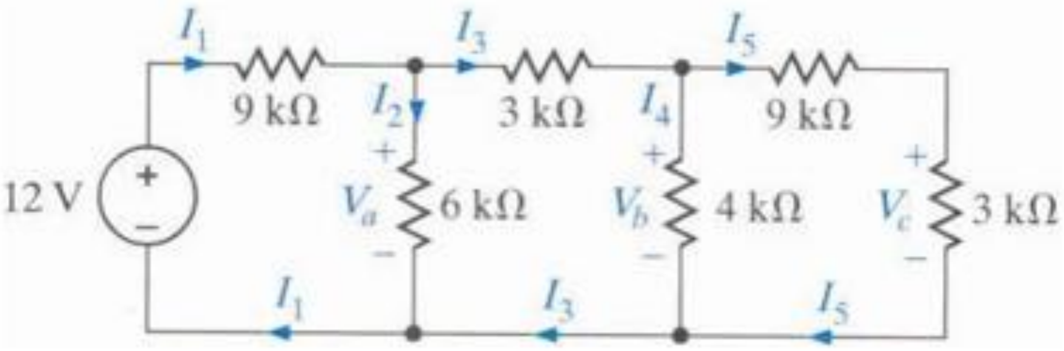
$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

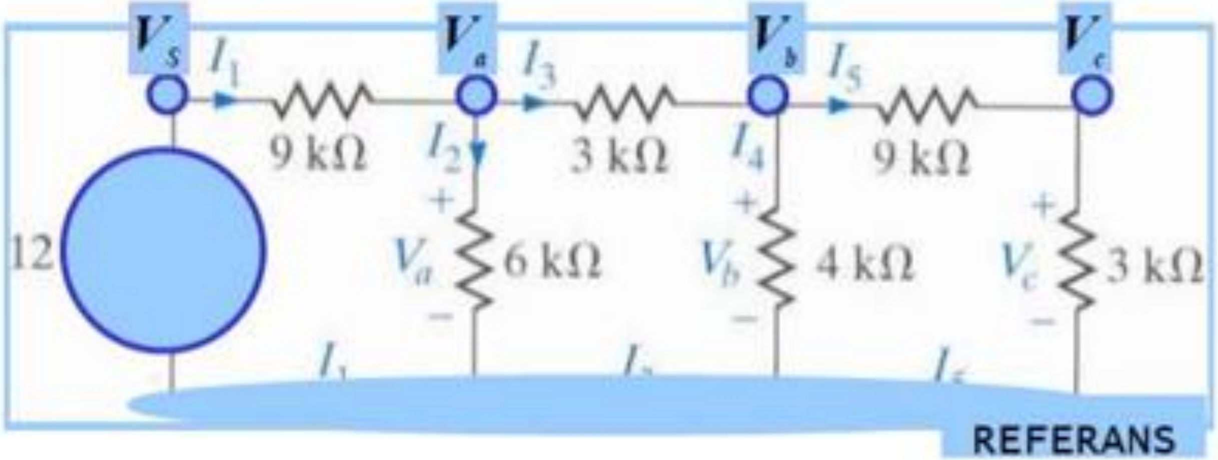
$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1 - V_A}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{V_2 - V_A}{R_3}$$

Düğüm Analizi Stratejisi





$$Dugum\,V_a: \quad -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{V_a - V_s}{9k} + \frac{V_a}{6k} + \frac{V_a - V_b}{3k} = 0$$

$$Dugum\,V_b: \quad -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

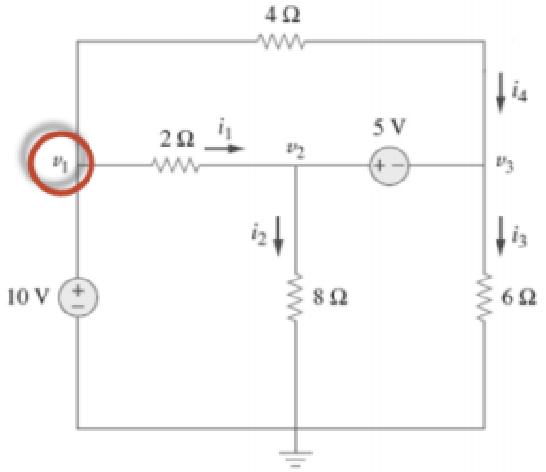
$$\frac{V_b - V_a}{3k} + \frac{V_b}{4k} + \frac{V_b - V_c}{9k} = 0$$

$$Dugum\,V_c: \quad -I_5 + I_6 = 0$$

$$\frac{V_c - V_b}{9k} + \frac{V_c}{3k} = 0$$

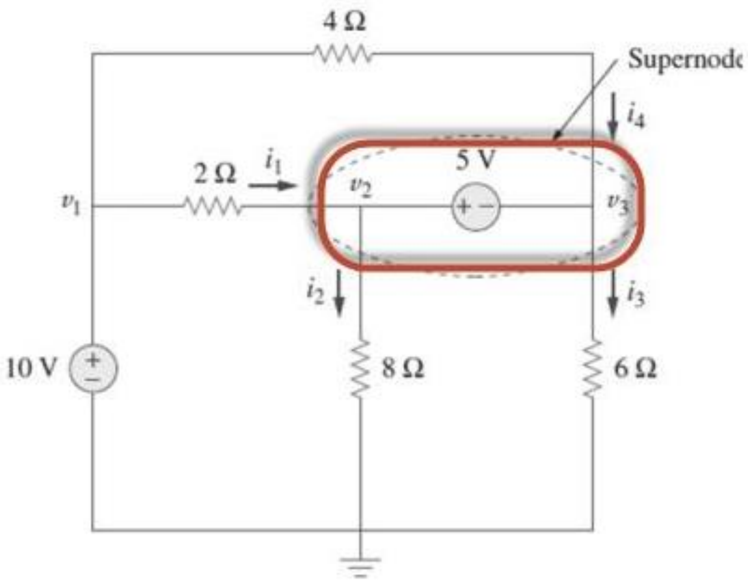
Bağımlı / Bağımsız Kaynaklar Varken Düğüm Gerilim Yöntemleri

- Gerilim kaynağının hangi düğümler arasında bağlı olmasına göre iki olası durum söz konusudur.
- 1.Durum: Gerilim kaynağı, referans düğümü ile başka bir düğüm arasında ise referans olmayan düğümün gerilim değeri, iki düğüm arasındaki gerilim kaynağının değeridir. Örneğin şekildeki devre için V1=10 V' tur. Burumda bilinmeyen sayısı da azalır.

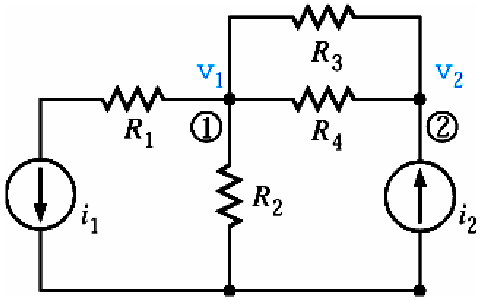


Bağımlı / Bağımsız Kaynaklar Varken Düğüm Gerilim Yöntemleri

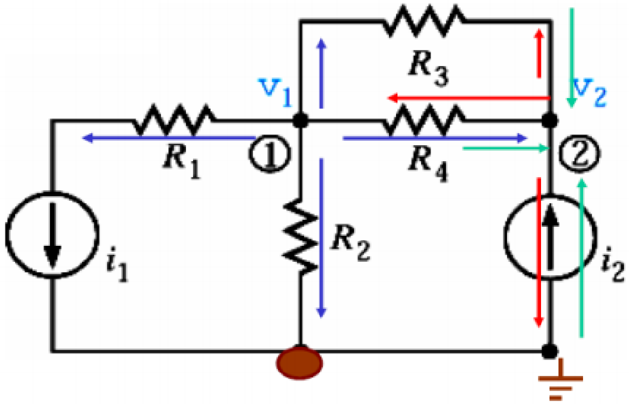
- 2.Durum: Gerilim kaynağı, referans olmayan iki düğüm arasında ise bu iki düğüm genelleştirilmiş düğümü (süper düğüm) oluştururlar. Bu düğüm değerlerinin bulunması için K.A.K ve K.G.K uygulanır.



Sadece Bağımsız Kaynaklı Devreler



Kak denklemlerini yazın.

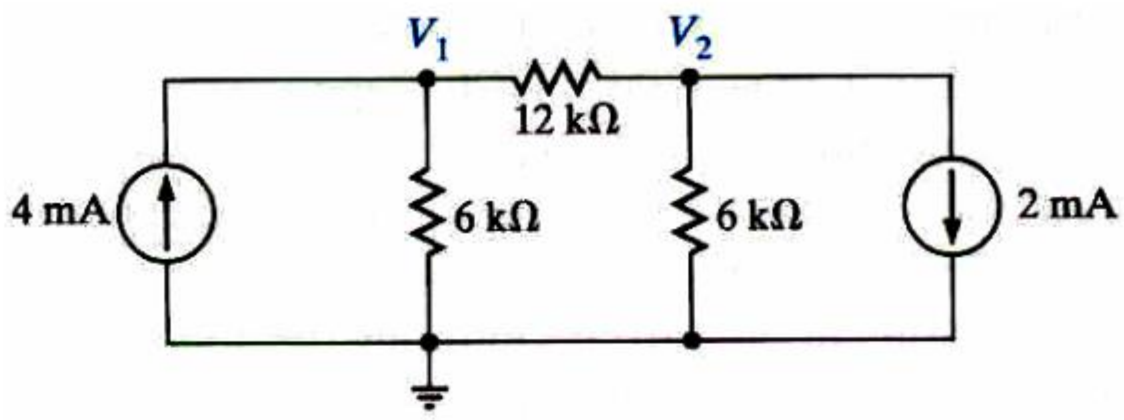


$$i_1 + \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0$$

$$i_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0 \qquad -i_2 + \frac{v_2 - v_1}{R_4} + \frac{v_2 - v_1}{R_3} = 0$$

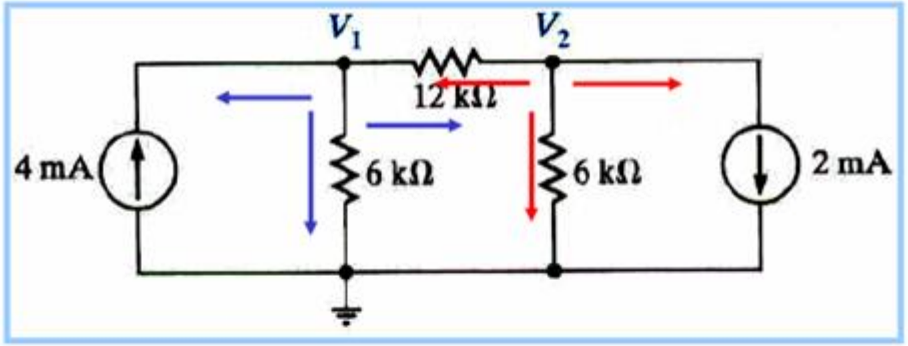
Sadece Bağımsız Kaynaklı Devreler

- ÖRNEK: Aşağıdaki devrenin düğüm denklemlerini yazınız.



Sadece Bağımsız Kaynaklı Devreler

ÇÖZÜM:



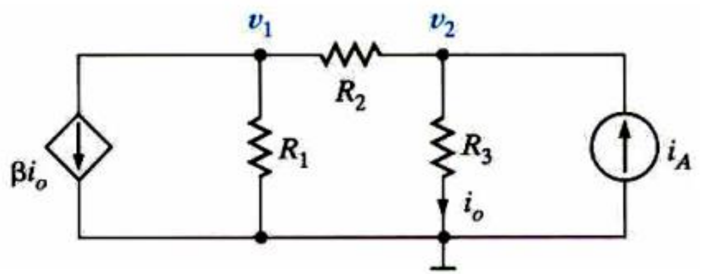
$$Dugum V_1: \quad -4mA + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_1 - V_2}{12k} = 0$$

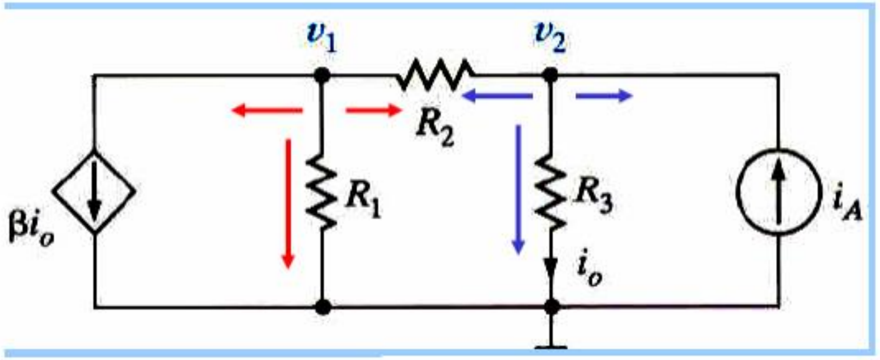
$$Dugum V_2: \quad 2mA + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_1}{12k} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{12k}\right)V_1 - \frac{1}{12k}V_2 = 4mA$$

$$-\frac{V_1}{12k} + \left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{12k}\right)V_2 = -2mA$$

Bağımlı Kaynaklı Devreler

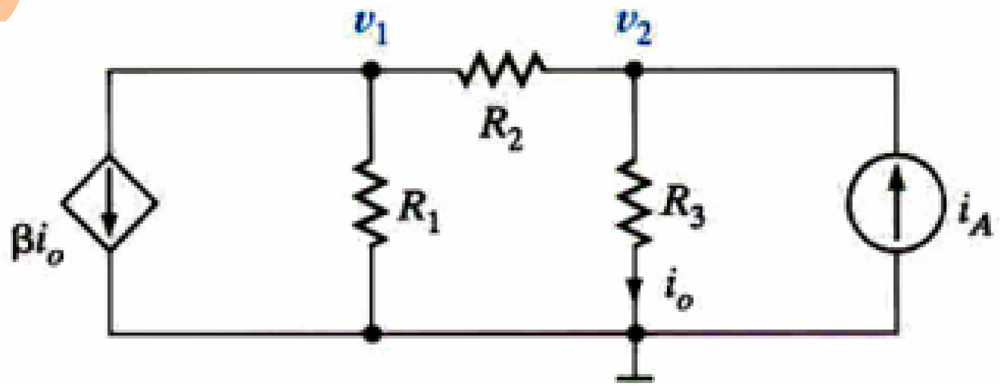




$$\beta i_o + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

$$-i_A + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} = 0$$

Bağımlı Kaynaklı Devreler



Kontrol Değişkeni ne olur i_0=?

$$i_o = \frac{v_2}{R_3}$$

Yeniden Düzenleme Yapıldığında:

$$\beta i_o + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_1 + \left(\frac{\beta}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)v_2 = 0$$

$$-i_A + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} = 0$$

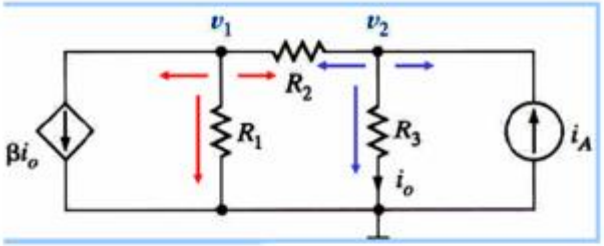
$$-\frac{1}{R_2}v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)v_2 = i_A$$

ÖRNEK: Yukarıdaki devre için:

SAYISAL ÖRNEK

$\beta = 2$ $\quad R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad i_A = 2\,\mathrm{mA}$

$R_1 = 12\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$



$$\left(\frac{1}{12k}+\frac{1}{6k}\right)v_1+\left(\frac{2}{3k}-\frac{1}{6k}\right)v_2=0$$

$$-\frac{1}{6k}v_1+\left(\frac{1}{12k}+\frac{1}{3k}\right)v_2=2mA$$

$$\frac{1}{4\mathrm{k}}V_1+\frac{1}{2\mathrm{k}}V_2=0 \qquad */4k$$

$$-\frac{1}{6\mathrm{k}}V_1+\frac{1}{2\mathrm{k}}V_2=2\times10^{-3} \qquad */6k$$

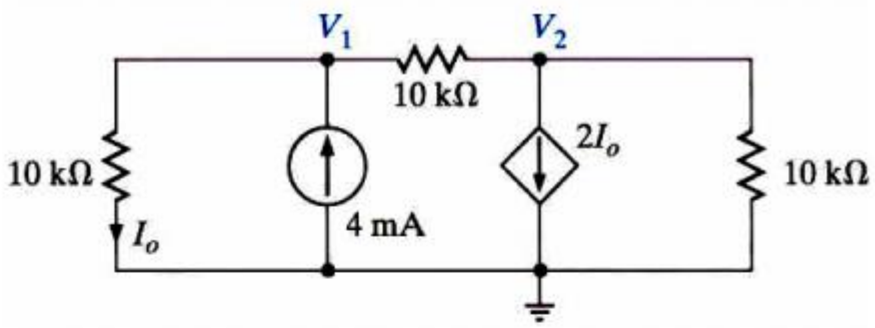
$$V_1+2V_2=0$$

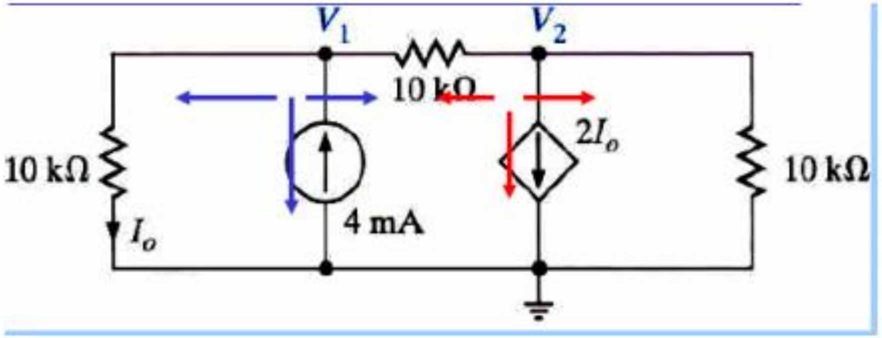
$$-V_1+3V_2=12[V]$$

$$5V_2=12[V]$$

$$V_1=-\frac{24}{5}V$$

ÖRNEK: Yandaki devrede düğüm gerilimlerini bulun.





DÜĞÜM GERİLİMLERİ

$$Dugum V_1: \ \frac{V_1}{10k} - 4mA + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 0$$

$$Dugum V_2: \ \frac{V_2 - V_1}{10k} + 2I_O + \frac{V_2}{10k} = 0$$

KONTROL DEĞİŞKENİ(DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN)

$$I_O = \frac{V_1}{10k}$$

YERİNE YAZILDIĞINDA;

$$\frac{V_1}{10k} - 4mA + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{10k} + 2\frac{V_1}{10k} + \frac{V_2}{10k} = 0$$

YENİDEN DÜZENLENDİĞİNDE

$$2V_1 - V_2 = 40[V] \qquad */2$$

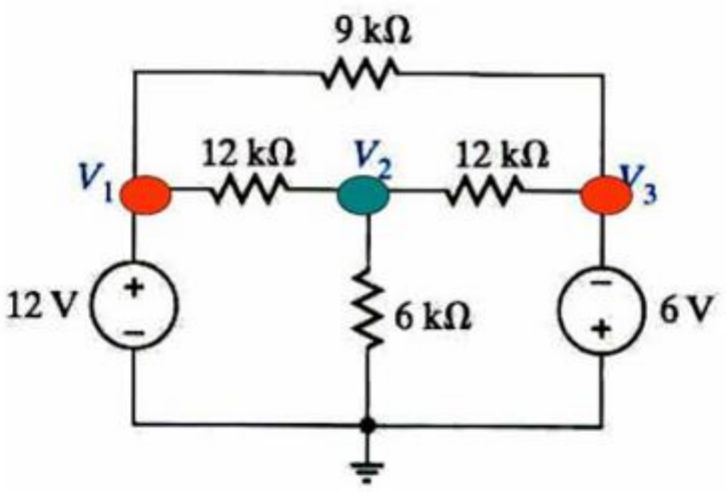
$$V_1 + 2V_2 = 0$$

$$5V_1 = 80V \Rightarrow V_1 = 16V$$

$$V_2 = -\frac{V_1}{2} \Rightarrow V_2 = -8V$$

1(

Bağımsız Gerilim Kaynaklı Devreler



$$\frac{V_2}{6k}+\frac{V_2-V_3}{12k}+\frac{V_2-V_1}{12k}=0$$

$$V_1=12[V]$$

$$V_3=-6[V]$$

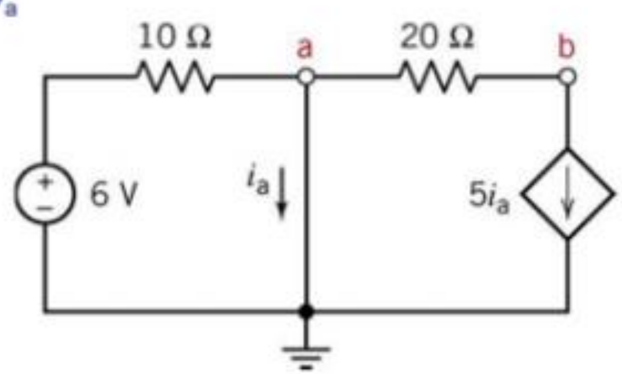
BUNLAR DİĞER DÜĞÜMLERİN DENKLEMLERİDİR

DENKLEMLER COZULDUGUNDE;

$$2V_2+(V_2-V_3)+(V_2-V_1)=0$$

$$4V_2=6[V]\Rightarrow V_2=1.5[V]$$

Örnek: Düğüm Gerilim Metodu kullanarak v_a ve v_b voltajlarını bulunuz



$$\frac{v_a-6}{10}+\frac{v_a-v_b}{20}+i_a=0$$

$$\frac{v_b-v_a}{20}+5i_a=0$$

3 bilinmeyenli 3 denklem oldu ne yapacağız?

V_a =?

V_a =0V

$$-v_b+20i_a=12$$

$$v_b+100i_a=0$$

$$120i_a=12$$

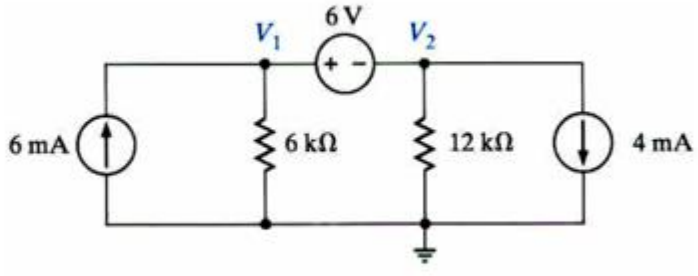
$$i_a=\frac{1}{10}A$$

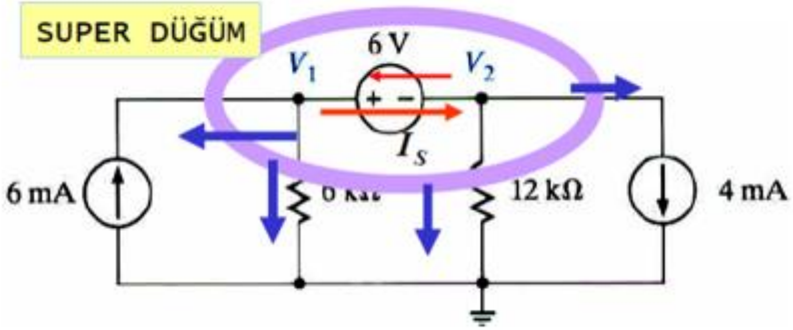
$$v_b=-10V$$

SÜPER DÜĞÜM TEKNİĞİ

- Temel iki düğüm arasında bir voltaj (bağımlı, bağımsız) kaynağı varsa, aralarında voltaj kaynağı bulunan iki düğüm tek bir düğüm gibi davranır bu düğüme Süper düğüm denir.
- Önceki iki düğüm denkleminin toplamı yeni oluşan düğüm denklemini oluşturur, iki yerine bir denklem elde edilir, süper düğüm denklemi süper düğüm oluşturulduktan sonra, süper düğüm etrafında düğüm gerilim denklemi her iki düğümün voltajı kullanılarak yazılır.

SÜPER DÜĞÜM TEKNİĞİ





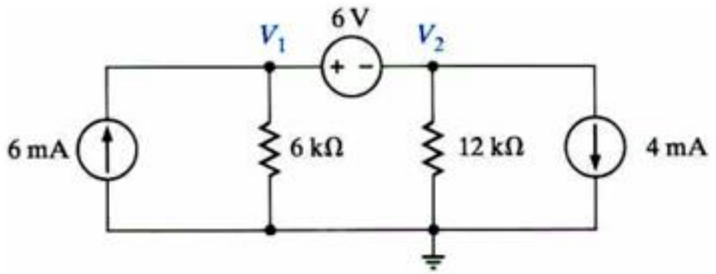
Geleneksel düğüm analizi her düğümdeki akımları gerektirir

DugumV1: $-6mA+\frac{V_1}{6k}+I_S=0$

DugumV2: $-I_S+4mA+\frac{V_2}{12k}=0$

$V_1-V_2=6[V]$

SÜPER DÜĞÜM TEKNİĞİ

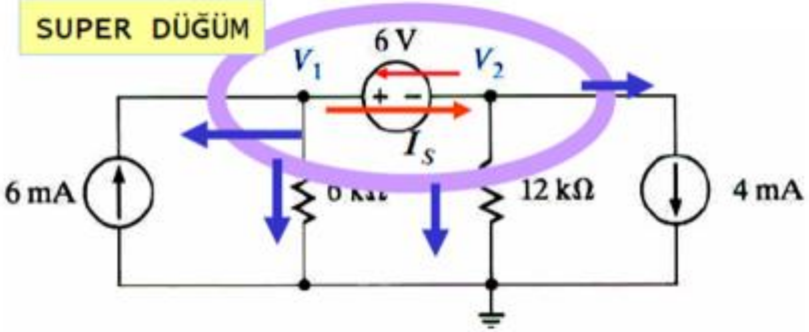


SÜPER DÜĞÜME KAK UYGULANIR

$$-6mA+\frac{V_1}{6k}+\frac{V_2}{12k}+4mA=0$$

Bir denkleme daha ihtiyaç vardır

$$V_1-V_2=6[V]$$



$$(1)\quad \frac{V_1}{6k}+\frac{V_2}{12k}-6mA+4mA=0$$

$$(2)\quad V_1-V_2=6[V]$$

$$2V_1+V_2=24[V]$$

$$V_1-V_2=6[V]$$

$$3V_1=30[V]\Rightarrow V_1=10[V]$$

$$V_2=V_1-6[V]=4[V]$$

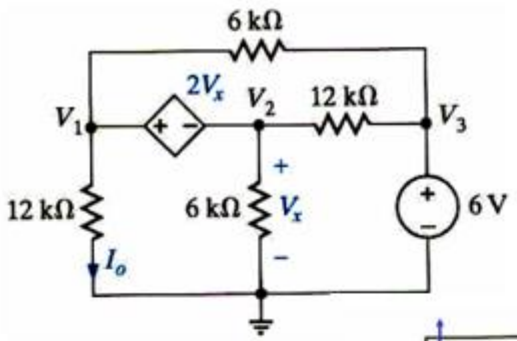
Geleneksel düğüm analizi her düğümdeki akımları gerektirir

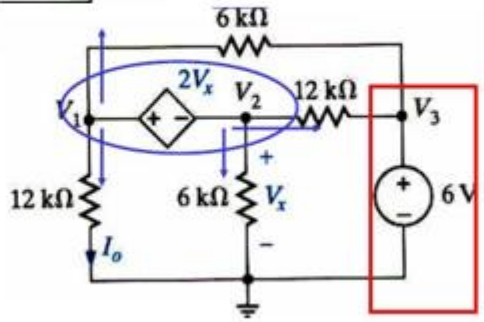
DugumV1: $-6mA+\frac{V_1}{6k}+I_S=0$

DugumV2: $-I_S+4mA+\frac{V_2}{12k}=0$

$$V_1-V_2=6[V]$$

Bağımlı Kaynaklı Süper Düğüm Örneği





REFERANSA BAĞLI GERİLİM KAYNAĞI

$V_3 = 6V$

SUPER DÜĞÜMDEN

$V_1 - V_2 = 2V_x$

KONTROL DEĞİŞKENİ

$V_x = V_2 \Rightarrow V_1 = 3V_2$

SÜPER DÜĞÜME KAK UYG.

$$\frac{V_1 - V_3}{6k} + \frac{V_1}{12k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$$2(V_1 - 6) + V_1 + 2V_2 + V_2 - 6 = 0$$

$$3V_1 + 3V_2 = 18 \Rightarrow 4V_1 = 18$$

$$I_o = \frac{V_1}{12k} = \frac{3}{8}\,\mathrm{mA}$$

Akım Kontrollü Gerilim Kaynağı

$$V_2 - V_1 = 2kI_x$$

KONTROL DEĞİŞKENİ

$$\Rightarrow V_1 = 2kI_x \Rightarrow V_2 = 2V_1 \qquad I_x = \frac{V_1}{2k}$$

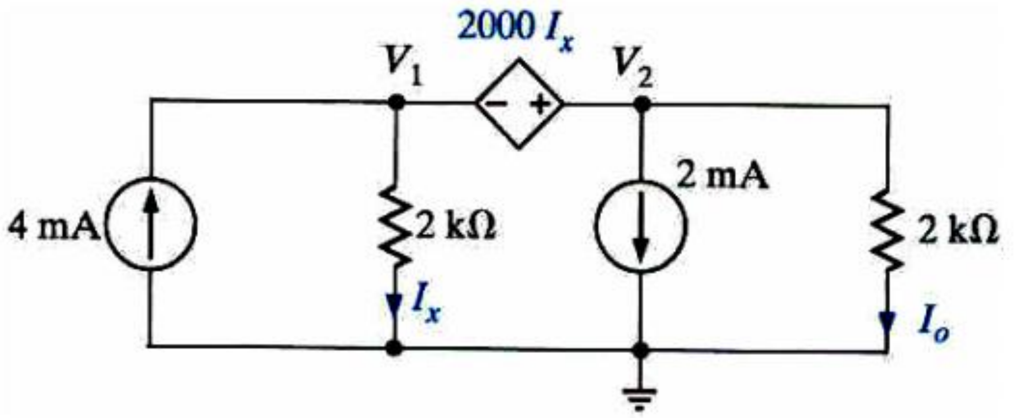
$$-4mA + \frac{V_1}{2k} + 2mA + \frac{V_2}{2k} = 0$$

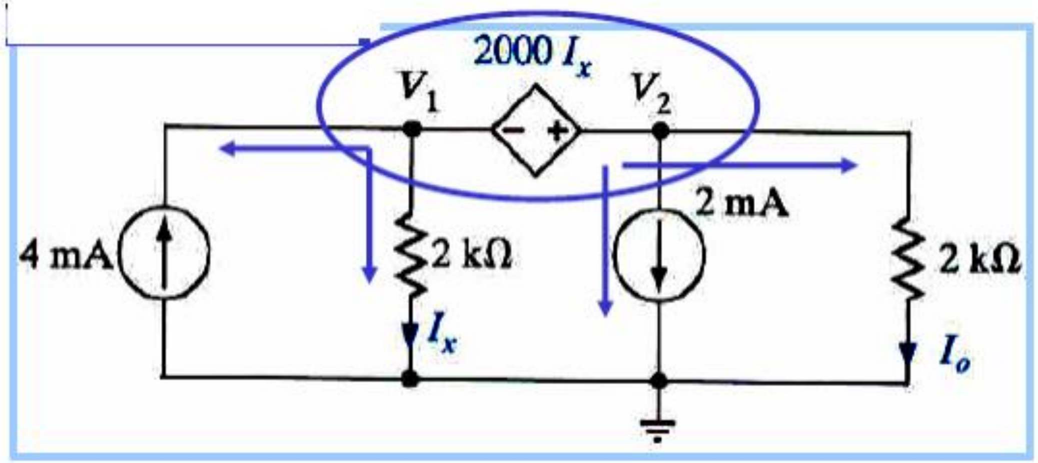
$$V_1 + V_2 = 4[V]$$

$$-2V_1 + V_2 = 0$$

$$3V_2 = 8[V]$$

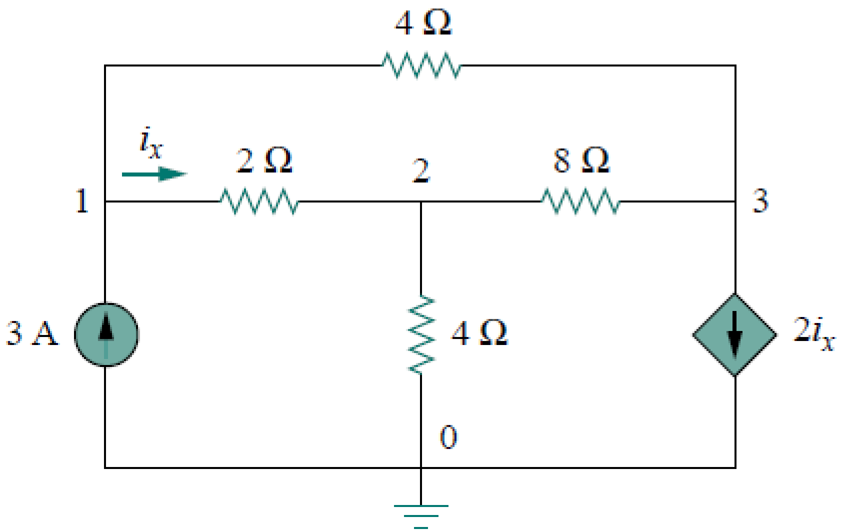
$$I_o = \frac{V_2}{2k} = \frac{4}{3} mA$$

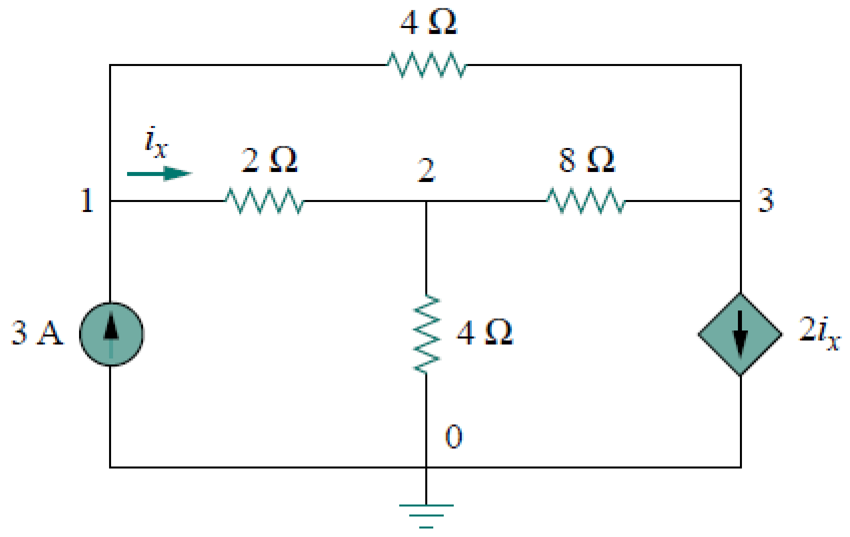


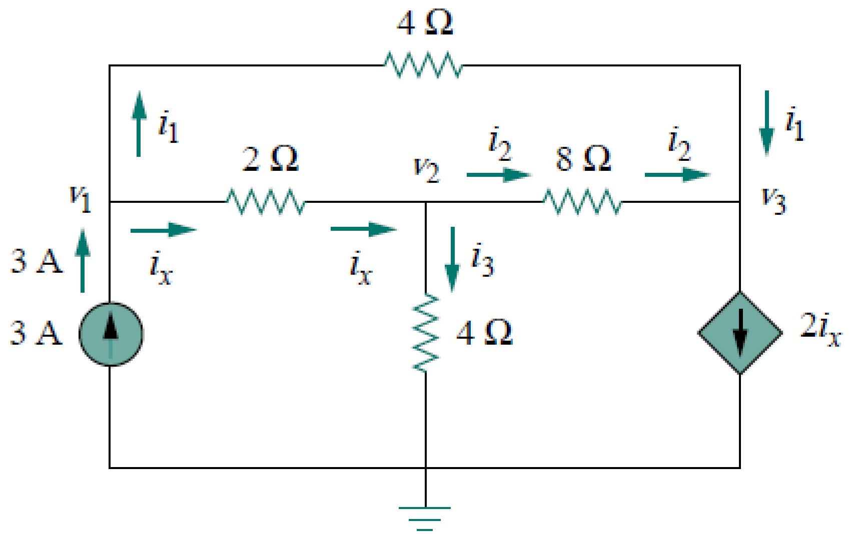


Sınıf içi etkinlik:

1- Aşağıdaki devrede düğüm gerilimlerini bulunuz?







At node 1,

$$3 = i_1 + i_x \quad \Longrightarrow \quad 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2}$$

Multiplying by 4 and rearranging terms, we get

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12$$

At node 2,

$$i_x = i_2 + i_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4}$$

Multiplying by 8 and rearranging terms, we get

$$-4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0$$

At node 3,

$$i_1 + i_2 = 2i_x \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

Multiplying by 8, rearranging terms, and dividing by 3, we get

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$$

METHOD 1 Using the elimination technique, we add Eqs. (3.2.1) and (3.2.3).

$$5v_1 - 5v_2 = 12$$

or

$$v_1 - v_2 = \frac{12}{5} = 2.4$$

Adding Eqs. (3.2.2) and (3.2.3) gives

$$-2v_1 + 4v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = 2v_2 \tag{3.2.5}$$

Substituting Eq. (3.2.5) into Eq. (3.2.4) yields

$$2v_2 - v_2 = 2.4 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = 2.4, \quad v_1 = 2v_2 = 4.8\text{ V}$$

From Eq. (3.2.3), we get

$$v_3 = 3v_2 - 2v_1 = 3v_2 - 4v_2 = -v_2 = -2.4\text{ V}$$

Thus,

$$v_1 = 4.8\text{ V}, \quad v_2 = 2.4\text{ V}, \quad v_3 = -2.4\text{ V}$$

METHOD 2 To use Cramer's rule, we put Eqs. (3.2.1) to (3.2.3) in matrix form.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

From this, we obtain

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

where Δ, Δ_1, Δ_2, and Δ_3 are the determinants to be calculated as follows. As explained in Appendix A, to calculate the determinant of a 3 by 3 matrix, we repeat the first two rows and cross multiply.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \end{array}\right|$$

$$= 21 - 12 + 4 + 14 - 9 - 8 = 10$$

Similarly, we obtain

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{rrr} 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{array}\right| = 84 + 0 + 0 - 0 - 36 - 0 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 24 - 0 - 0 + 48 = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 144 + 0 - 168 - 0 - 0 = -24$$

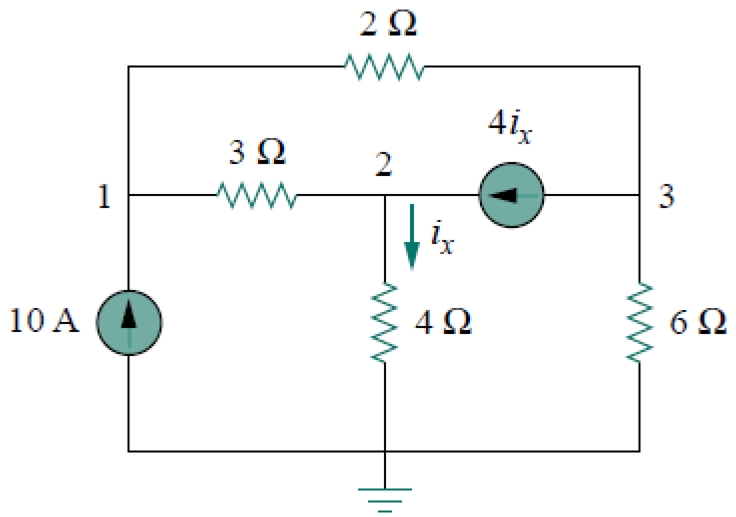
Thus, we find

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{10} = 4.8 \text{ V}, \qquad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ V}$$

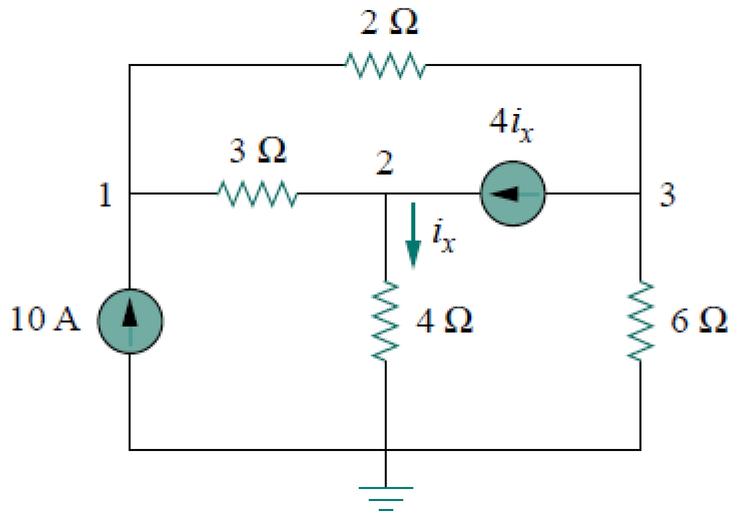
$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{10} = -2.4 \text{ V}$$

as we obtained with Method 1.

- 2-Aşağıdaki Devrede düğüm gerilimlerini bulunuz ve Ix akımını hesaplayınız



Answer: $v_1 = 80$ V, $v_2 = -64$ V, $v_3 = 156$ V.



Answer: $v_1 = 80$ V, $v_2 = -64$ V, $v_3 = 156$ V.

$-10+\frac{V_1-V_2}{3}+\frac{V_1-V_3}{2}=0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)V_1-\frac{V_2}{3}-\frac{V_3}{2}=10$

$\frac{V_2}{4}+\frac{V_2-V_1}{3}-4i_x=0 \qquad -\frac{V_1}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1\right)V_2=0$

$4i_x+\frac{V_3}{6}+\frac{V_3-V_1}{2}=0 \qquad -\frac{V_1}{2}+V_2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)V_3=0$

$i_x=\frac{V_2}{4}$

$\frac{5}{6}V_1-\frac{1}{3}V_2-\frac{1}{2}V_3=10$

$-\frac{1}{3}V_1-\frac{5}{12}V_2=0$

$-\frac{1}{2}V_1+V_2+\frac{4}{6}V_3=0$

$v_1=-\frac{5}{4}V_2$

$-\frac{25}{24}V_2-\frac{1}{3}V_2-\frac{1}{2}V_3=10$

$+\frac{5}{8}V_2+V_2+\frac{4}{6}V_3=0$

$-\frac{33}{24}V_2-\frac{1}{2}V_3=10$

$\frac{13}{8}V_2+\frac{4}{6}V_3=0$

$\frac{4}{3}$

$-\frac{11}{6}V_2-\frac{4}{6}V_3=\frac{40}{3}$

$\left(\frac{13}{8}-\frac{11}{6}\right)V_2=\frac{40}{3}$

3 4

$\frac{39-44}{24}V_2=\frac{40}{3}$

$-\frac{5}{24}V_2=\frac{40}{3}$

$V_2=-\frac{40}{3}\cdot\frac{24}{5}=-64V$

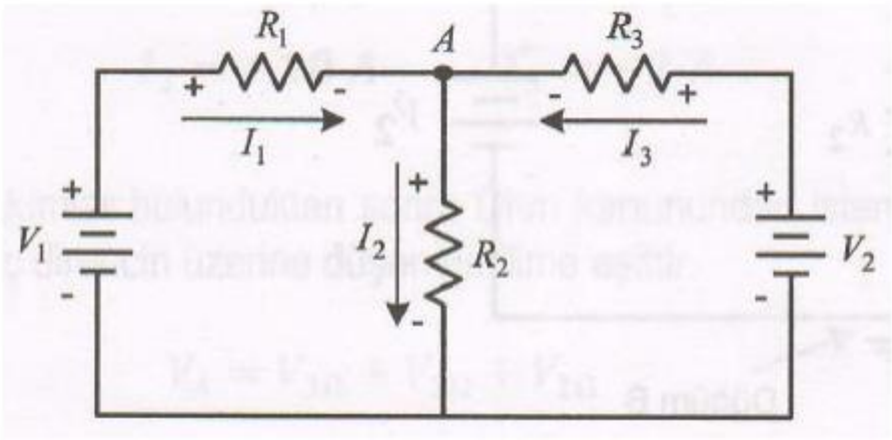
$V_1=-\frac{5}{4}\cdot(-64)=80V$

$\frac{4}{6}V_3=-\left(\frac{13}{8}\cdot(-64)\right)=104$

$V_3=104\cdot\frac{6}{4}=156V$

ÖDEV-1 (Ödevler Laboratuvar dersi saatinde teslim edilecektir.)

- 2. Aşağıdaki devrede A noktasındaki gerilimi, kol akımlarını ve dirençler üzerine düşen gerilimleri düğüm gerilimleri yöntemini kullanarak çözünüz.
- R1=R2=R3=5ohm
- V1=numaranızın son iki hanesi (Volt) 20360859017
- V2=V1*2 (Volt)



ÖDEV-2 (Ödevler Laboratuvar dersi saatinde teslim edilecektir.)

- 3. Düğüm Gerilim Metodu kullanarak V1 (1 noktasındaki) ve V2 (2 noktasındaki) voltajlarını bulunuz.