FİZİK I

BÖLÜM 2 : VEKTÖRLER

Ders kaynakları:

1. **Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar).**

2. **Temel Fizik I, Fishbane, Gasiorowicz ve Thornton, Türkçesi., 2013.**

3. **Mühendisler ve Fen Bilimciler İçin FİZİK, Yusuf Şahin, Muhammed Yıldırım. 2. Baskı, 2019.**

4. **Üniversiteler İçin Fizik, Bekir Karaoğlu, 3. Baskı, 2015.**

ÖĞRENİM KONULARI

- Koordinat sistemi.
- Vektörel ve skaler nicelikler.
- Vektörlerin bazı özellikleri,
  - Toplama ve çıkarma işlemi,
  - Bir vektörün bir skaler ile çarpılması.
  - İki vektörün skaler ve vektörel çarpımı.
- Vektörleri bileşenlerine ayırma ve birim vektör notasyonu.

- Fizikte sadece büyüklükleri ile tanımlanan niceliklere “*skaler*” nicelikler diyoruz.

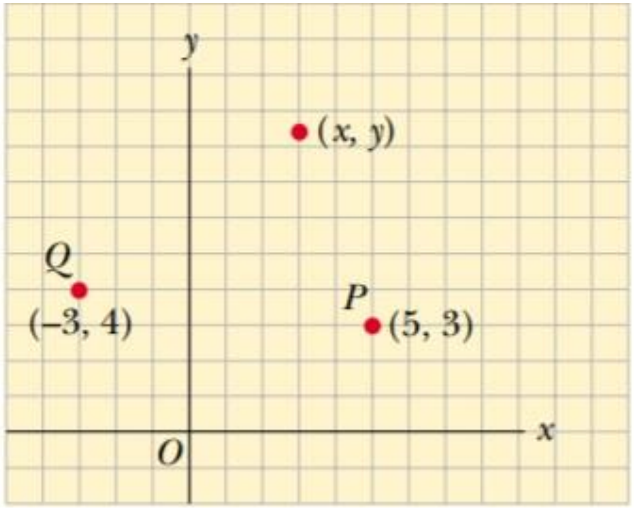
  Sıcaklık, kütle, enerji bunlardan bazılarıdır.

- Büyüklük yanında ayrıca yön bilgisi içeren veya gerektiren diğer fiziksel niceliklere ise “*vektörel*” nicelikler diyoruz.

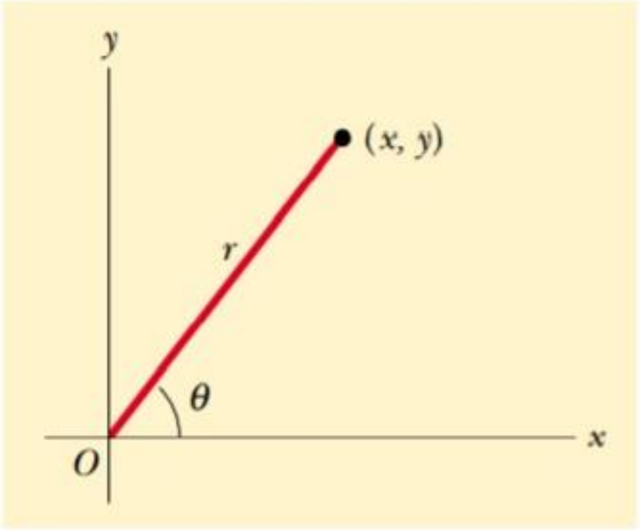
  Yer-değiştirme, hız, ivme, kuvvet bunlardan bazılarıdır.

2.1. Koordinat Sistemleri

- Bir cismin konumu, yatay ve düşey eksenlerin kesiştiği noktanın orjin olarak alındığı *kartezyen* veya *dik koordinat* sisteminde şekildeki gibi gösterilir.

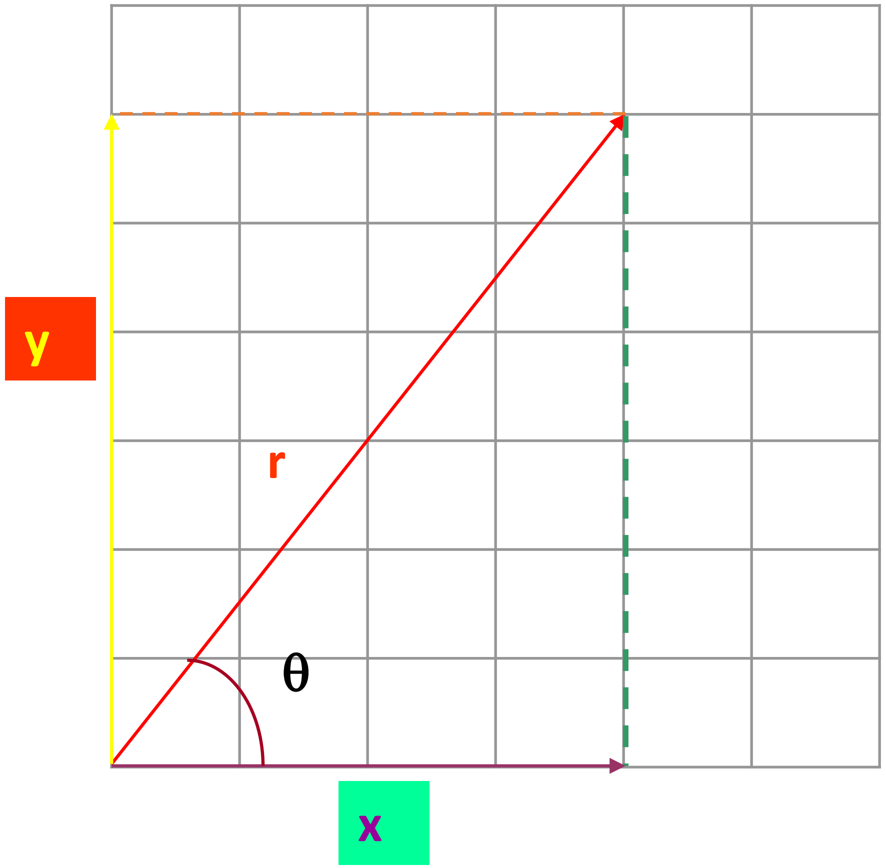


- Aynı nokta, r orjinden (x, y) noktasına olan uzaklık ve Ɵ ise +x ekseni ile yapılan açı olmak üzere; (*r*, *Ɵ*) ile gösterilen *düzlem kutupsal koordinat* sisteminde de gösterilebilir (yandaki şekildeki gibi).



2.1. Koordinat Sistemleri

(x,y) ifadesini, (r, θ) ya bağlamak için;



θ Açısın sinüs ve cosinüsü;

Sin θ = y / r   y = r.Sin θ

Cos θ = x / r   x = r.Cos θ

Dik açı ile hipotenüs;

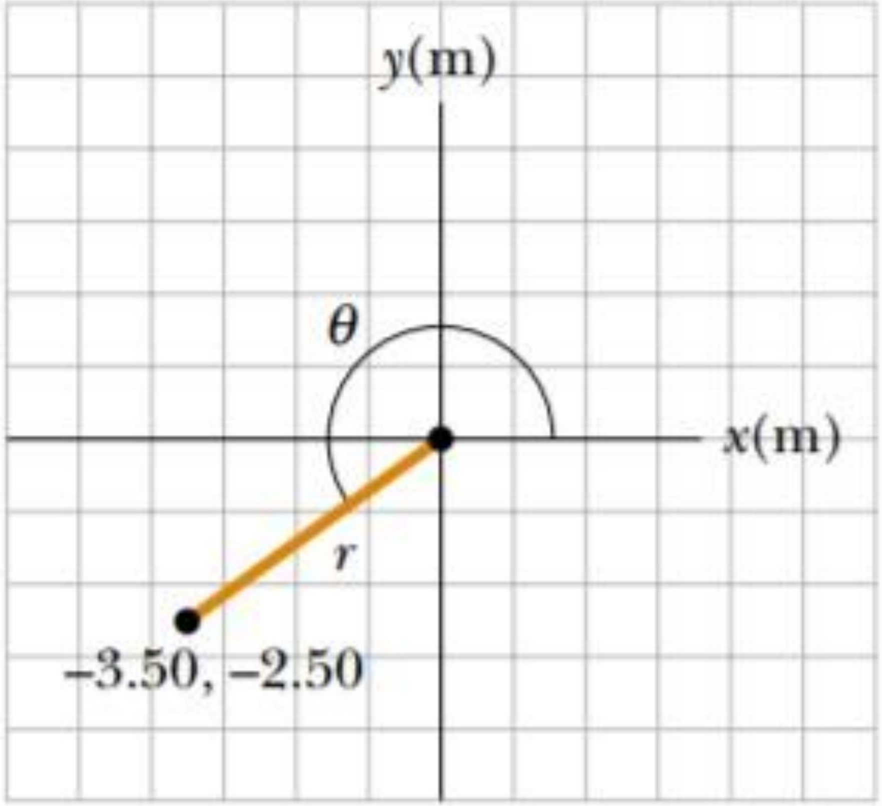
r= $\sqrt{x^2 + y^2}$

Eğim ile θ açısı;

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

ÖRNEK 2.1 Kutupsal Koordinatlar

Bir noktanın xy düzlemindeki kartezyen koorinatları Şekil 2.3 deki gibi $(x, y) = (-3{,}50; -2{,}50)$ m dir. Bu noktanın kutupsal koordinatlarını bulunuz.



Çözüm

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3{,}5)^2 + (-2{,}5)^2} = 4{,}30 \text{ m}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2{,}5 \text{ m}}{-3{,}5 \text{ m}} = 0{,}714$$

$$\theta = 216°$$

θ nın koordinat sisteminin üçüncü çeyreğinde olduğunu bulmak için, x ve y nin işaretlerini kullanmanız gerektiğine dikkat ediniz. Yani, $\theta = 216°$ 'dir. 35,5° değildir.

- Fizikte hem sayısal büyüklüğü hemde yönü ve doğrultuyu belirtmek için özel bir matematik diline ihtiyaç duyulur. Bu kavram vektörlerle ifade edilir. Sadece büyüklüğün anlatımında yeterli olduğu niceliklere *skaler nicelik* denir. Örneğin, sıcaklık, enerji, kütle, basınç ve zaman böyle niceliklerdir.

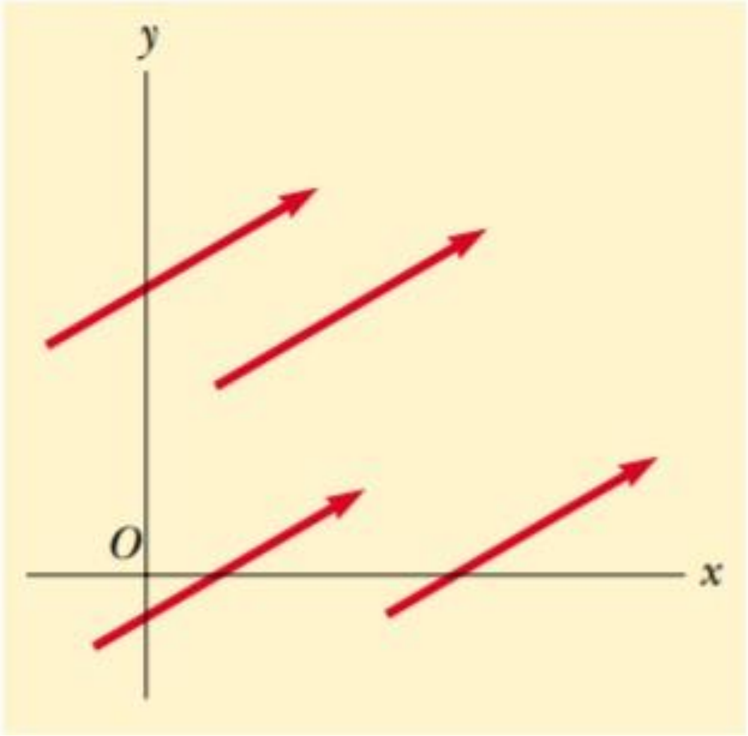
- Ne zamanki bu durum yeterli olmaz ve ek bilgi olarak yön ve doğrultuyada ihtiyaç duyulur, işte o zaman *vektörel nicelikler* kullanılır. En basit örnekler yerdeğiştirme, hız ve ivme kavramlarıdır.

- Bir vektör iki şekilde gösterilir; $\vec{A}$ (üzerinde ok işareti ile) veya $\boldsymbol{A}$ şeklinde gösterilebilir.

2.2. Vektörlerin Bazı Özellikleri

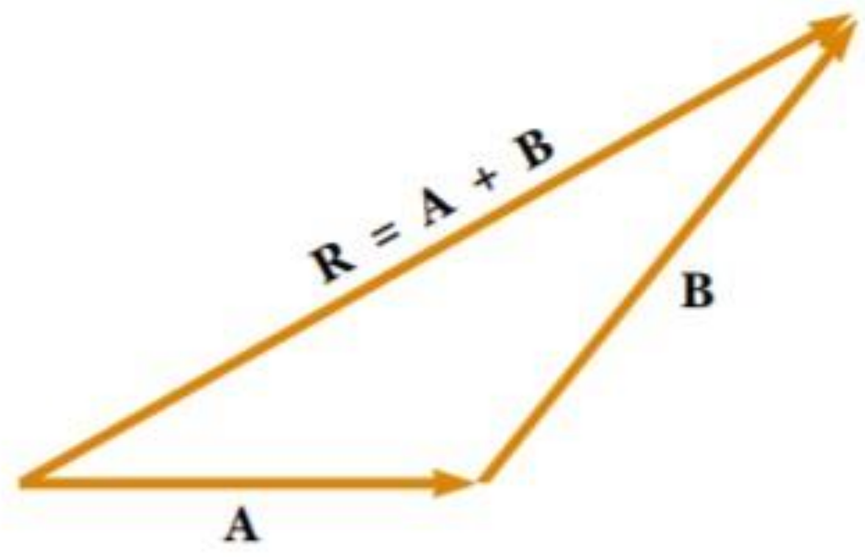
İki vektörün eşitliği

Şayet A ve B vektörleri *aynı büyüklüğe* ve *yöne* sahiplerse bu iki vektör eşittir. Ve; ***A*=*B*** dir. Aşağıdaki şekildeki vektörler aynı büyüklük ve yönde sahip olduklarından eşittirler.



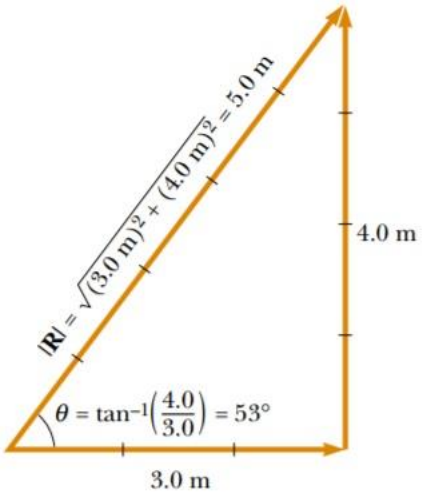
Vektörlerin toplanması

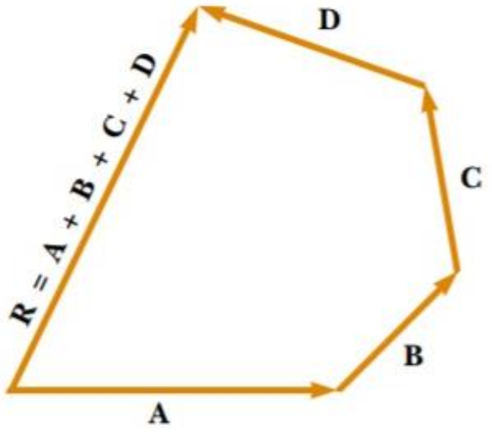
A ve ***B*** vektörleri uç uca eklenerek şekildeki gibi toplanabilirler; ***R*=*A*+*B*** şeklindedir.



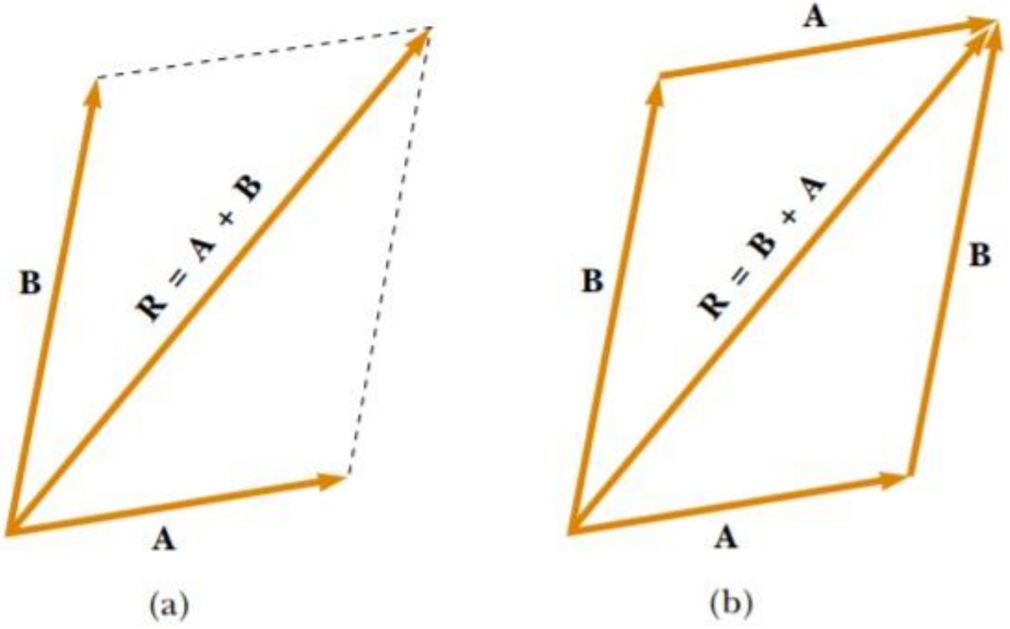
2.2. Vektörlerin Bazı Özellikleri

Vektörlerin toplanması





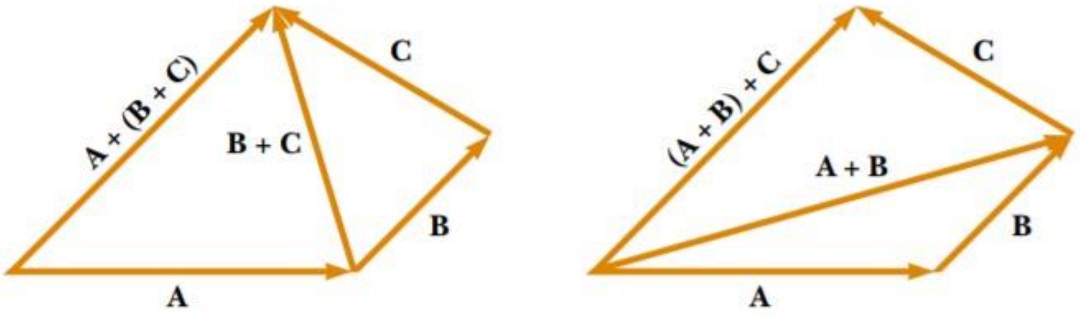
- Toplama işlemi yapılırken paralel kenar kuralı olarak bilinen aşağıdaki yol da izlenebilir.



$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2.2. Vektörlerin Bazı Özellikleri

Vektörlerin toplanması



Toplama işlemi yapılırken, birleşme özelliği vardır.

(A+B)+C=A+(B+C)

Negatif vektör

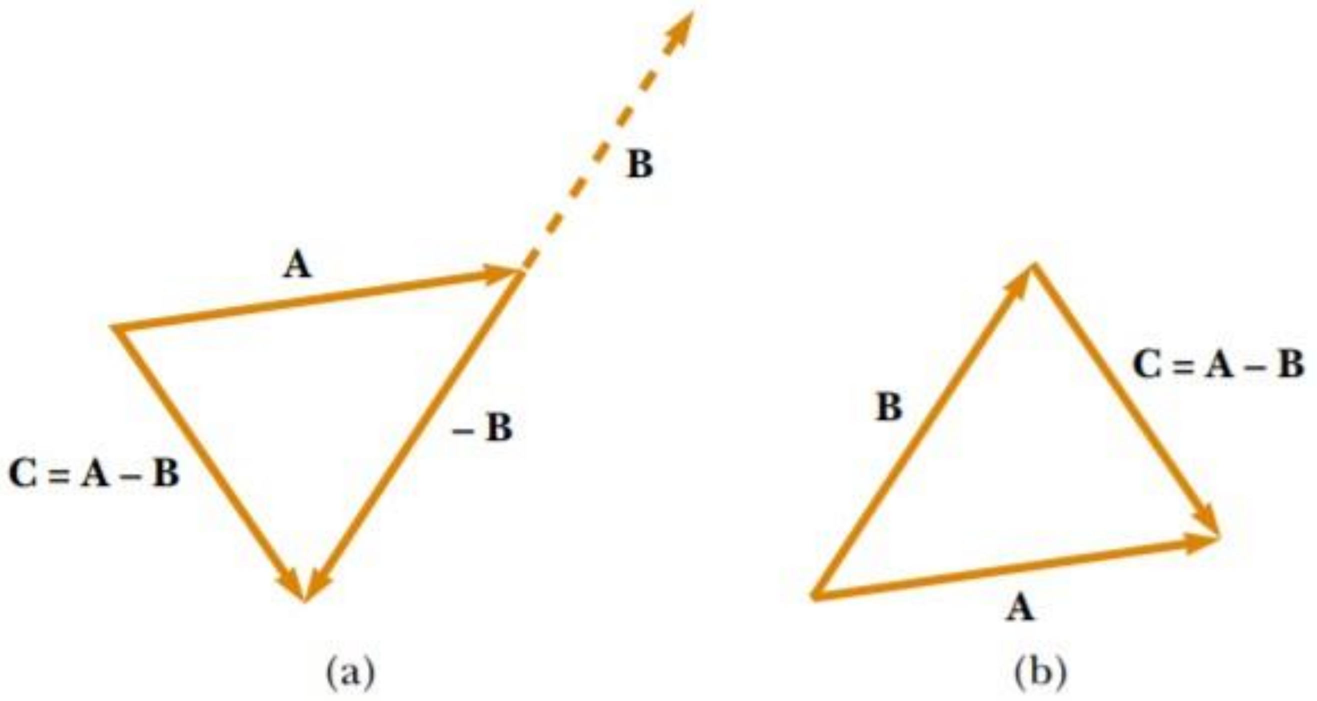
A vektörünün negatifi ***A*** vektörü ile toplandığında sonucu sıfır olan vektördür.
-***A*** ile gösterilir.

A+(-A)=0

2.2. Vektörlerin Bazı Özellikleri

Vektörlerin çıkarılması

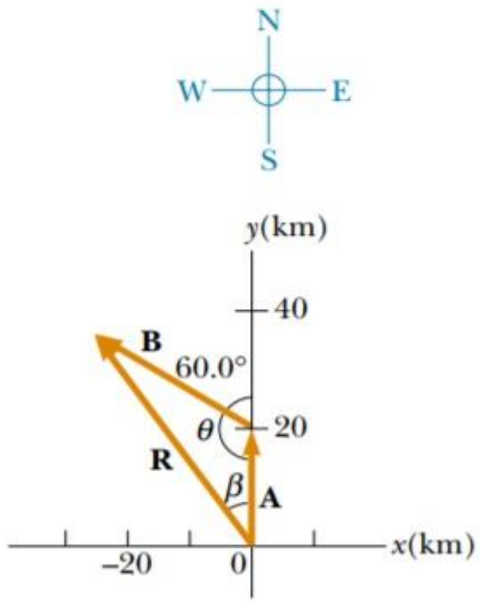
Vektörlerin negatifi tanımından yola çıkılarak, çıkarma işlemi yapılır.



ÖRNEK 2.2 Bir Tatil Gezisi

Bir otomobil, Şekil 'deki gibi kuzeye doğru 20,0 km ve sonra 60.0° kuzey-batı yönünde 35,0 km yol almaktadır. Otomobilin bileşke yer değiştirmesinin büyüklük ve yönünü bulunuz.

Çözüm Bu örnekte, iki vektörün bileşkesini bulmak için iki yol gösteriyoruz. Problem, Şekil 3.12 de görüldüğü gibi, grafik kağıdı ve bir iletki kullanılarak geometrik olarak çözülebilir. (Gerçekte, hesaplamayı başarabileceğinizi bilseniz bile sonucu kontrol etmek için vektörleri çizmelisiniz.) Bileşke **R** yerdeğiştirmesi, ayrı ayrı iki **A** ve **B** yer değiştirmesinin toplamıdır.



Problemi cebirsel olarak çözmek için, **R**'nin büyüklüğünü bulmak da trigonometrideki kosinüs teoremi kullanılabilir (Ek B. 4). $\theta = 180° - 60° = 120°$ ve $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos\theta$ olduğundan,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20{,}0 \text{ km})^2 + (35{,}0 \text{ km})^2 - 2(20{,}0 \text{ km})(35{,}0 \text{ km})\cos 120°}$$

$$= 48{,}2 \text{ km}$$

R nin kuzey yönünden itibaren ölçülen yönü, trigonometrideki sinüs teoreminden aşağıdaki şekilde elde edilebilir (Ek B.4):

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35{,}0 \text{ km}}{48{,}2 \text{ km}}\sin 120° = 0{,}629$$

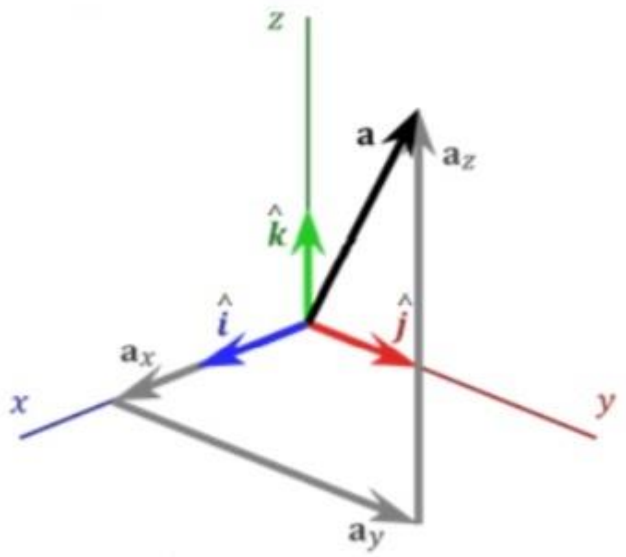
veya

$$\beta = 38{,}9°$$

Böylece, otomobilin bileşke yerdeğiştirmesi, 38,9° kuzey batı yönünde 48,2 km'dir. Bu sonuç grafik olarak bulduğumuzla uyuşur.

2.3. Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim Vektörler

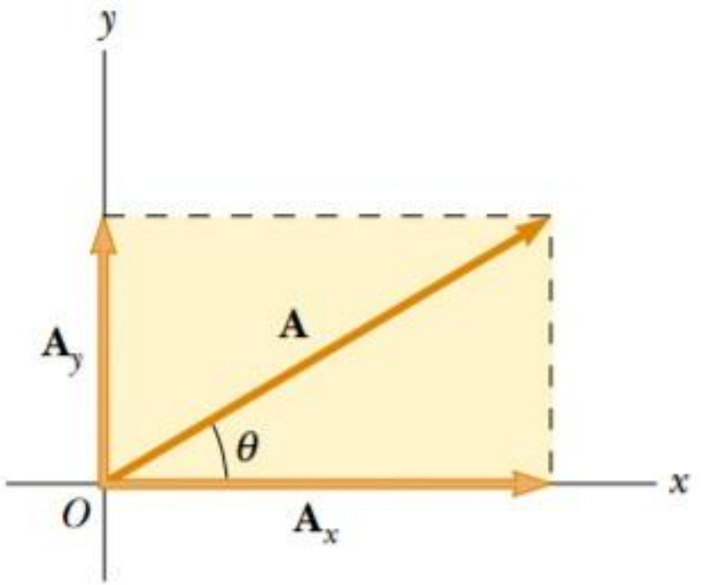
- Herhangi bir yönde büyüklüğü 1 olan vektöre *birim vektör* denir. Birimsiz olup, yandaki şekildeki gibi sadece yön göstermek için kullanılırlar. x, y, z yönlerindeki birim vektörler $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ dır.



- Birim vektörlerin büyüklüğü 1 dir, yani;

$$|i| = |j| = |k| = 1$$

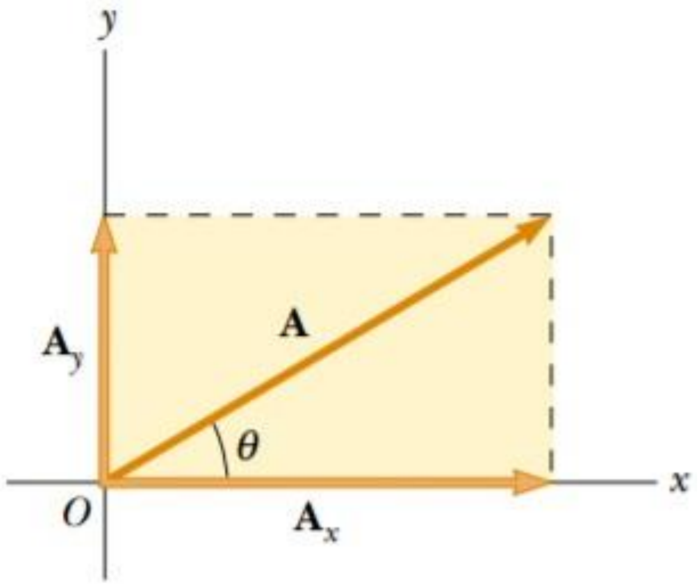
- Her vektör yandaki şekilde olduğu gibi bileşenlerine ayrılabilir ve birden fazla vektör de bu bileşenler cinsinden toplanabilir.



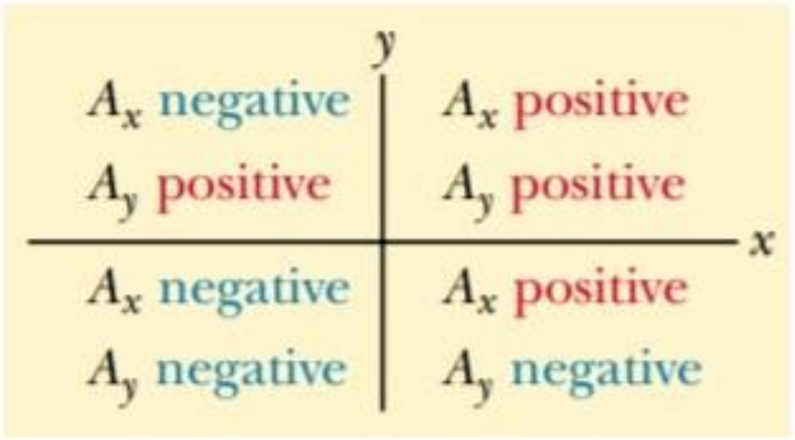
2.3. Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim Vektörler

$$A_x = A\cos\theta \qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$A_y = A\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

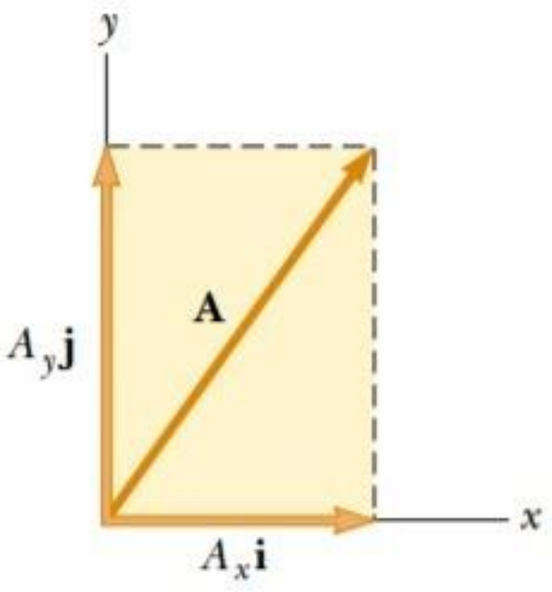


- Vektörlerin bileşenleri yatayla yapılan açıya bağlıdırlar;

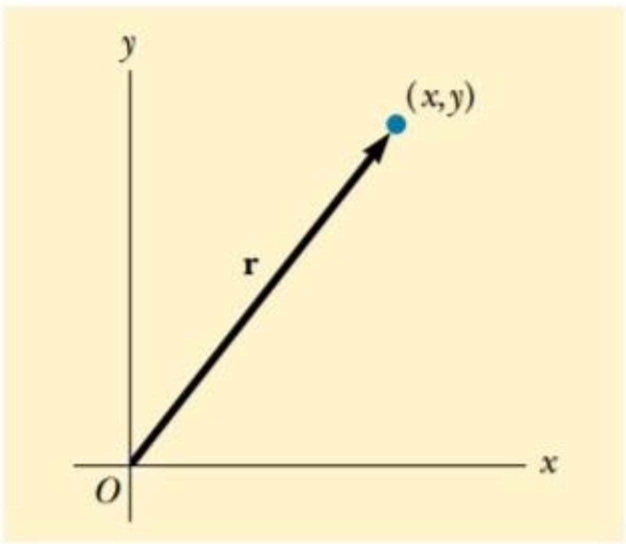


2.3. Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim Vektörler

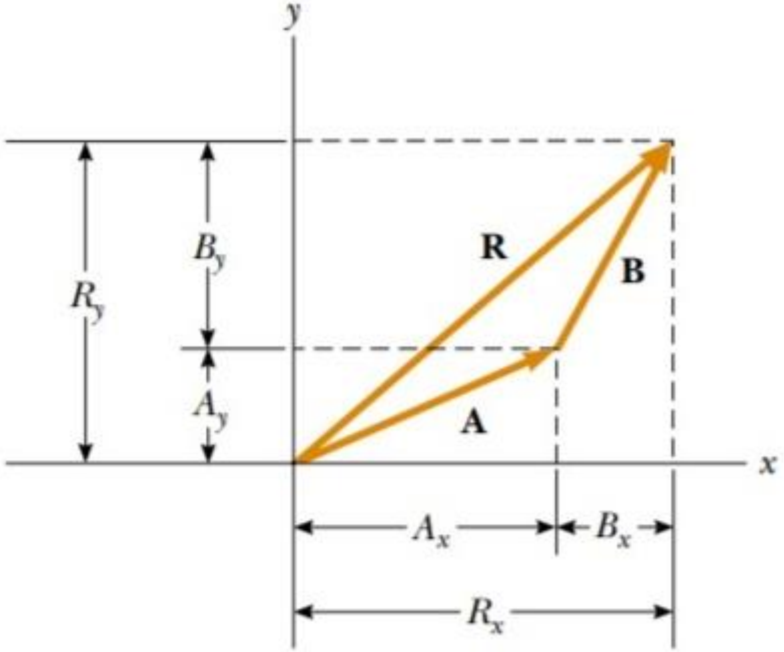
Vektörler aşağıdaki şekillerde olduğu gibi bileşenlere ayrılarak toplanabilirler.



Bir $\boldsymbol{A}$ vektörünün bileşenleri cinsinden yazılması. Ve bileşenleri toplamı $\boldsymbol{A}$ yı verecektir.



Kartezyen koordinatları (x,y) olan bir nokta $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ konum vektörü ile verilir.



Bileşenler cinsinden toplanan ve bileşke vektör olan $\boldsymbol{R}$ nin geometrik gösterimi.

2.3. Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim Vektörler

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{ise}$$

$$\mathbf{R} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j})$$

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j}$$

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad tg\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

Üç boyutlu uzay için son denklemler

A = A_x **i** + A_y **j** + A_z **k**
B = B_x **i** + B_y **j** + B_z **k**

halini alır.

ÖRNEK 2.3 İki Vektörün Toplamı

xy düzleminde yeralan ve

$$\mathbf{A} = (2{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j})\ \text{m} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{B} = (2{,}0\mathbf{i} - 4{,}0\mathbf{j})\ \text{m}$$

ile verilen, **A** ve **B** vektörlerinin toplamını bulunuz.

Çözüm **A** yı $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ genel ifadesi ile karşılaştırırsak $A_x = 2{,}0$ m ve $A_y = 2{,}0$ m olduğunu görürüz. Aynı şekilde $B_x = 2{,}0$ m ve $B_y = -4{,}0$ m dır. 3.14 Eşitliğini kullanarak bileşke **R** vektörünü

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2{,}0 + 2{,}0)\mathbf{i}\ \text{m} + (2{,}0 - 4{,}0)\mathbf{j}$$
$$\text{m} = (4{,}0\ \mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j})\,\text{m}$$

elde ederiz. Veya

$$R_x = 4{,}0\ \text{m} \qquad R_y = -2{,}0\text{m}$$

olur. **R** 'nin büyüklüğü 3.16 Eşitliğine göre

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = \sqrt{(4{,}0\ \ m)^2 + (-2{,}0m\,)^2} = \sqrt{20}\ \text{m}$$
$$= \ 4{,}5\ \text{m}$$

olur. 3.17 Eşitliğinden **R** nin yönünü bulabiliriz:

$$\tan\,\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2{,}0\ \ m}{4{,}0\ \ m} = -0{,}50$$

Hesap makinanız $\theta = \tan^{-1}(0{,}50)$ için cevap olarak $-27°$ verir. Şayet $27°$ yi *x*-ekseninden saat yönünde almış gibi yorumlarsak bu cevap doğrudur. Bizim standart kabulümüz $+x$ ekseninden saat yönünün tersinde ölçülen açıyı almaktır. Bu vektör için açı $\theta = \ \ 333°$ dir.

ÖRNEK 1.4 Bileşke Yerdeğiştirme

Bir parçacık, $\mathbf{d}_1 = (15\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$cm, $\mathbf{d}_2 = (23\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 5{,}0\mathbf{k})$cm ve $\mathbf{d}_3 = (-13\mathbf{i} + 15\mathbf{j})$ cm ile verilen ardışık üç yerdeğiştirmeye uğramaktadır. Parçacığın bileşke yerdeğiştirmesinin bileşenlerini ve büyüklüğünü bulunuz.

Çözüm Kâğıt sayfasındaki çizime bakmaktansa problemi şu şekilde görülebilir hale getirelim: Yatay olan masanızın sol köşesinden parmak ucunuzla başlayarak, parmak ucunuzu 15 cm sağ tarafa, sonra masanın geniş kenarına doğru 30 cm, sonra yukarı dik 12 cm, sonra 23 cm sağa, sonra sıranın ön kenarına doğru yatay 14 cm, sonra sıraya doğru dik 5,0 cm, sonra sola doğru 13 cm ve (son olarak!) sıranın arkasına doğru 15 cm hareket ettiriniz. Üç dik eksen boyunca bu hareketin matematik hesabı

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \\
&= (15 + 23 - 13)\mathbf{i}\text{ cm} + (30 - 14 + 15)\mathbf{j}\text{ cm} \\
&\quad + (12 - 5{,}0 + 0)\mathbf{k}\text{ cm} \\
&= (25\mathbf{i} + 31\mathbf{j} + 7{,}0\mathbf{k})\text{ cm}
\end{aligned}
$$

dır. Bileşke yer değiştirme $R_x = 25$ cm, $R_y = 31$ cm ve $R_z = 7{,}0$ cm bileşenlere sahiptir. Büyüklüğü,

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\
&= \sqrt{(25\text{ cm})^2 + (31\text{ cm})^2 + (-7{,}0\text{ cm})^2} = 40\text{ cm}
\end{aligned}
$$

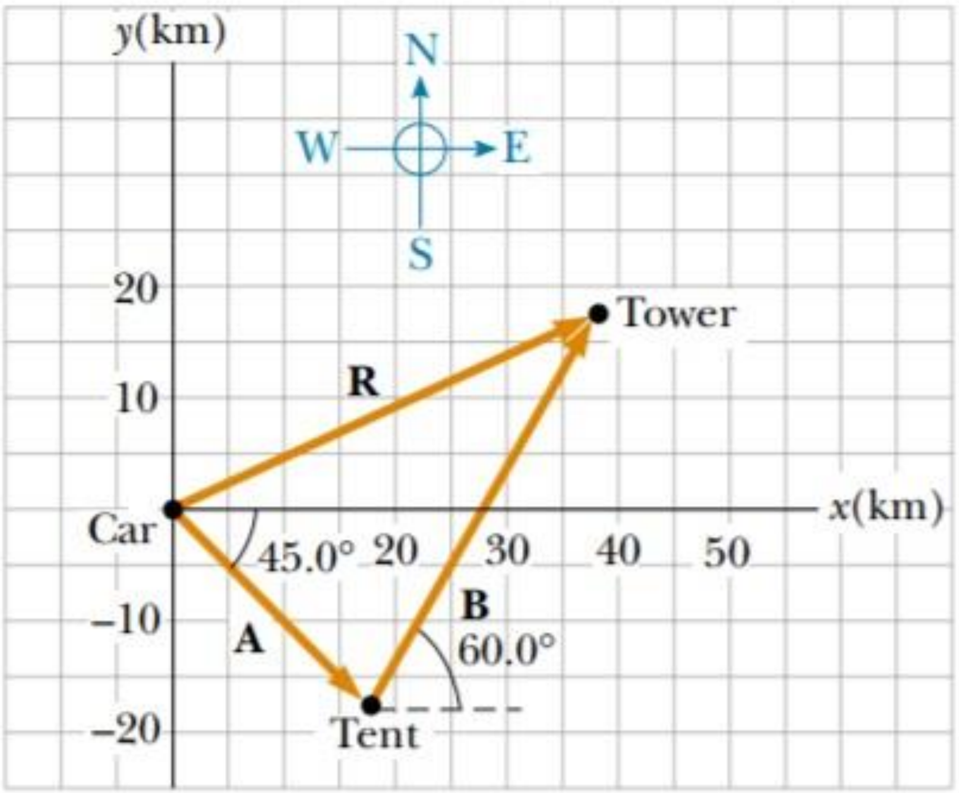
olur.

Örnek 2.5 Yürüyüş Yapma

Bir yürüyüşcü, yolculuğuna önce arabasından güney-doğuya doğru 25,0 km yürüyerek başlar. Durur ve gece için çadır kurar. İkinci günde, bir orman memurunun kulesinin bulunduğu noktaya, 60° kuzey-doğu yönünde 40,0 km yürür. (a) Birinci ve ikinci günler için yürüyüşçünün yerdeğiştirmelerinin bileşenlerini bulunuz.

$$A_x = A\cos(-45{,}0°) = (25{,}0\text{ km})(0{,}707) = 17{,}7\text{ km}$$

$$A_y = A\sin(-45{,}0°) = -(25{,}0\text{ km})(0{,}707) = -17{,}7\text{ km}$$



İkinci **B** yerdeğiştirmesi 40,0 km lik bir büyüklüğe sahiptir ve yönü 60° kuzey-doğudur. Onun bileşenleri

$$B_x = B\cos(60{,}0°) = (40{,}0\text{ km})(0{,}500) = 20{,}0\text{ km}$$

$$B_y = B\sin(60{,}0°) = (40{,}0\text{ km})(0{,}866) = 34{,}6\text{ km}$$

ÖRNEK 2.5 Yürüyüş Yapma

Bir yürüyüşcü, yolculuğuna önce arabasından güney-doğuya doğru 25,0 km yürüyerek başlar. Durur ve gece için çadır kurar. İkinci günde, bir orman memurunun kulesinin bulunduğu noktaya, 60° kuzey-doğu yönünde 40,0 km yürür. (a) Birinci ve ikinci günler için yürüyüşçünün yerdeğiştirmelerinin bileşenlerini bulunuz.

(b) Yürüyüşçünün toplam yerdeğiştirmesi **R**'nin bileşenlerini bulunuz. **R**'nin ifadesini birim vektörler cinsinden bulunuz.

Çözüm Yürüyüş için bileşke $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ yerdeğiştirme-

$$R_x = A_x + B_x = 17{,}7 \text{ km} + 20{,}0 \text{ km} = 37{,}7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17{,}7 \text{ km} + 34{,}6 \text{ km} = 16{,}9 \text{ km}$$

dir. Birim vektörler cinsinden, toplam yerdeğiştirmeyi

$$\mathbf{R} = (37{,}7\mathbf{i} + 16{,}9\mathbf{j}) \text{ km}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yön kosinüsleri ve 3 boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatları

- 3 Boyutlu vektörün büyüklüğü

$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$

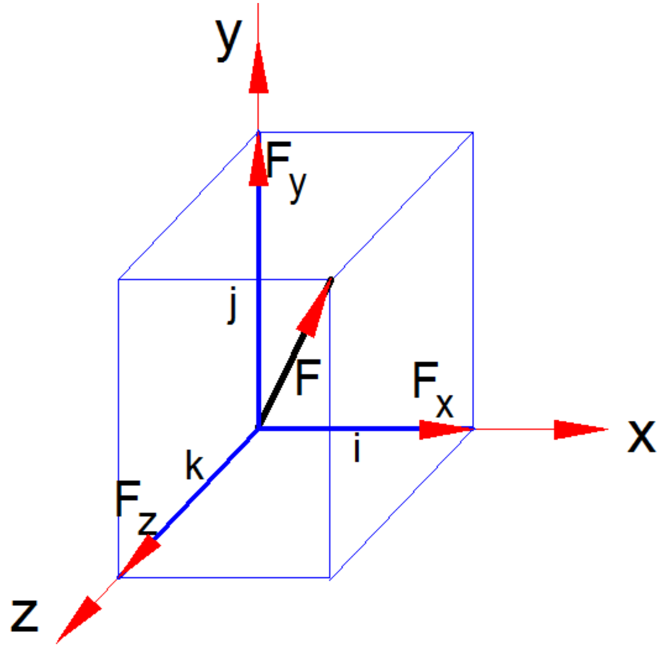
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

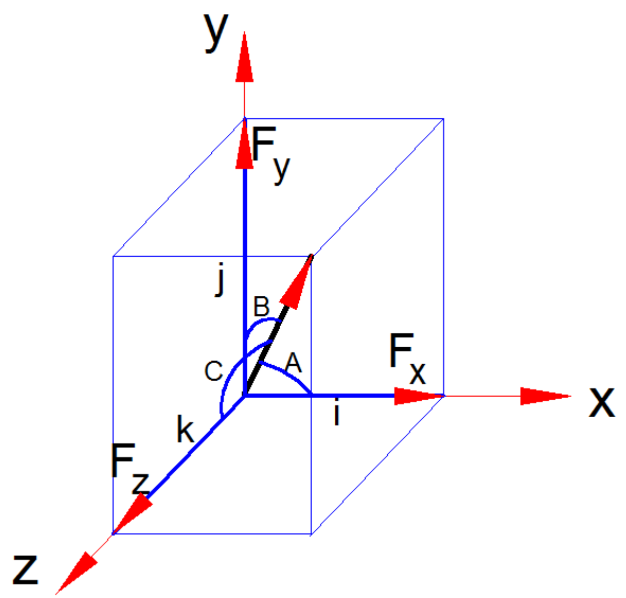
- 3 Boyutlu vektörün açısı.

  Bu açı koordinat düzleminde x,y,z eksenleri ile Toplam kuvvet F vektörünün arasındaki A, B, C açılarıdır.

  - A açısı x ekseni ile F vektörü arasında
  - B açısı y ekseni ile F vektörü arasında
  - C açısı z ekseni ile F vektörü arasındadır

$$\mathrm{CosA} = \frac{F_x}{F} \qquad \mathrm{CosB} = \frac{F_y}{F} \qquad \mathrm{CosC} = \frac{F_z}{F}$$





Yön kosinüsleri ve 3 boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatları

F vektörü kartezyen notasyonu ile yazılması

F_x=F*CosA

F_y=F*CosB

F_z=F*CosC

$$\Rightarrow \vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

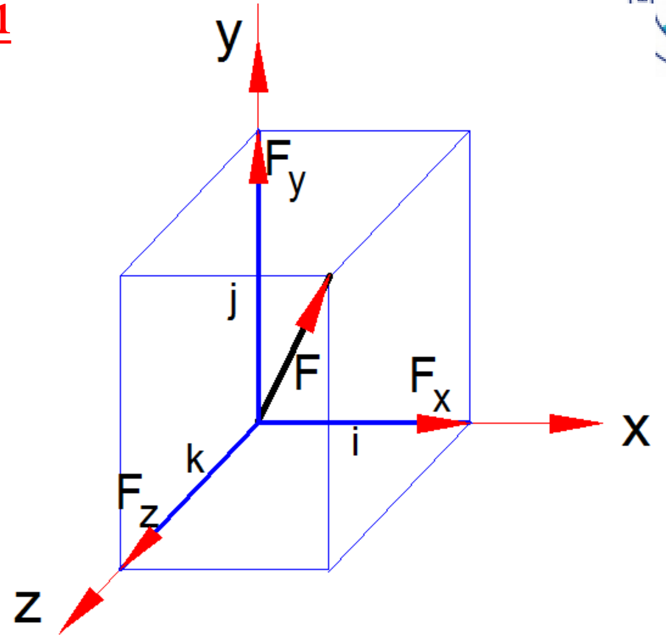
$$\Rightarrow \vec{F} = F\cos Ai + F\cos Bj + F\cos Ck$$

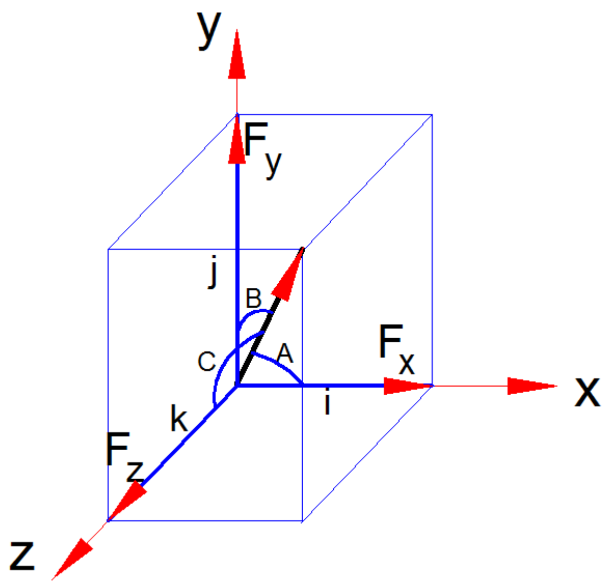
F vektörü Büyüklüğü $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F^2 Cos^2 A + F^2 Cos^2 B + F^2 Cos^2 C}$$

$$\Rightarrow F^2 = F^2(Cos^2 A + Cos^2 B + Cos^2 C)$$

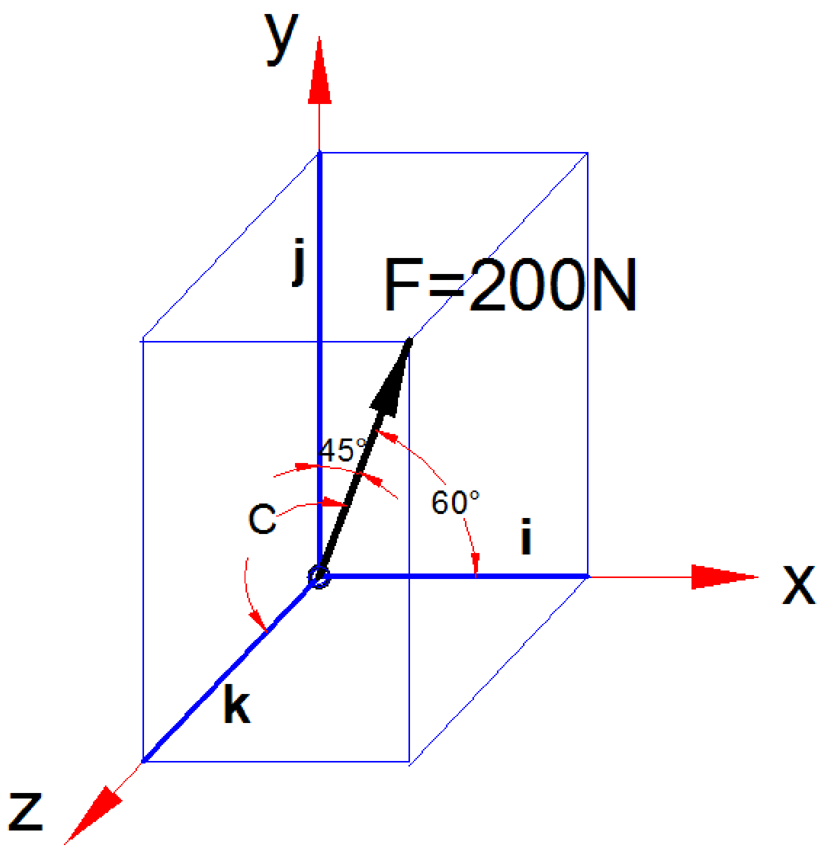
$$\Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$





Örnek: Bir odanın tam köşesinde çakılı bir halka halat ile 200 N luk bir kuvvetle çekilmektedir. İp dikey köşe çizgisinden 45^0 , yatay köşe çizgisinden ise 60^0 açıda çekilmektedir. Uygulanan kuvvetin x, y, z eksenlerindeki bileşenlerini kartezyen koordinat notasyonu ile yazınız.

Çözüm:



$$\mathrm{Cos}^2 60 + \mathrm{Cos}^2 45 + \mathrm{Cos}^2 C = 1$$

$$\Rightarrow 0.5^2 + 0.71^2 + \mathrm{Cos}^2 C = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cos}^2 C = 0.25$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cos}C = \pm\sqrt{0.25} \Rightarrow \mathrm{Cos}C = \pm 0.5$$

➔ $C=60^0$ veya $C=120^0$

$C=120^0$ odanın sınırları dışında kalacağından, $C=60^0$ olarak tespit edilir.

$$\mathbf{F} = F\cos A\mathbf{i} + F\cos B\mathbf{j} + F\cos C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = 200\cos 60\mathbf{i} + 200\cos 45\mathbf{j} + 200\cos 60\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = 100\mathbf{i} + 141{,}2\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$$

Fx=100 N, …..

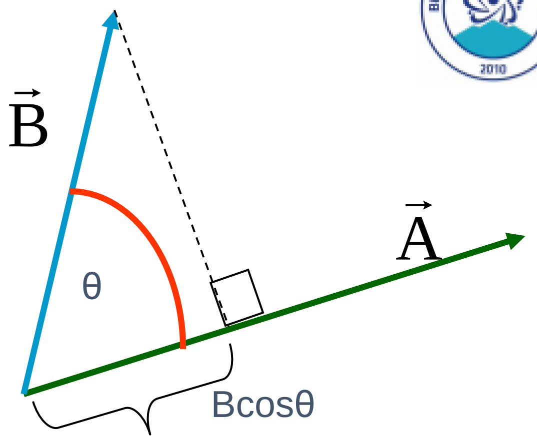
Vektör ile skalerin çarpımı

s bir skaler ve ***a*** bir vektör olmak üzere bu ikisinin çarpımı yeni bir vektör verir, ve büyüklüğü;

$$\boldsymbol{b} = s|\boldsymbol{a}|$$

- s>0 ise, ***b*** vektörü ***a*** ile aynı yönde
- s<0 ise ***b*** vektörü ***a*** ile zıt yöndedir.

İki vektörün skaler çarpımı



Genel olarak iki vektörün skaler çarpımı, iki vektörün büyüklükleri ile aralarındaki açının cosinüsünün çarpımına eşittir.

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}//(0^0)\vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = AB$$

$$\vec{A} \perp (90^0)\vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{A}(180^0)\vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = -AB$$

$$i.i = j.j = k.k = 1 \rightarrow açı(0^0)$$

$$i.j = j.k = i.k = 0 \rightarrow açı(90^0)$$

Eğitici Soru: Bu bilgilerden hareketle x, y, z bileşenlerine sahip A ve B vektörlerinin skaler çarpımları için bir sonuç yazınız?

İki vektörün skaler çarpımı, vektörlerin büyüklükleri ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir ve bu çarpma işlemi nokta ile gösterilir.

Özellikler

1. Yer değiştirme özelliği $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2. Dağılma özelliği $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

3. Birim vektörlerin skaler çarpımı

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 0 \quad \text{çünkü} \ \theta = 90^o$$

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \quad \text{çünkü} \ \theta = 0^o$$

4. Birim vektörler cinsinden skaler çarpma $\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

5. Bir vektörün kendisiyle skaler çarpımı büyüklüğünün karesini verir.

$$\vec{A}.\vec{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z$$
$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Skaler Çarpım

A ve **B** vektörleri, **A** = 2**i** + 3**j** ve **B** = – **i** + 2**j** olarak veriliyor.
(a) **A·B** skaler çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= -2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot 2\mathbf{j} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\cdot 2\mathbf{j}$$

$$= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1)$$

$$= -2 + 6 = 4$$

Burada **i·i** = **j** · **j** = 1 ve **i·j** = **j·i** = 0 olduğu gerçeğini kullandık. 7.9 Eşitliğini kullandığımızda aynı sonuç elde edilir. Burada $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ ve $B_y = 2$ dir.

(b) **A** ile **B** arasındaki θ açısını bulunuz.

Çözüm **A** ve **B** nin büyüklükleri şöyledir:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

7.3.Eşitliğini ve (a) şıkkının sonucunu kullanarak

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\,\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8{,}06} = 60{,}2°$$

buluruz.

Ödev: **A** ve **B** vektörleri, **A**=3**i**+4**j** ve **B**= -2**i**+3**j** ise

a) **A.B** skaler çarpımını bulunuz.

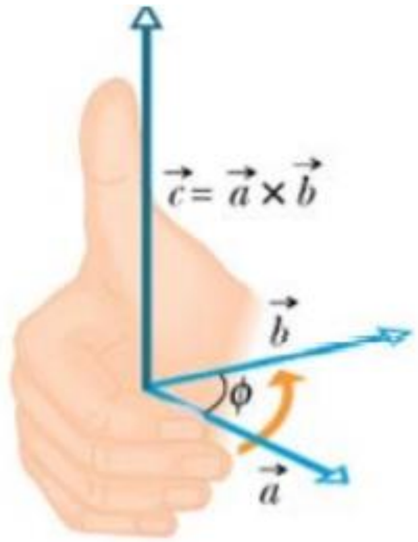
b) **A** ile **B** vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

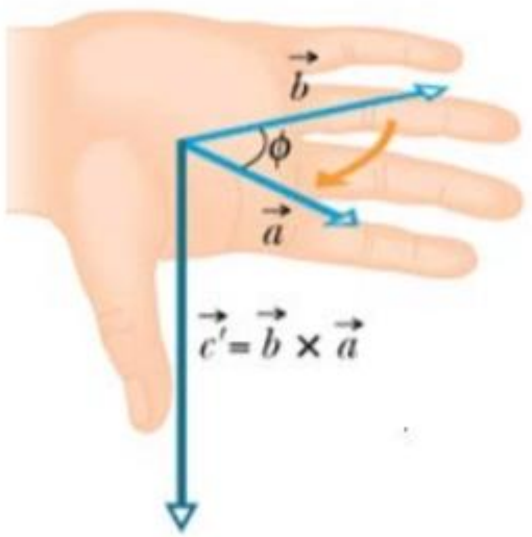
İki vektörün vektörel çarpımı

- ***a*** ve ***b*** vektörleri arasındaki vektörel işlem;

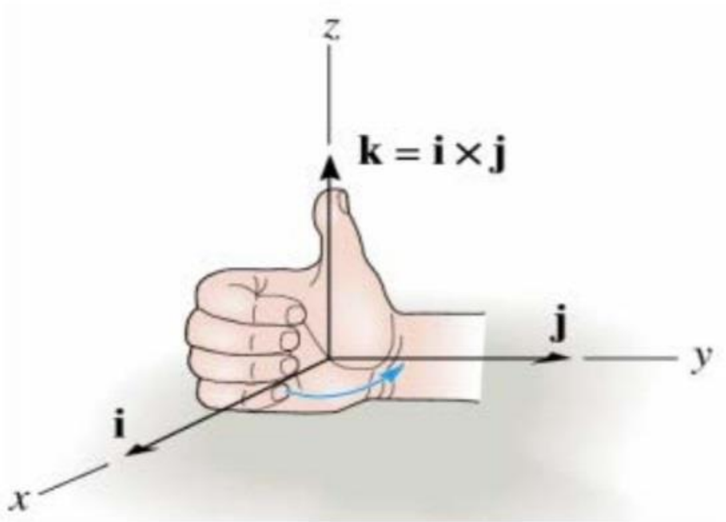
$\boldsymbol{c = a x b}$ şeklinde verilir ve büyüklüğü;

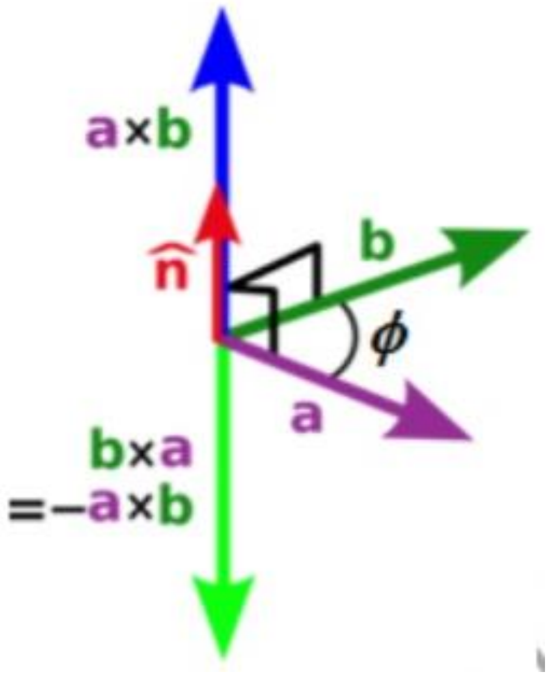
$c = absin\theta$ şeklinde verilir ve c nin yönü sağ el kuralı ile bulunur.



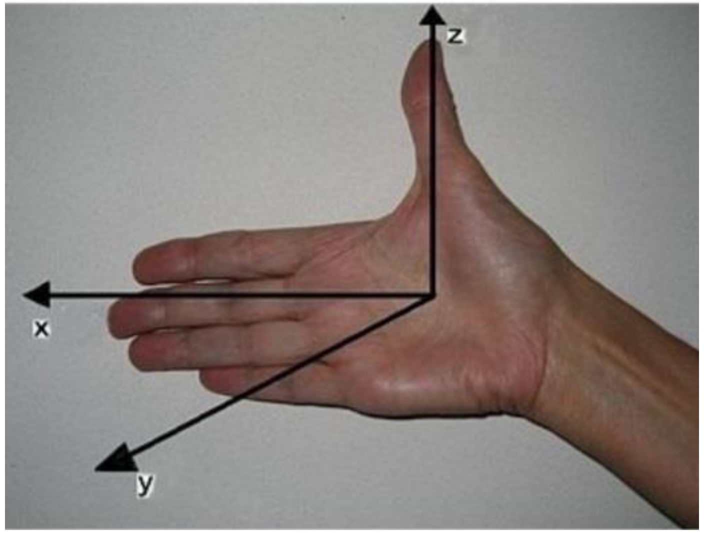


Vektörel çarpımın özellikleri





$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$$



Burada sırasıyla x,y,z yönlerindeki birim vektörler i,j,k ise bu vektörlerin vektörel çarpımı

$\vec{i}x\vec{i} = \vec{j}x\vec{j} = \vec{k}x\vec{k} = 0$ ve

$\vec{i}x\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k}xi = \vec{j}$, $\vec{j}x\vec{k} = i$ tersi ise

$\vec{j}x\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{i}x\vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{k}x\vec{j} = -i$ ’dir.

- Vektörel çarpımda çarpma sırası önemlidir.

$$\mathbf{A}\,x\,\mathbf{B} = -\,\mathbf{B}\,x\,\mathbf{A}$$

- Paralel iki vektörün çarpımı sıfırdır.
- Bir başka ifade ile çarpımları sıfır olan iki vektörün, vektörel çarpımı sıfır ise bu iki vektör paraleldir.
- Geometrik olarak vektörel çarpım; çarpılan iki vektörün meydana getirdikleri paralel kenarın alanı olarak tanımlanabilir.
- İki vektör birim vektörler cinsinden verilmiş ise bu iki vektörün vektörel çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})x(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})x(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

Bu çarpımın sonucu aşağıdaki matrisin determinatının açılımıdır.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

Vektörel Çarpım

xy–düzleminde bulunan iki vektör $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ eşitlikleriyle verilmektedir. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'yi bulunuz ve $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 2\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \times (-\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} + 3\mathbf{k} = 7\mathbf{k}$$

elde edilir. 11.13a eşitliğinden görüldüğü gibi, bu işlemlerde, $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ ve $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$ terimleri sıfıra eşit oldukları için alınmadı.

Şimdi $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğunu gösterebiliriz:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= -\mathbf{i} \times 3\mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times 2\mathbf{i} = -3\mathbf{k} - 4\mathbf{k} = -7\mathbf{k}$$

dır. Böylece $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğu gösterilmiş olur.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'yi hesaplamak için değişik bir yöntem olarak, $A_x = 2$, $A_y = 3$, $A_z = 0$, $B_x = -1$, $B_y = 2$ ve $B_z = 0$ bileşen değerlerini kullanabiliriz. Bu, da

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + [(2)(2) - (3)(-1)]\mathbf{k} = 7\mathbf{k}$$

sonucunu verir.

Alıştırma $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörleri arasındaki açıyı bulmak için, bu örnekte elde edilmiş olan sonucu kullanınız.

Cevap 60, 3°

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ