Bölüm 8

İş ve Kinetik Enerji

Ders kaynakları:

1. YOUNG ve FREEDMAN, 12 Baskı, Türkçesi

2. Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar)

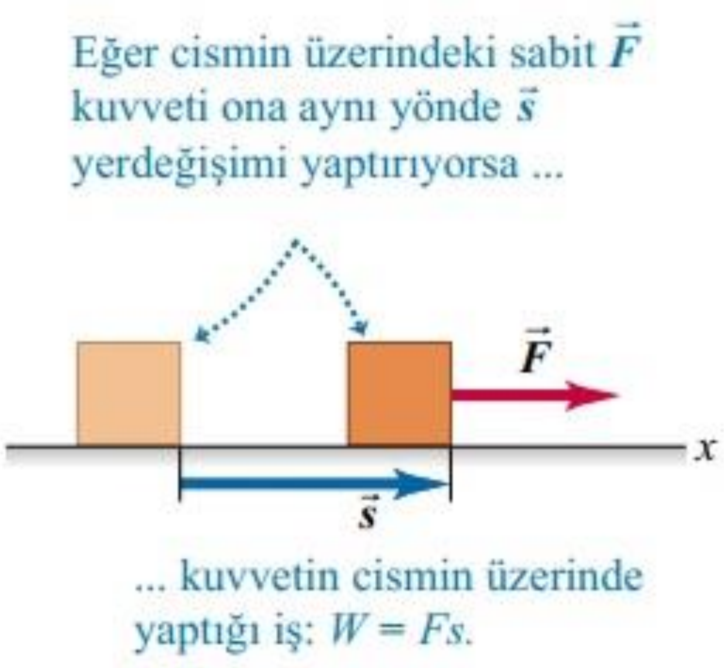
Öğrenim Konuları

- Bir kuvvetin bir cisim üzerine iş yapması ne demektir ve yapılan iş nasıl hesaplanır.
- Hareketin enerjisi olan kinetik enerji tanımı ve fiziksel olarak anlamı nedir.
- Bir cisim üzerine yapılan toplam iş bu cismin kinetik enerjisini nasıl değiştirir ve bu ilkeden hareketle mekanik problemleri nasıl çözülür.
- Yapılan toplam iş ile kinetik enerjideki değişiklik arasındaki bağıntı kuvvetlerin sabit olmadığı ve/veya cismin eğri bir yol izlediği veya her iki durumda nasıl kullanılır.
- İşin yapılma hızı olan gücün yer aldığı problemler nasıl çözülür.

8.1 İş

Sabit kuvvetin bir cisme ***s*** yerdeğiştirmesi ile cisim üzerine ***iş*** yapmış olur;

$$W = Fs$$

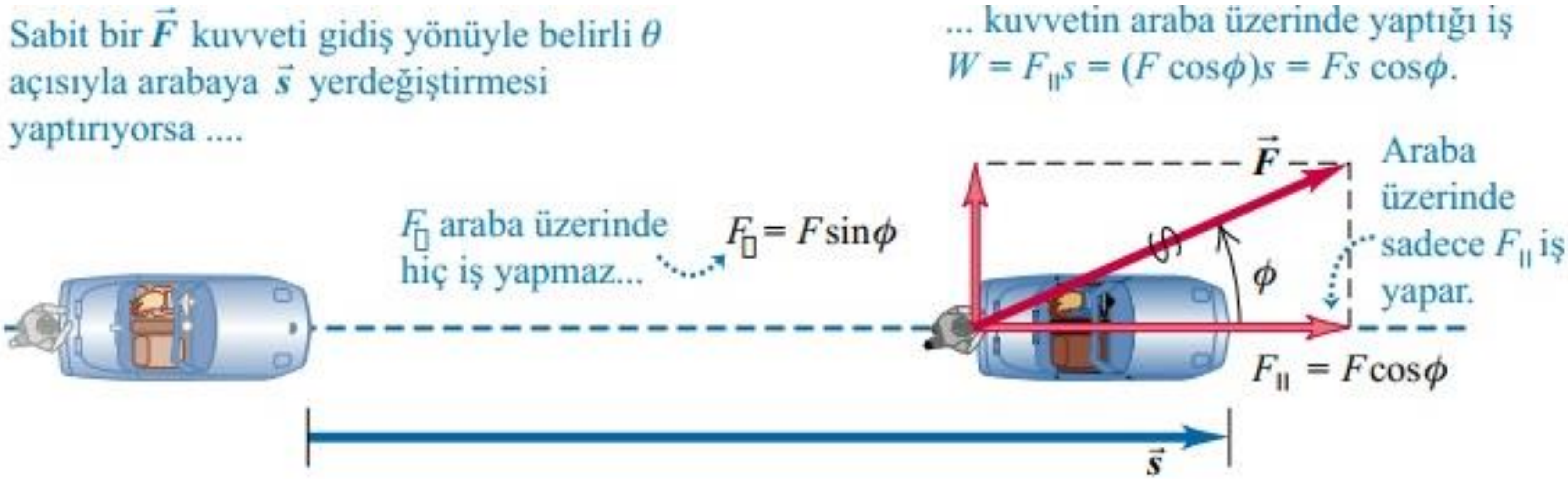


W]=[M][L]^2 [T^{-2}]

W=(kgm/s^2).m=kgm^2/s^2=JOULE (J) (SI-MKS birim sistemi)

W=gcm^2/s^2=erg (CGS birim sistemi)

8.1 İş



$$W = (F\cos\phi)\,s \quad \text{(sabit kuvvet, düzgün doğrusal yerdeğiştirme)} \qquad (6.2)$$

Bu yerdeğiştirme sırasında F ve ϕ'nin sabit olduğunu varsayıyoruz. Eğer $\phi = 0$ ise $\vec{F}$ ile $\vec{s}$ aynı yöndedir, $\cos\phi = 1$ olur

Denklem (6.2)'nin iki vektörün *skalar çarpımı* biçiminde olduğunu Kısım 1.10'da görmüştük, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$. Bu tanıma tekrar bakmalısınız Bu yüzden Denklem (6.2)'yi daha kısa olarak şöyle yazabiliriz:

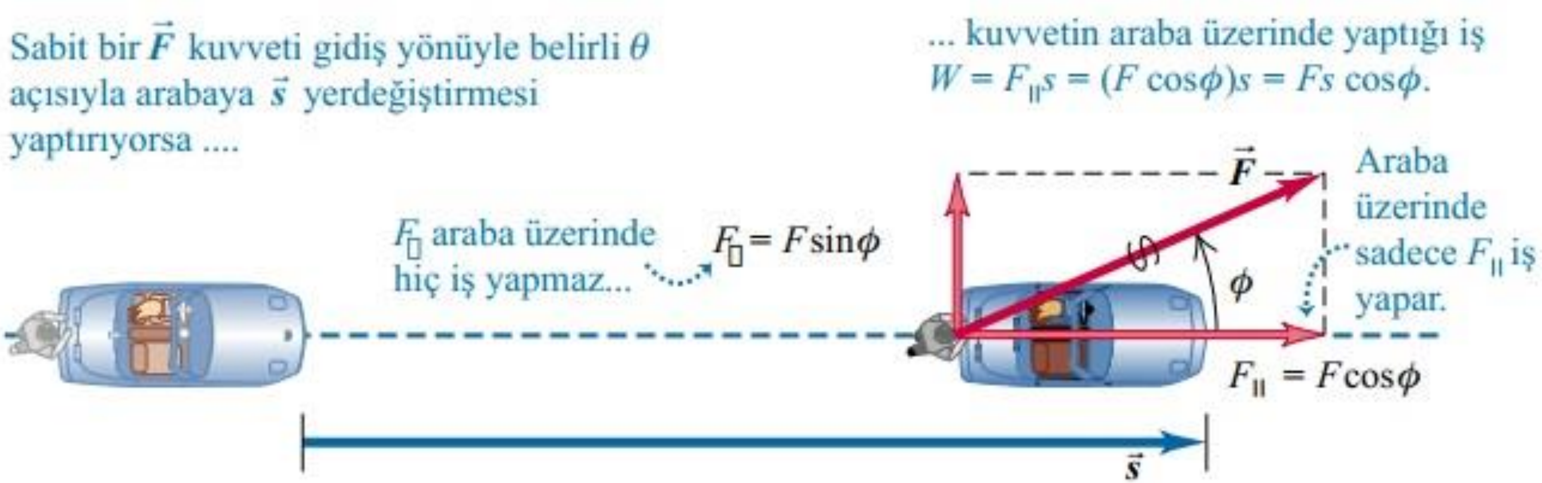
$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} \quad \text{(sabit kuvvet, düzgün doğrusal yerdeğiştirme)} \qquad (6.3)$$

8.1 İş

Örnek: Sabit bir kuvvetin yaptığı iş

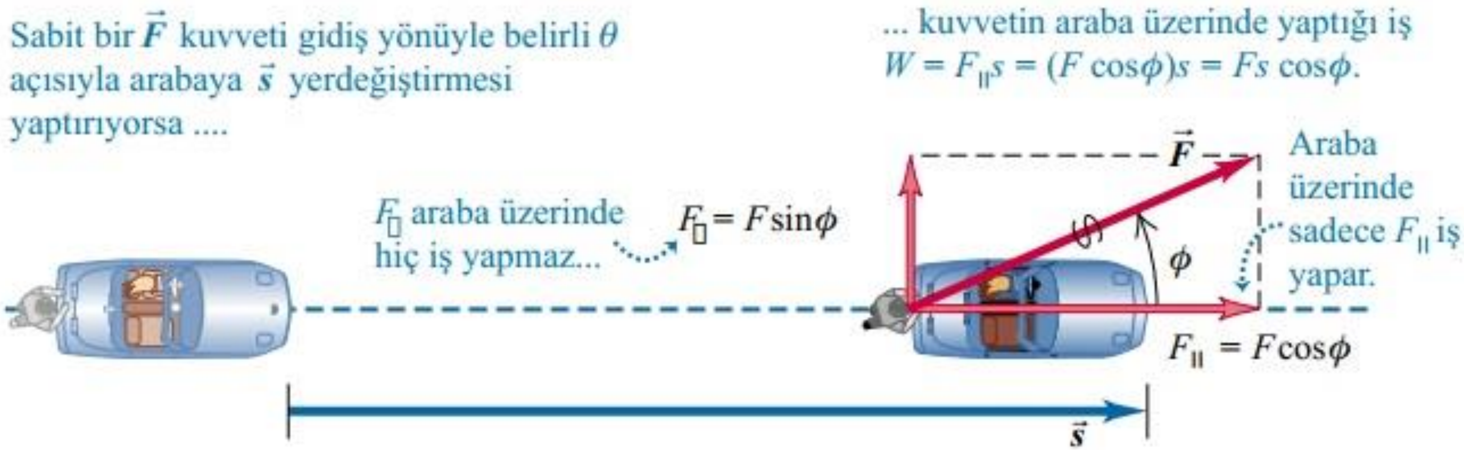
(a) Steve 210 N'luk (yaklaşık 47 lb) bir kuvvetle Şekil 6.3'teki bozulmuş arabayı 18 m itmektedir. Arabanın ayrıca bir tekerleği de patlamıştır. Bundan dolayı Steve araba düz gidebilsin diye hareket yönüne 30°'lik bir açıyla itmek zorundadır. Steve'in yaptığı işi bulunuz. (b) Birilerine yardımcı olmak isteyen Steve ikinci bir arabayı da $\vec{F} = (160\ \text{N})\hat{\imath} - (40\ \text{N})\hat{\jmath}$ kuvvetiyle $\vec{s} = (14\ \text{m})\hat{\imath} + (11\ \text{m})\hat{\jmath}$ yerdeğiştirmesi verecek biçimde itmektedir. Steve her bir durumda ne kadar iş yapar?

6.3 Sabit bir kuvvetin yerdeğiştirmeyle belirli bir açıda yaptığı iş.



8.1 İş

6.3 Sabit bir kuvvetin yerdeğiştirmeyle belirli bir açıda yaptığı iş.



İŞLEM: (a) Denklem (6.2) kullanarak;

$$W = Fs\cos\phi = (210\ \text{N})\,(18\ \text{m})\cos 30^{\circ} = 3.3\times 10^{3}\ \text{J}$$

(b) $\vec{F}$'in bileşenleri $F_x = 160$ N ve $F_y = -40$ N ve $\vec{s}$'in bileşenleri $x = 14$ m ve $y = 11$ m'dir. (İki vektörün de z-bileşeni yoktur.) Denklem (1.21) ve (6.3) kullanılarak;

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}\cdot\vec{s} = F_x x + F_y y \\ &= (160\ \text{N})\,(14\ \text{m}) + (-40\ \text{N})\,(11\ \text{m}) \\ &= 1.8\times 10^{3}\ \text{J} \end{aligned}$$

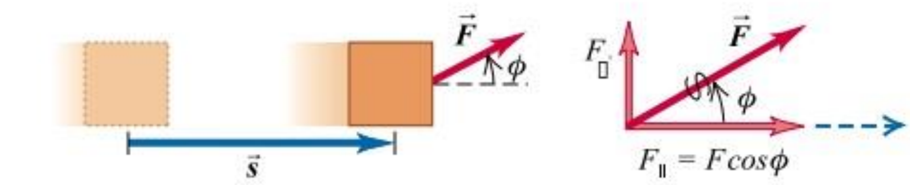
DEĞERLENDİRME: İki durumda da Steve 1 000 J'den fazla bir iş yapmıştır. Demek ki 1 J iş oldukça küçük bir emeği gerektiriyor.

8.1 İş

* İş pozitif, negatif veya sıfır olabilir;

6.4 Sabit bir $\vec{F}$ kuvveti, $\vec{s}$ yerdeğiştirmesi ile $\vec{F}$ arasındaki açıya bağlı olarak pozitif, negatif veya sıfır iş yapabilir.

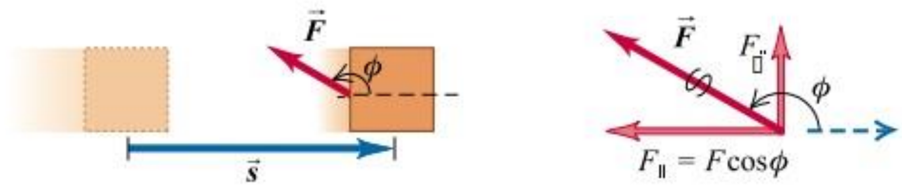
(a)



Kuvvetin yerdeğiştirmenin yönüyle aynı yönde bir bileşeni var:

- Cisim üzerinde yapılan iş pozitiftir.
- $W = F_{\parallel} s = (F\cos\phi)s$

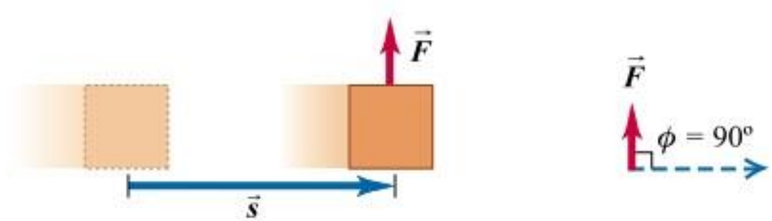
(b)



Kuvvetin yerdeğiştirmenin yönüyle zıt yönde bir bileşeni var:

- Cisim üzerinde yapılan iş negatiftir.
- $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$
- Matematik ifade olarak $W < 0$ çünkü $90^{\circ} < \phi < 270^{\circ}$ için $F\cos\phi$ eksi değer alır.

(c)



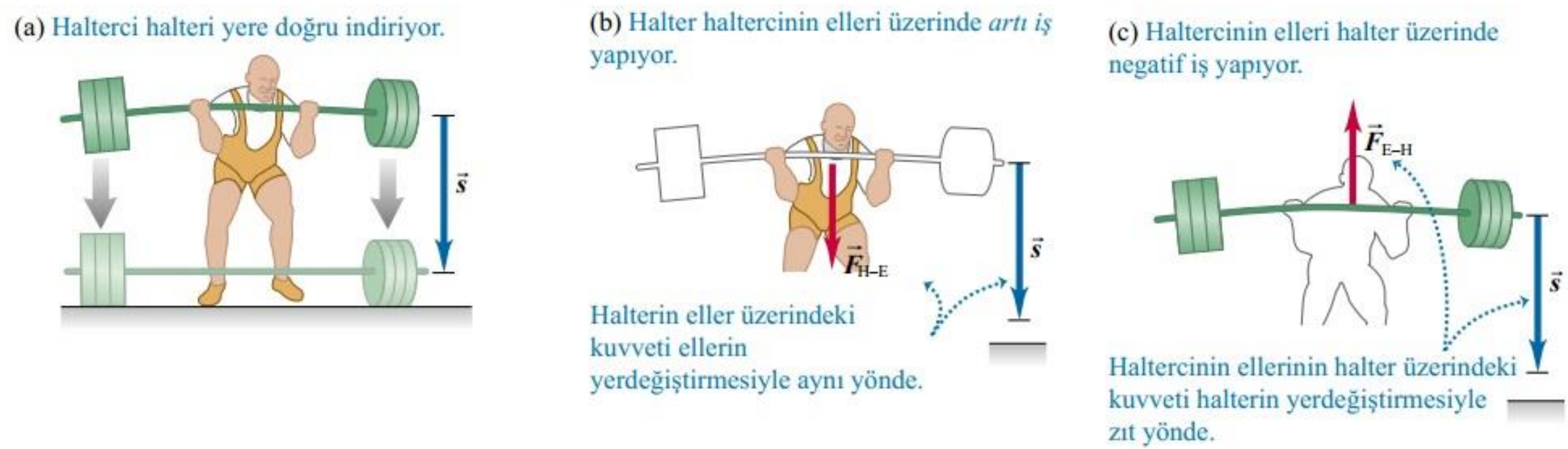
Kuvvet yer değiştirmenin yönüne diktir:

- Kuvvet cisim üzerinde *hiç* bir iş yapmaz.
- Daha genel olarak, bir cisme etkiyen kuvvetin cismin yerdeğiştirmesine dik olan bir $F_{\perp}$ bileşeni varsa bu bileşen cisim üzerinde hiç bir iş yapmaz.

8.1 İş

6.5 Bir halterci halteri sabit bir noktada tuttuğunda halter üzerinde hiç bir iş yapmaz.

6.6 Haltercinin elleri halter üzerinde negatif iş yaparken halter onun elleri üzerinde pozitif iş yapıyor.



* İş skaler bir nicelik olduğundan, cisim üzerine yapılan ***toplam iş,*** cisme uygulanan kuvvetlerin yaptıkları işerin cebirsel toplamıdır.

8.1 İş

Örnek: Çeşitli kuvvetlerin yaptığı iş

Bir çiftçi içinde odun olan bir kızağı traktörüne bağlıyor ve düz yerde 20 m gidiyor (Şekil. 6.7a). Traktör ile kızağın toplam ağırlığı 14 700 N'dır. Traktör Şekil 6.7b'de görüldüğü gibi yerden 36.9º derecelik bir açıda 5 000 N'luk sabit bir kuvvet uyguluyor. Kızağın hareketine karşı 3 500 N'lık bir sürtünme kuvveti vardır. Kızak üzerindeki her kuvvetin yaptığı işi ve tüm kuvvetlerin yaptığı işi bulunuz.

İŞLEM: Ağırlığın yaptığı iş W_w sıfırdır. Bunun nedeni bu kuvvetin yönünün yerdeğiştirmeye normal olmasıdır (Şekil 6.4c ile karşılaştırınız). Aynı nedenle normal kuvvetin yaptığı W_n işi de sıfırdır. Demek ki $W_w = W_n = 0$. (Buradaki yerin uyguladığı normal kuvvetin ağırlıktan daha az olduğunu görebiliyor musunuz? Çok benzer bir serbest cisim diyagramı olan Kısım 5.3'teki Örnek 5.15 ile karşılaştırınız.)

Sonunda elimizde traktörün uyguladığı F_T ile sürtünme kuvveti f kalır. Denklem (6.2)'den traktörün yaptığı iş W_T;

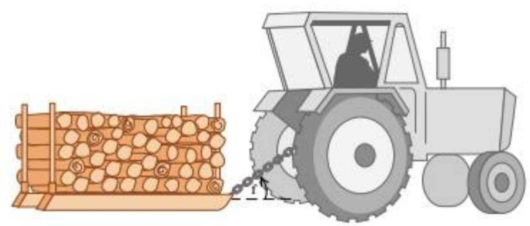
$$W_T = F_T s \cos\phi = (5000\ \text{N})\ (20\ \text{m})\ (0.800) = 80\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$= 80\ \text{kJ}$$

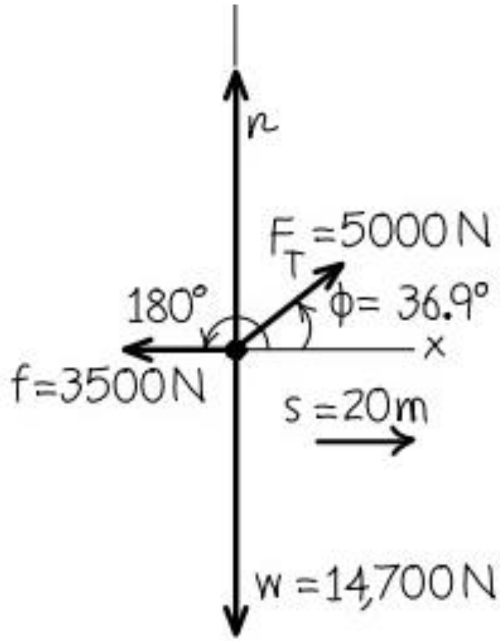
ile verilir. Sürtünme kuvveti $\vec{f}$ yerdeğiştirmeye zıt yöndedir. Dolayısıyla bu kuvvet için $\phi = 180º$ ve $\cos\phi = -1$. Sürtünmenin yaptığı iş W_f;

$$W_f = fs \cos 180º = (3500\ \text{N})\ (20\ \text{m})\ (-1) = -70\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$= -70\ \text{kJ}$$

6.7 Bir traktörün çektiği odunla yüklü kızak üzerinde yapılan işi hesaplamak.

(a)





Kızak üzerinde yapılan toplam iş W_{top} her kuvvetin yaptığı işlerin *cebirsel* toplamıdır.

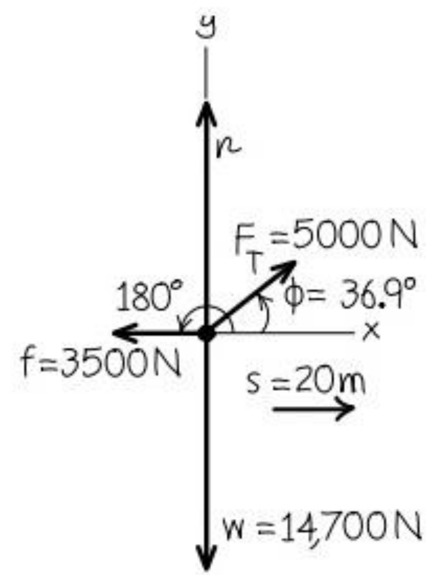
$$W_{top} = W_w + W_n + W_T + W_f = 0 + 0 + 80\ \text{kJ} + (-70\ \text{kJ})$$
$$= 10\ \text{kJ}$$

8.1 İş

Örnek: Çeşitli kuvvetlerin yaptığı iş

Bir çiftçi içinde odun olan bir kızağı traktörüne bağlıyor ve düz yerde 20 m gidiyor (Şekil. 6.7a). Traktör ile kızağın toplam ağırlığı 14 700 N'dır. Traktör Şekil 6.7b'de görüldüğü gibi yerden 36.9º derecelik bir açıda 5 000 N'luk sabit bir kuvvet uyguluyor. Kızağın hareketine karşı 3 500 N'lık bir sürtünme kuvveti vardır. Kızak üzerindeki her kuvvetin yaptığı işi ve tüm kuvvetlerin yaptığı işi bulunuz.

(b) Kızağın serbest cisim diyagramı



Kullanılabilecek diğer yolda ise önce tüm kuvvetlerin *vektörel toplamı*, yani net kuvveti buluruz. Sonradan bu kuvvet toplam işi hesaplamada kullanılır. Vektörel toplam en iyi bileşenler hesaplanarak bulunur. Şekil 6.7b'den;

$$\sum F_x = F_T \cos\phi + (-f) = (5\,000 \text{ N}) \cos 36.9^\circ - 3\,500 \text{ N}$$
$$= 500 \text{ N}$$
$$\sum F_y = F_T \sin\phi + n + (-w)$$
$$= (5\,000 \text{ N}) \sin 36.9^\circ + n - 14\,700 \text{ N}$$

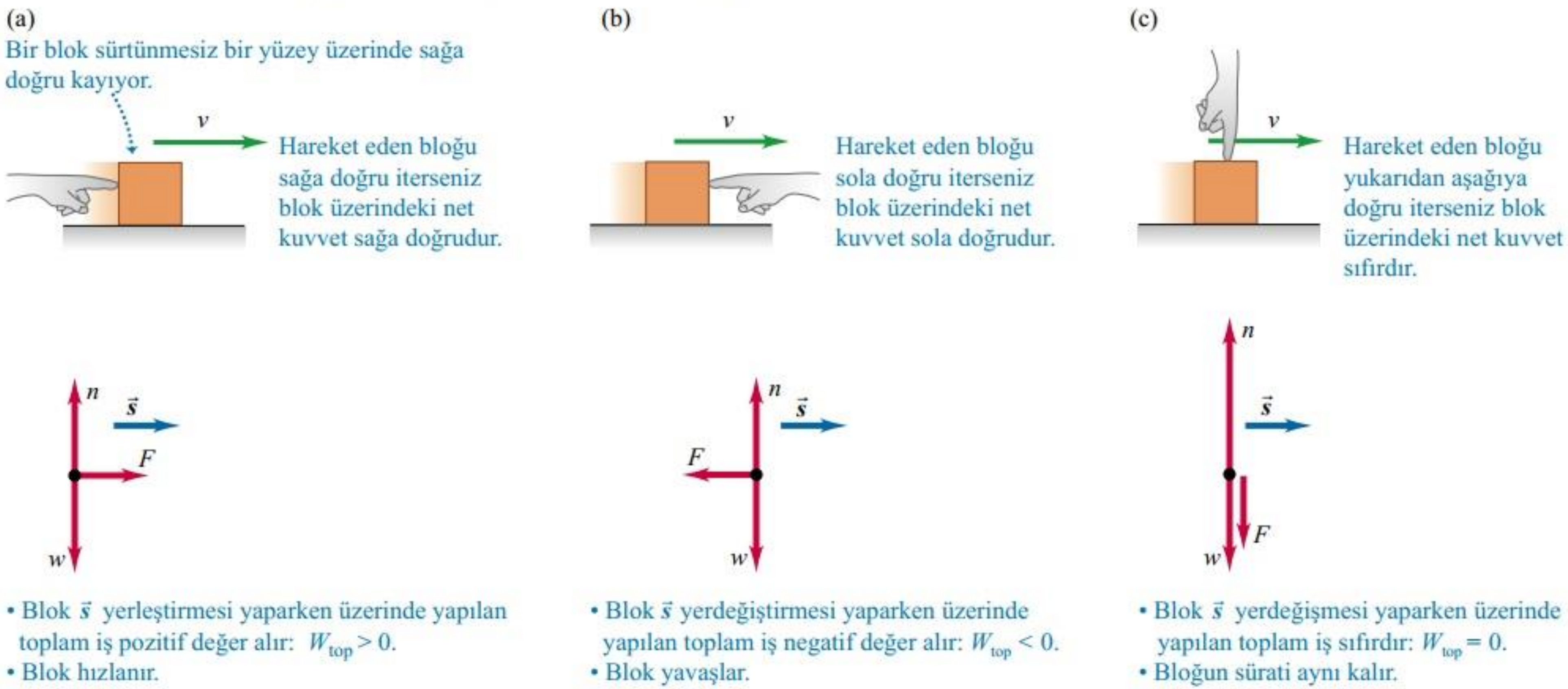
Aslında ikinci denkleme gereksinme yoktur. Kuvvetin y-bileşeni yerdeğiştirmeye diktir. Bu nedenle de iş yapmaz. Aynı zamanda ivmenin y-bileşeni de yoktur. Demek ki $\sum F_y$ sıfır olmalıdır. O halde toplam iş, x-bileşeninin toplamının yaptığı iştir.

$$W_{top} = \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \vec{s} = \left(\sum F_x\right) s = (500 \text{ N})(20 \text{ m}) = 10\,000 \text{ J}$$
$$= 10 \text{ kJ}$$

8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

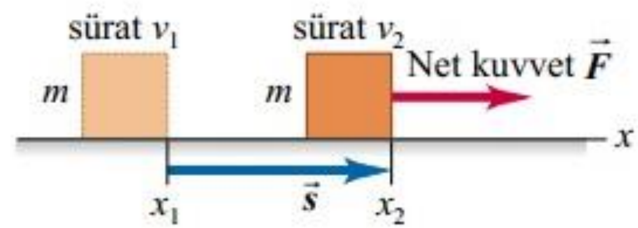
Dış kuvvetlerin bir cisim üzerinde yaptığı toplam iş cismin yerdeğiştirmesiyle, diğer bir deyişle konumundaki değişikliklerle bağlantılıdır. Toplam iş aynı zamanda cismin süratindeki değişikliklerle de bağlantılıdır. Bu bağlantıyı görmek için Şekil 6.8'e, sürtünmesiz bir masa üzerinde kaymakta olan bir blok üzerine verilen üç örneğe bakalım. Blok üzerindeki kuvvetler kendi ağırlığı $\vec{w}$, normal kuvvet $\vec{n}$ ve elin uyguladığı kuvvet olan $\vec{F}$'dir.

6.8 Bir cismin üzerinde yapılan toplam iş ve cismin hızının değişimi.



8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

6.9 Sabit bir net $\vec{F}$ kuvveti hareket eden bir cisim üzerinde iş yapmaktadır.



Şekildeki cisim için zamandan bağımsız hız denklemini yazarsak;

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x s$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

elde edilir. Bu denklemi m ile çarpıp ma_x'i net kuvvet F'e eşitlersek,

$$F = ma_x = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \quad \text{ve}$$

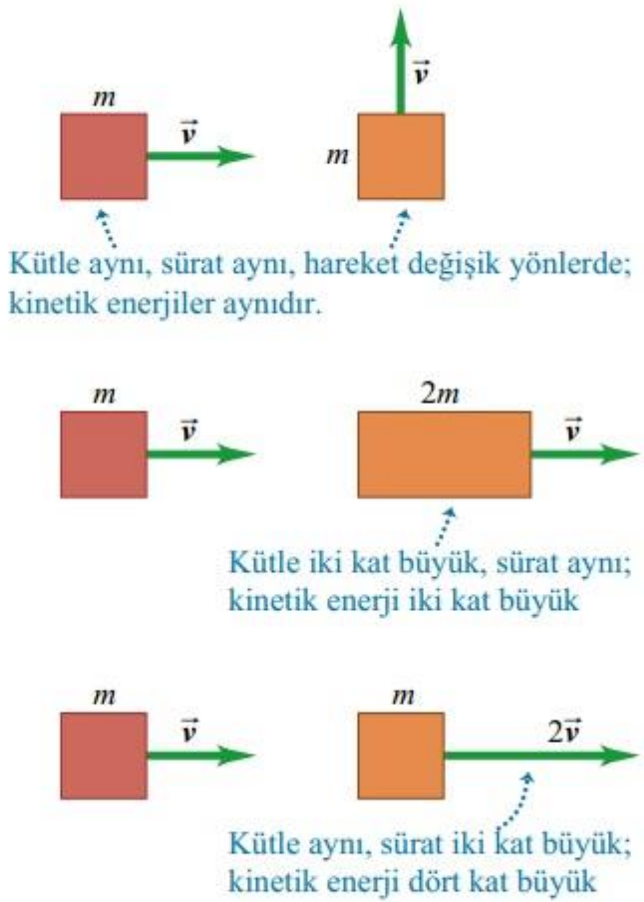
$$Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (6.4)$$

bulunur. Fs çarpımı net F kuvvetinin yaptığı iştir ve bu nedenle parçacık üzerindeki tüm kuvvetlerin yaptığı toplam iş olan W_{top}'a eşittir. Nicelik $\frac{1}{2}mv^2$'ye parçacığın **kinetik enerjisi** deriz.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetik enerjinin tanımı)} \qquad (6.5)$$

8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

6.10 Farklı cisimlerin $K = \frac{1}{2} mv^2$ kinetik enerjilerinin karşılaştırılması.



Bir parçacık üzerinde net kuvvetin yaptığı iş parçacığın kinetik enerjisindeki değişikliğe eşittir.

$$W_{top} = K_2 - K_1 = \Delta K \qquad \text{(iş-enerji teoremi)} \qquad (6.6)$$

Bu sonuç **iş-enerji teoremidir.**

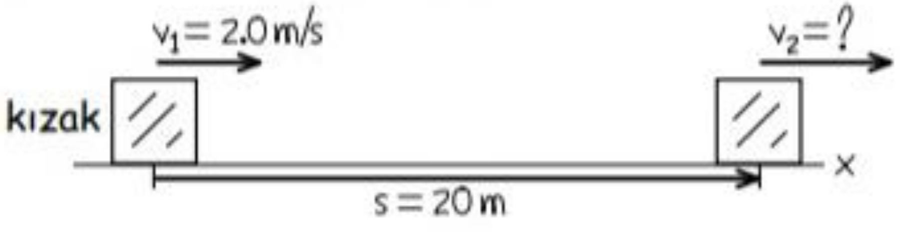
- *Wtop* pozitif ise, cismin *sürati* artmış,
- *Wtop* negatif ise, cismin *sürati* azalmış,
- *Wtop* sıfır ise, cismin *sürati* sabit kalmıştır.

8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

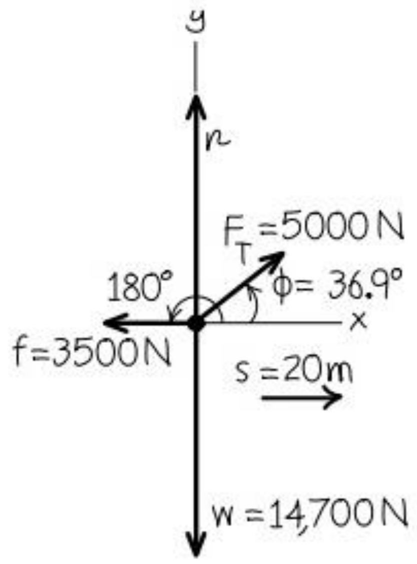
Örnek: İş ve enerji kullanarak hızın hesaplanması

Şekil 6.7'deki kızağa ve Örnek 6.2'nin sonundaki sayılara tekrar bakalım. İlk sürat v_1 değeri 2.0 m/s olsun. Kızak 20 m gittikten sonra kızağın sürati ne olur?

6.11 Bu problem için yaptığımız çizim.



(b) Kızağın serbest cisim diyagramı



İŞLEM: Örnek 6.2'de tüm kuvvetlerin yaptığı toplam işi hesapladık: $W_{top} = 10$ kJ. Demek ki kızağın ve yükünün kinetik enerjisi 10 kJ artmalıdır.

İlk ve son kinetik enerjiler için gerekli ifadeleri yazmak için kızak ve yükün kütlesini bulmalıyız. Ağırlığın 14 700 N olduğu verilmiştir, demek ki kütle için

$$m = \frac{w}{g} = \frac{14\,700\text{ N}}{9.8\text{ m/s}^2} = 1\,500\text{ kg}$$

bulunur. O zaman ilk kinetik enerji K_1

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1\,500\text{ kg})(2.0\text{ m/s})^2 = 3\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$
$$= 3\,000\text{ J}$$

ile verilir. Son kinetik enerji K_2 ise

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(1\,500\text{ kg})v_2^2$$

olur. Eşitlikteki v_2 bulmak istediğimiz bilinmeyen sürattir. Denklem (6.6) bize

$$K_2 = K_1 + W_{top} = 3\,000\text{ J} + 10\,000\text{ J} = 13\,000\text{ J}$$

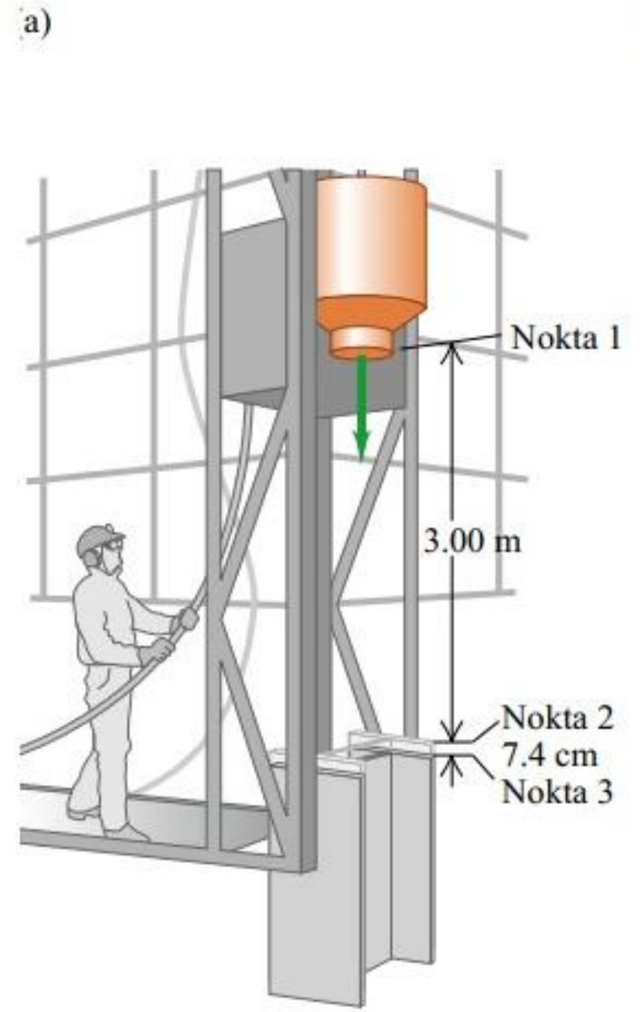
ifadesini verir. K_2 için olan iki ifadeyi birbirlerine eşitler ve 1 J = 1 kg · m²/s² eşitliğini kullanırsak v_2 çözülebilir. Sonuçta bulduğumuz değer;

$$v_2 = 4.2\text{ m/s}$$

8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

Örnek: **Balyoz üzerindeki kuvvetler**

Bir şahmerdanda, 200 kg kütleli çelik bir balyoz yere çakılan I şeklindeki demir bir kazığa vurmak için 3.00 m yukarıya kaldırılmıştır (Şekil 6.12a). Balyoz bu noktadan aşağıya bırakılmış ve kazığın toprağa 7.4 cm daha girmesi sağlanmıştır. Balyozu tutan dik raylar balyoza 60 N'luk sabit bir sürtünme kuvveti uygulamaktadır. İş-enerji teoremini kullanarak (a) balyozun kazığa vurmadan önceki süratini, (b) balyozun kazık üzerine uyguladığı ortalama kuvveti bulunuz. Havanın etkisini ihmal ediniz.



8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

Örnek: **Balyoz üzerindeki kuvvetler**

Bir şahmerdanda, 200 kg kütleli çelik bir balyoz yere çakılan I şeklindeki demir bir kazığa vurmak için 3.00 m yukarıya kaldırılmıştır (Şekil 6.12a). Balyoz bu noktadan aşağıya bırakılmış ve kazığın toprağa 7.4 cm daha girmesi sağlanmıştır. Balyozu tutan dik raylar balyoza 60 N'luk sabit bir sürtünme kuvveti uygulamaktadır. İş-enerji teoremini kullanarak (a) balyozun kazığa vurmadan önceki süratini, (b) balyozun kazık üzerine uyguladığı ortalama kuvveti bulunuz. Havanın etkisini ihmal ediniz.

İŞLEM: (a) Nokta 1'den nokta 2'ye dik kuvvetler, aşağı doğru ağırlık $w = mg = (200\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 1\ 960\text{ N}$ ve yukarı doğru sürtünme kuvveti $f = 60\text{ N}$ ile verilmektedir. Aşağıya doğru net kuvvetin $w - f = 1\ 900\text{ N}$ olduğu bulunur. Balyozun nokta 1'den nokta 2'ye yerdeğiştirmesi aşağıya doğrudur ve $s_{1\text{–}2} = 3.00$ m'ye eşittir. O halde, balyozun nokta 1'den nokta 2'ye giderken yaptığı toplam işi bulalım;

$$W_{top} = (w - f)s_{1\text{–}2} = (1\ 900\text{ N})(3.00\text{ m}) = 5\ 700\text{ J}$$

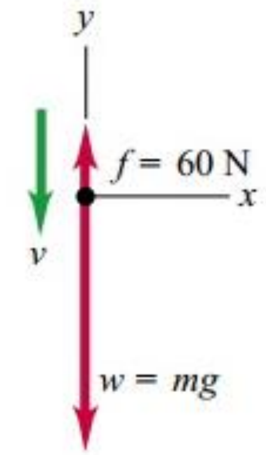
Nokta 1'de balyoz durmaktadır; yani ilk kinetik enerjisi K_1 sıfıra eşittir. Demek ki nokta 2'deki kinetik enerji K_2 balyozun nokta 1 ve 2 arasında yaptığı toplam işe eşittir.

$$W_{top} = K_2 - K_1 = K_2 - 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$$

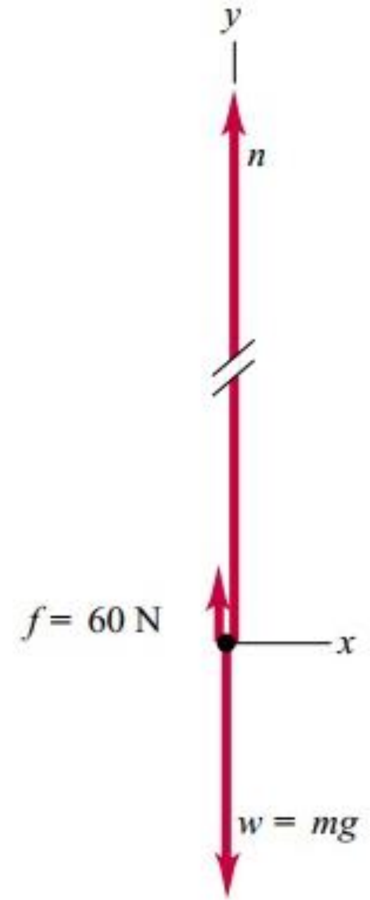
$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_{top}}{m}} = \sqrt{\frac{2(5\ 700\text{ J})}{200\text{ kg}}} = 7.55\text{ m/s}$$

Bulunan bu değer balyozun nokta 2'de kazığa vurduğu andaki süratini verir.

(b) Düşen balyoz için serbest-cisim şeması



(c) Kazığı iten balyoz için serbest-cisim diyagramı

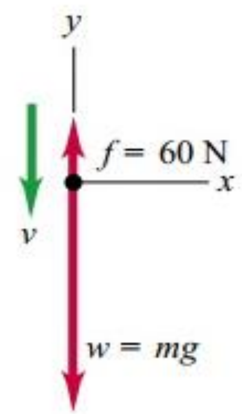


8.2 Kinetik Enerji ve İş-Enerji Teoremi

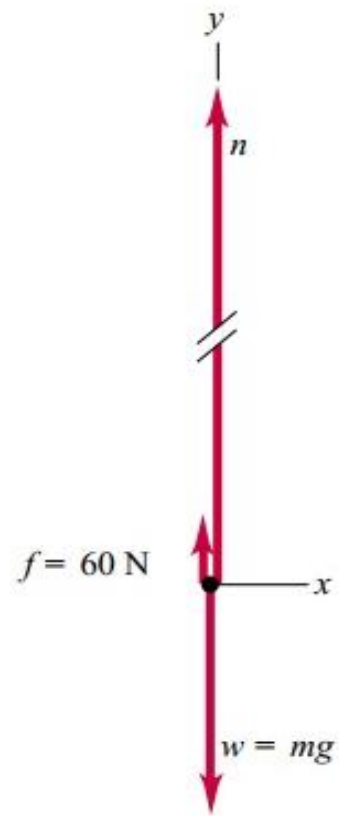
Örnek: **Balyoz üzerindeki kuvvetler**

Bir şahmerdanda, 200 kg kütleli çelik bir balyoz yere çakılan I şeklindeki demir bir kazığa vurmak için 3.00 m yukarıya kaldırılmıştır (Şekil 6.12a). Balyoz bu noktadan aşağıya bırakılmış ve kazığın toprağa 7.4 cm daha girmesi sağlanmıştır. Balyozu tutan dik raylar balyoza 60 N'luk sabit bir sürtünme kuvveti uygulamaktadır. İş-enerji teoremini kullanarak (a) balyozun kazığa vurmadan önceki süratini, (b) balyozun kazık üzerine uyguladığı ortalama kuvveti bulunuz. Havanın etkisini ihmal ediniz.

(b) Düşen balyoz için serbest-cisim şeması



(c) Kazığı iten balyoz için serbest-cisim diyagramı



(b) Balyoz nokta 2 ve 3 arasında giderken üzerindeki net aşağıya doğru kuvvet $w - f - n$'dir (Bkz. Şekil 6.12c). Bu yerdeğiştirmede balyoz üzerinde yapılan toplam iş

$$W_{top} = (w - f - n)s_{2-3}$$

olarak verilir. Hareketin bu bölümü için ilk kinetik enerji K_2'dir; (a) kısmında bunu 5 700 J olarak bulmuştuk. Balyoz son noktada durduğu için son kinetik enerji K_3 sıfıra eşittir. Problemin cevabı iş-enerji teoreminden

$$W_{top} = (w - f - n)s_{2-3} = K_3 - K_2$$

$$n = w - f - \frac{K_3 - K_2}{s_{2-3}}$$

$$= 1960\,\text{N} - 60\,\text{N} - \frac{0\,\text{J} - 5\,700\,\text{J}}{0.074\,\text{m}}$$

$$= 79\,000\,\text{N}$$

olarak bulunur. Balyozun kazığa uyguladığı aşağıya doğru olan kuvvetin büyüklüğü ile dik olarak uygulanan n kuvvetinin büyüklüğü aynıdır; 79 000 N (yaklaşık 9 ton), yani balyozun ağırlığının 40 katından fazla.

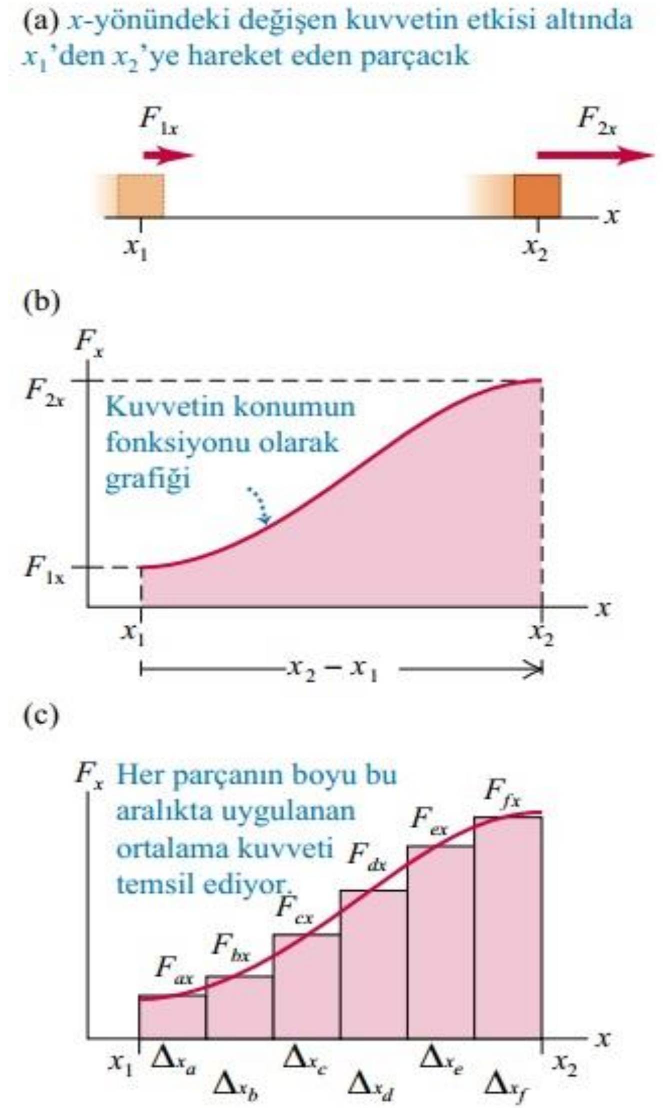
8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Daha önce düzgün doğrusal bir sabit bir F kuvvetinin yaptığı işi (Şekil a) tanımlandı. Fakat bazı durumlarda cisme uygulanan kuvvet sabit değil, değişken olabilir (Şekil b).

Bu durumlarda işi tanımlamak için *F*-*x* grafiğini Şekil c deki gibi küçük yerdeğiştirmelere karşı kuvvet değişimleri olarak ayırıp toplam iş ifadesini yazmaya çalışalım;

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \ldots$$

6.16 Bir parçacık x_1'den x_2'ye giderken x-yönündeki değişen F_x kuvvetinin yaptığı işin hesaplanması.



8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

. Küçük aralıkların sayısını çok daha fazla artırdığımızda her birinin eni daralır ve yukarıdaki toplam sınırda F_x'in x_1'den x_2'ye integrali olur.

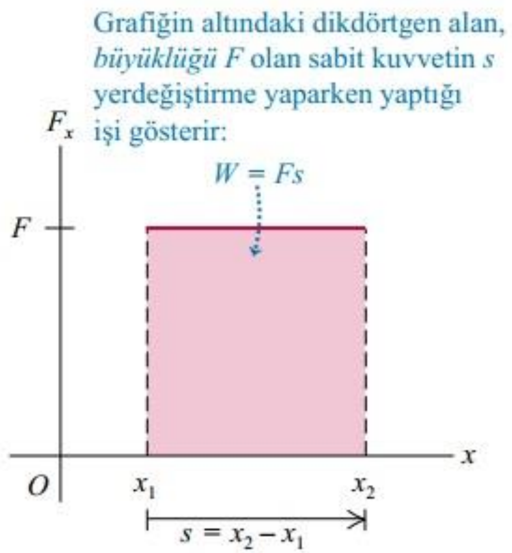
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx \qquad \text{(kuvvetin } x\text{-bileşeninin değişmesi, düzgün doğrusal yerdeğiştirme)} \qquad (6.7)$$

Özel bir durum olarak, kuvvetin x-bileşeni olan F_x sabit alınırsa Denklem (6.7)'de bu terim integralin dışına çıkartılabilir:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1) \qquad \text{(sabit kuvvet)}$$

Ancak, parçacığın toplam yerdeğiştirmesinin $x_2 - x_1 = s$ olduğunu biliyoruz. Demek ki, sabit F kuvveti kullanıldığında Denklem (6.7) $W = Fs$ ifadesine dönüşür bu da Denklem (6.1) ile uyumludur. İşin, x'in fonksiyonu olan F_x eğrisinin altındaki alan olduğu tespiti sabit kuvvetler için de geçerlidir. $W = Fs$ ifadesi yüksekliği F, genişliği s olan dikdörtgenin alanıdır (Şekil 6.17).

6.17 Parçacık x_1'den x_2'ye giderken x-yönündeki sabit F kuvvetinin yaptığı iş.



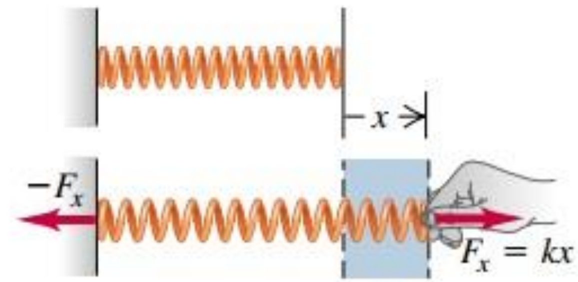
8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Şimdi bu sonuçları gerilmiş bir yaya uygulayalım. Yayı gevşek durumundan x kadar germek için iki ucuna da eşit büyüklükte kuvvet uygulamamız gerekir (Şekil 6.18). Eğer x' gerilmesi çok büyük değilse, sağ tarafa uyguladığımız kuvvetin x-bileşeni x ile doğru orantılıdır.

$$F_x = kx \qquad \text{(yayı germek için gerekli kuvvet)} \tag{6.8}$$

Burada k yayın **kuvvet sabiti** (veya yay sabiti) denilen sabittir. k'nın birimleri

6.18 Bir ideal yayı germek için gereken kuvvet yayın gerilmesiyle orantılıdır: $F_x = kx$.



Bir yayı germek için iş yapmamız gerekir, yani yayın iki ucuna eşit ve zıt kuvvetler uygular, yavaş yavaş bu kuvvetleri arttırırız. Yayın sol ucunu sabit tutarılım, bu uca uyguladığımız kuvvet iş yapmaz. İşi yapan kuvvet hareket eden sağ uçtadır. Şekil 6.19'da F_x'in yayın açılması olan x'in fonksiyonu olarak çizilmiş grafiği görülüyor. Gerilme sıfırdan maksimum bir X değerine giderken bu kuvvetin yaptığı iş

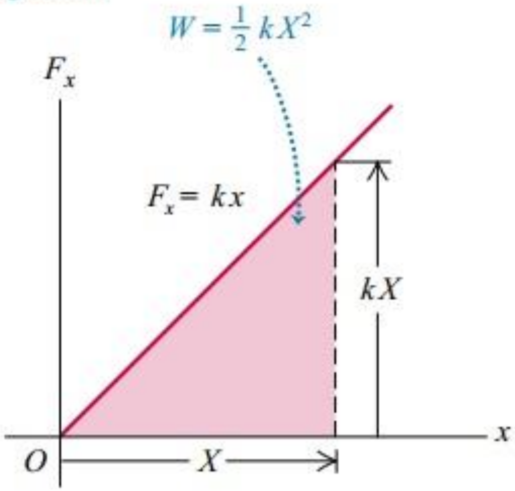
$$W = \int_0^X F_x\,dx = \int_0^X kx\,dx = \frac{1}{2}kX^2 \tag{6.9}$$

ile verilir. Bu sonucu grafik olarak da elde edebiliriz. Şekil 6.19'da gösterilen renkli üçgenin alanı kuvvetin yaptığı toplam işi gösteriyor; üçgenin alanı tabanın yarısı ile yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

$$W = \frac{1}{2}(X)(kX) = \frac{1}{2}kX^2$$

6.19 Bir yayı X uzunluğuna germek için yapılan işin hesaplanması.

Grafiğin altındaki alan, $x = 0$'dan azami bir X değerine gerildiğinde yay üzerinde yapılan işi gösterir.



8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

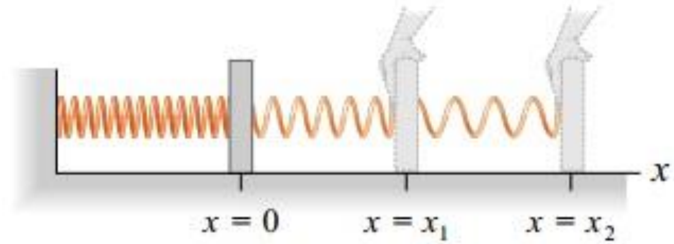
Denklem (6.9) yayın başlangıçta hiç gerilmediğini varsaymaktadır. Yay başlangıçta zaten x_1 mesafesinde gerilmişse, x_2 mesafesine dek germek için yapacağımız iş (Şekil 6.20a)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (6.10)$$

ile verilir. Geometri bilginizi kullanarak Şekil 6.20b'de grafiğin altındaki trapezoidin (ikizkenar yamuk) alanının Denklem (6.10) ile verildiğini kendiniz bulabilirsiniz.

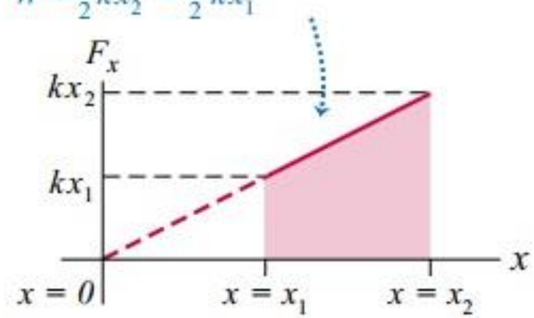
6.20 Bir yayı bir gerilme noktasından daha büyük bir gerilmeye götürmek için yapılan işin hesaplanması.

(a) Bir yayı x_1 gerilmesinden x_2 gerilmesine götürme



(b) Kuvvete karşı mesafe grafiği

Grafiğin altındaki trapezoid (ikizkenar yamuk) biçimindeki alan yayın $x = x_1$'den $x = x_2$'ye götürüldüğünde yapılan işi veriyor. $W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$



8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

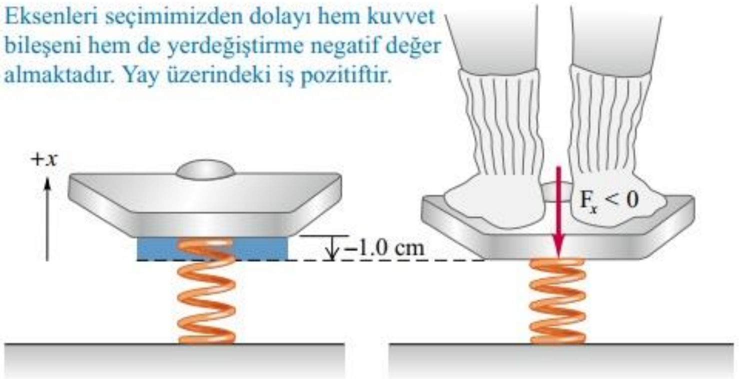
Örnek: **Yaylı terazi üzerine yapılan iş**

600 N ağırlığındaki bir kadın katı bir yayı olan banyo terazisinin üstüne çıkıyor (Şekil 6.21). Denge durumunda yay kadının ağırlığından dolayı 1 cm sıkışmıştır. Yayın kuvvet sabitini ve bu sıkıştırma sırasında yapılan işi bulunuz.

ÇÖZÜM

6.21 Bir banyo terazisindeki yayı sıkıştırmak.

Eksenleri seçimimizden dolayı hem kuvvet bileşeni hem de yerdeğiştirme negatif değer almaktadır. Yay üzerindeki iş pozitiftir.



İŞLEM: Yayın üst kısmı $x = -1.0$ cm $= -0.010$ m yerdeğiştirmiştir. Kadın yay üzerinde $F_x = -600$ N'luk bir kuvvet uygulamaktadır. Denklem (6.8)'den kuvvet sabiti

$$k = \frac{F_x}{x} = \frac{-600\,\text{N}}{-0.010\,\text{m}} = 6.0 \times 10^4\ \text{N/m}$$

olarak bulunur. Bundan so nra $x_1 = 0$ ve $x_2 = -0.010$ m'yi Denklem (6.10)'da kullandığımızda sonuç:

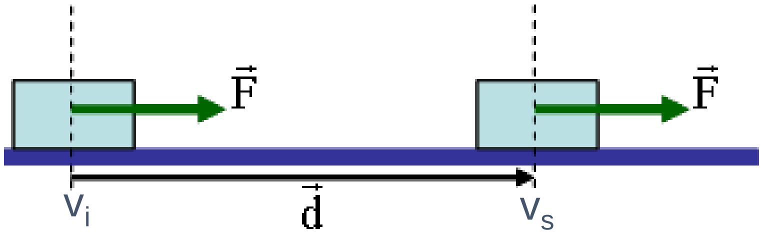
$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$
$$= \frac{1}{2}(6.0 \times 10^4\ \text{N/m})(-0.010\,\text{m})^2 - 0 = 3.0\,\text{J}$$

8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Kinetik enerji cismin hareketliliğinin bir ölçüsüdür ve

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

ifadesi ile verilir.



Sabit bir kuvvetin etkisinde olan m kütleli bir cismin hızı v_i den v_s olacak şekilde değişiyor ve bu hareketin yer değiştirmesi d olduğuna göre kuvvet tarafından yapılan işi bulalım.

Yer değiştirme vektörü ile kuvvet vektörü aynı yönde olduğu için

$$W = Fd\cos 0°$$

olarak yazılır. Kinetik enerjideki değişime bu kuvvet sebep olduğundan;

$$W = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W = \Delta K$$

İş Aynı Zamanda cismin kinetik enerjideki değişime karşılık gelmektedir.

Bu sonuç iş-(kinetik) enerji teoremidir.

8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Kinetik sürtünme kuvveti her zaman yer değşitirmenin tersi yönünde olduğu için iş negatiftir ve sistemden enerji alınır. Bu durumda sistemin kinetik enerjisinde sürtünme kuvveti tarafından yapılan iş kadar bir kayıp olacaktır.

Kinetik sürtünme tarafından yapılan iş $W = f_k d \cos 180° = -f_k d$

Kinetik enerji değişimi $\Delta K_{\text{sürt}} = -f_k d$

Buna göre bir cisme kinetik sürtünme kuvveti ile beraber diğer kuvvetler de etki ediyorsa iş ifadesi

$$\sum W_{\text{diger}} - f_k d = \Delta K$$

8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Örnek: Değişen kuvvetle hareket

Yatay bir hava rayına kütlesi 0.100 kg olan bir kayan parça bir yay ile bağlanmıştır; rayın kuvvet sabiti 20.0 N/m'dir (Şekil 6.22a). Başlangıçta yay gerilmemiştir ve kayan parça sağa doğru 1.50 m/s hızla gitmeye başlar. Bu cismin sağa doğru gideceği maksimum mesafe d'yi, (a) hava rayı çalıştırıldığı ve sürtünmenin olmadığı, (b) hava akımının kesildiği ve katsayısı $\mu k = 0.47$ olan bir kinetik sürtünme olduğu durum için bulunuz.

İŞLEM: (a) Kayan parça x_1'den $x_2 = d$'ye giderken yay üzerinde Denklem (6.10) ile verilmiş toplam işi yapmaktadır: $W = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}kd^2$. Yayın kayan parça üzerinde yaptığı iş ise bu değerin negatifidir, yani $-\frac{1}{2}kd^2$. Yay kayan parça durdurulduğu noktaya kadar gerilir ve böylece son kinetik enerji K_2 sıfıra eşit olur. İlk kinetik enerji $\frac{1}{2}mv^2$ ifadesiyle verilmektedir; kayan parçanın ilk sürati $v_1 = 1.50$ m/s'dir. İş-enerji teoremini kullanırsak

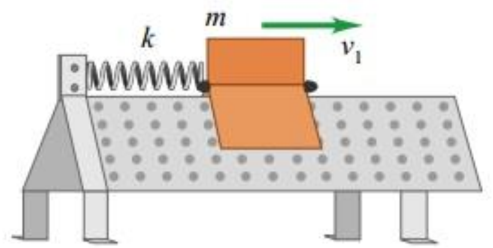
$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1{}^2$$

buluruz. Kayan parçanın gittiği mesafe d'yi bulmak için aşağıdaki işlemleri yaparız:

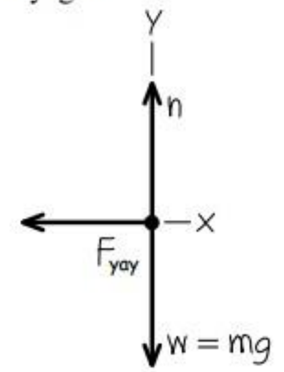
$$d = v_1\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.50\,\text{m/s})\sqrt{\frac{0.100\,\text{kg}}{20.0\,\text{N/m}}}$$
$$= 0.106\,\text{m} = 10.6\,\text{cm}$$

6.22 (a) Bir kayan parça bir hava rayına yayla bağlanmıştır. (b), (c) Serbest cisim diyagramlarımız.

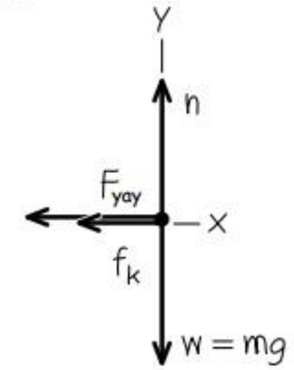
(a)



(b) Kayan parçanın sürtünmesiz serbest cisim diyagramı



(c) Kayan parçanın kinetik sürtünmeli serbest cisim diyagramı

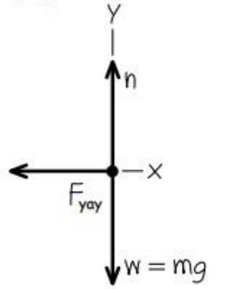


8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

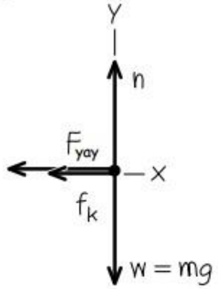
Örnek: **Değişen kuvvetle hareket**

Yatay bir hava rayına kütlesi 0.100 kg olan bir kayan parça bir yay ile bağlanmıştır; rayın kuvvet sabiti 20.0 N/m'dir (Şekil 6.22a). Başlangıçta yay gerilmemiştir ve kayan parça sağa doğru 1.50 m/s hızla gitmeye başlar. Bu cismin sağa doğru gideceği maksimum mesafe d'yi, (a) hava rayı çalıştırıldığı ve sürtünmenin olmadığı, (b) hava akımının kesildiği ve katsayısı $\mu k = 0.47$ olan bir kinetik sürtünme olduğu durum için bulunuz.

(b) Kayan parçanın sürtünmesiz serbest cisim diyagramı



(c) Kayan parçanın kinetik sürtünmeli serbest cisim diyagramı



Kayan parça durunca gerilmiş yay geri getirici kuvvet uygulayarak onu hemen sola doğru çeker. Bu nedenle kayan parça sadece bir an için duracaktır.

(b) Eğer raydaki hava akımı kapatılırsa, kinetik sürtünmenin neden olduğu sabit kuvvetin yaptığı işi de hesaba katmamız gerekir. Rayın yatay olması ve başka dik yönde kuvvetler bulunmaması nedeniyle normal kuvvet *n büyüklük* olarak kayan parçanın ağırlığına eşittir. Bundan dolayı kinetik sürtünme kuvvetinin büyüklüğü $f_k = \mu k n = \mu_k mg$ olarak verilmektedir. Sürtünme kuvveti yerdeğiştirmeyle zıt yöndedir. Bu nedenle sürtünmenin yaptığı iş

$$W_{sür} = f_k d \cos 180° = -f_k d = -\mu_k mgd$$

ile verilmektedir. Yapılan toplam iş, $W_{sür}$ ile yayın yaptığı iş olan $-\frac{1}{2} kd^2$'ın toplamıdır. İş-enerji teoremini kullanarak

$$-\mu_k mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$-(0.47)(0.100\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)d - \frac{1}{2}(20.0\text{ N/m})d^2$$

$$= -\frac{1}{2}(0.100\text{ kg})(1.50\text{ m/s})^2$$

$$(10.0\text{ N/m})d^2 + (0.461\text{ N})d - (0.113\text{ N}\cdot\text{m}) = 0$$

bulunur. Bu ifade d için kuadratik (ikinci dereceden) bir denklemdir. Çözümler

$$d = \frac{-(0.461\text{ N}) \pm \sqrt{(0.461\text{ N})^2 - 4(10.0\text{ N/m})(-0.113\text{ N}\cdot\text{m})}}{2(10.0\text{ N/m})}$$

$$= 0.086\text{ m} \quad \text{ya da} \quad -0.132\text{ m}$$

olarak verilir. Burada d'yi pozitif yerdeğiştirmenin simgesi olarak kullandık. Bundan dolayı sadece pozitif değer alan çözümün anlamı vardır. Böylece sürtünme olduğunda kayan parçanın gittiği mesafe;

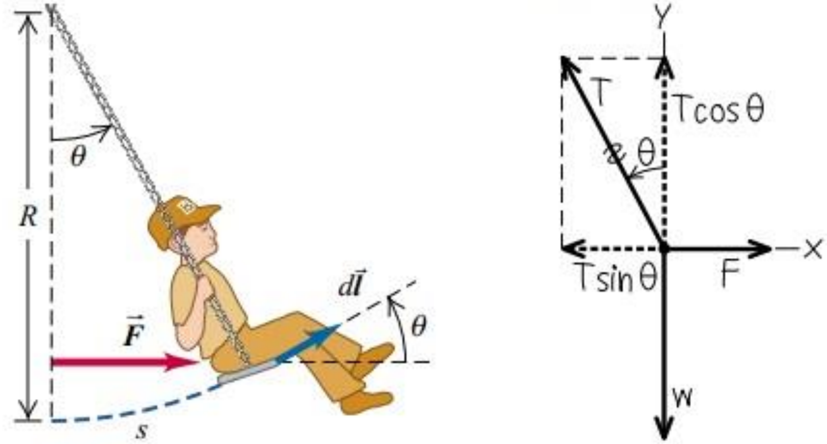
$$d = 0.086\text{ m} = 8.6\text{ cm}$$

8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Örnek: **Eğrisel yol boyunca hareket I**

Bir aile pikniğinde kötü huylu kuzen Throckmorton'u salıncakta sallamakla görevlendirildiniz (Şekil 6.24a). Kuzeninizin ağırlığı w, zincirlerin uzunluğu R'dir ve Throcky'yi zincirle dikey yönle θ_0 açısı yapacak biçimde sallıyorsunuz. Bunu sağlamak için sıfırdan başlayıp ve yavaş yavaş artırarak Throcky ve salıncağı çok yavaş, neredeyse dengede hareket ettirecek şekilde değişen yatay $\vec{F}$ kuvvetini uyguluyorsunuz. Throck üzerinde tüm kuvvetlerin yaptığı iş nedir? Zincirlerdeki T geriliminin yaptığı iş nedir? $\vec{F}$ kuvvetiyle iterek sizin yaptığınız iş nedir? (Oturma yeri ve zincirlerin ağırlığını ihmal ediniz.)

6.24 (a) Kuzen Throcknorton'u salıncakta itilmesi. (b) Serbest cisim diyagramımız.



ÇÖZÜM

BELİRLEME: Hareket bir eğri üzerindedir; net kuvvetin, gerilim kuvvetinin ve $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı işi hesaplamak için Denklem (6.14)'ü kullanacağız.

TASARLAMA: Şekil 6.24b'de çizdiğimiz serbest cisim diyagramı ve koordinat sistemi görülüyor. İki zincirdeki gerilimler yerine tek bir T gerilimi kullandık.

İŞLEM: Hareket sırasındaki toplam işi bulmak için iki yol vardır; (1) her kuvvetin yaptığı işi ayrı ayrı hesaplayıp iş büyüklüklerini toplamak ve (2) net kuvvetin yaptığı işi hesaplamak. Throcky her noktada dengede olduğu için ikinci yol çok daha kolaydır. Üzerindeki net kuvvet sıfır olduğundan net kuvvetin integrali de sıfırdır (Denklem 6.14). Böylece tüm kuvvetlerin onun üzerinde yaptığı iş de sıfırdır.

Zincirlerdeki gerilimin Throcky üzerinde yaptığı işi de bulmak kolaydır; çünkü bu kuvvet gidilen yol boyunca tüm noktalarda harekete diktir. Bu nedenle tüm noktalarda zincirin gerilimi ve yerdeğiştirme vektörü $d\vec{l}$ arasında açı 90º'dir ve Denklem (6.14) ile verilen skalar çarpım sıfıra eşittir, yani zincirdeki gerilim hiç iş yapmaz.

Devam ediyor

8.3 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Örnek: **Eğrisel yol boyunca hareket I**

Bir aile pikniğinde kötü huylu kuzen Throckmorton'u salıncakta sallamakla görevlendirildiniz (Şekil 6.24a). Kuzeninizin ağırlığı w, zincirlerin uzunluğu R'dir ve Throcky'yi zincirle dikey yönle θ_0 açısı yapacak biçimde sallıyorsunuz. Bunu sağlamak için sıfırdan başlayıp ve yavaş yavaş artırarak Throcky ve salıncağı çok yavaş, neredeyse dengede hareket ettirecek şekilde değişen yatay $\vec{F}$ kuvvetini uyguluyorsunuz. Throck üzerinde tüm kuvvetlerin yaptığı iş nedir? Zincirlerdeki T geriliminin yaptığı iş nedir? $\vec{F}$ kuvvetiyle iterek sizin yaptığınız iş nedir? (Oturma yeri ve zincirlerin ağırlığını ihmal ediniz.)

$\vec{F}$'nin yaptığı işi hesaplayabilmek için bu kuvvetin θ açısıyla nasıl değiştiğini bilmemiz gerekmektedir. Throcky üzerindeki $\vec{F}$ net kuvveti sıfırdır; o halde $\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$. Şekil. 6.24'den

$$\sum F_x = F + (-T\sin\theta) = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\theta + (-w) = 0$$

elde ederiz. İlk denklemi T için çözüp bunu ikinci denkleme yerleştirirsek,

$$F = w\tan\theta$$

$\vec{F}$'nin etkidiği nokta, s yayı boyunca dönmektedir. Yayın boyu s, çembersel yolun yarıçapı olan R çarpı radyan cinsinden verilen θ açısına eşittir; yani, $s = R\theta$. O halde $d\theta$ açısında küçük bir değişime karşılık gelen $d\vec{l}$ yerdeğişiminin büyüklüğü $dl = ds = R\,d\theta$ olarak verilmektedir. $\vec{F}$'in yaptığı iş

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\, ds$$

ile verilir. Şimdi her şeyi θ açısı (değeri 0'dan θ_0'a dek değişen) cinsinden yazarsak sonuç;

$$W = \int_0^{\theta_0} (w\tan\theta)\cos\theta\,(R\,d\theta) = wR\int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta$$
$$= wR(1-\cos\theta_0)$$

8.4 Güç

Eğer Δt'lik zamanda ΔW'lik iş yapılırsa birim zamanda yapılan iş veya **ortalama güç** P_{ort} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_{ort} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(ortalama güç)} \qquad (6.15)$$

İşin yapılma hızı sabit olmayabilir. **Anlık güç** P, Denklem (6.15)'te verilen oranın Δt sıfıra giderken ki sınırı olarak tanımlarız.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(anlık güç)} \qquad (6.16)$$

Gücün SI birimi **watt** (W)'tır. Bu birime İngiliz mucit James Watt'ın adı verilmiştir. Bir watt saniyede 1 joule'a eşittir: 1 W = 1 J/s (Şekil 6.25).

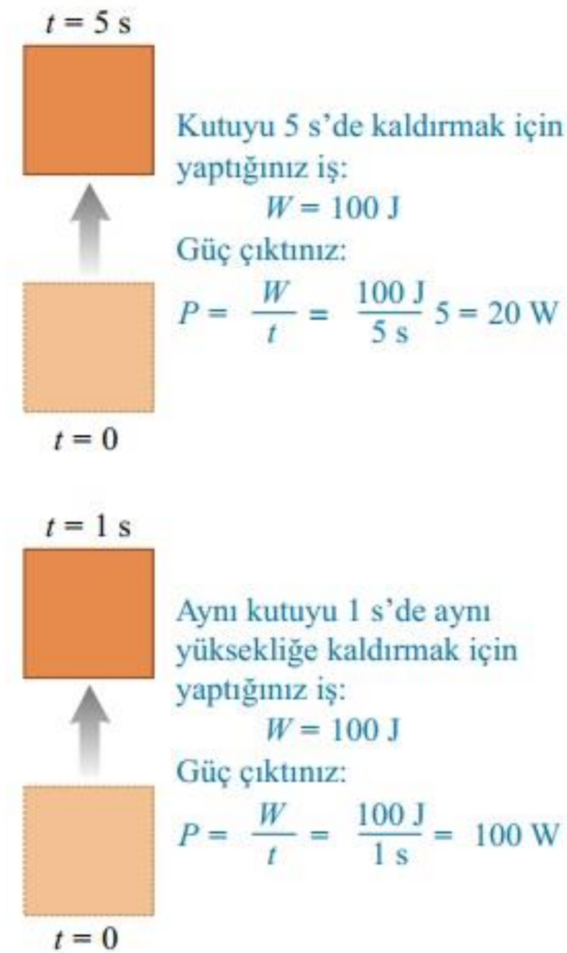
Gücü mekanikte kuvvet ve hız cinsinden de ifade edebiliriz. Bir cisim $\Delta\vec{s}$ vektörel yerdeğiştirme yaparken üzerinde $\vec{F}$ kuvvetinin etkidiğini düşünelim. Eğer $F_{\parallel}$, $\vec{F}$ vektörünün yola teğet olan bileşeni ($\Delta\vec{s}$'ye paralel) ise kuvvetin yaptığı iş $\Delta W = F_{\parallel}\,\Delta s$ dir. Ortalama güç,

$$P_{ort} = \frac{F_{\parallel}\Delta s}{\Delta t} = F_{\parallel}\frac{\Delta s}{\Delta t} = F_{\parallel} v_{ort} \qquad (6.17)$$

şeklinde olur. Anlık güç P bu ifadenin Δt sıfıra giderken limitidir.

$$P = F_{\parallel} v \qquad (6.18)$$

6.25 Bu iki durumda da aynı iş yapılmıştır. Ancak güç (işin yapılma hızı) farklıdır.



8.4 Güç

Burada *v anlık hızın* büyüklüğüdür. Denklem (6.18)'i aynı zamanda bir skalar çarpımla da gösterebiliriz.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (\vec{F} \text{ kuvvetinin parçacık üzerinde yaptığı işin anlık hızı}) \qquad (6.19)$$

Örnek: Kuvvet ve güç

Bir Boeing 767 yolcu uçağının iki jet motorundan her biri 197 000 N (44 300 lb) değerinde bir itme kuvveti (uçağı ileriye iten kuvvet) üretmektedir. Uçak 250 m/s (900 km/sa veya yaklaşık olarak 560 mil/sa) süratle giderken her motor kaç beygirgücü güç üretir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Hedef değişkenimiz itme kuvvetinin iş yapma hızı olan anlık güç P'dir.

TASARLAMA: Denklem (6.18)'i kullanırız. İtme kuvveti hareket yönündedir. Demek ki $F_{\|}$ *itme kuvvetine eşittir.*

İŞLEM: Sürat $v = 250$ m/s iken her motorun ürettiği güç;

$$P = F_{\|}v = (1.97 \times 10^5 \text{ N})(250 \text{ m/s}) = 4.93 \times 10^7 \text{ W}$$

$$= (4.93 \times 10^7 \text{ W})\,\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}} = 66\,000 \text{ hp}$$

DEĞERLENDİRME: Modern yolcu uçaklarının hızı tamamen motorlarının gücüne bağlıdır (Şekil 6.27). 1950'lerin en büyük pervaneli yolcu uçaklarının motorları yaklaşık 3 400 hp (2.5×10^6 W) güç üretiyorlardı. Bu da onlara yaklaşık 600 km/sa (370 mil/sa) sürat sağlıyordu. Boeing 767'deki her motor bu değerin yaklaşık 20 katı daha çok güç üretmekte, bu da uçağın 900 km/sa (560 mil/sa) süratle uçmasına ve çok daha ağır yükler taşımasına olanak sağlamaktadır.

Yolcu uçağı dururken, $v = 0$, motorlar maksimum itme kuvvetini sağlasa bile motorların verdiği güç *sıfır* olur. Kuvvet ve güç aynı şeyler değildir.

6.27 a) Pervaneli ve (b) jet motorlu yolcu uçakları.

(a)

(b)

8.4 Güç

Örnek: **Bir "güç tırmanışı"**

50.0 kg ağırlığında maratoncu bir kadın atlet Amerika Birleşik Devletlerinin Chicago'daki 443 m olan en yüksek binası Sears kulelerinin en tepesine tırmanmak için merdivenlerden koşarak çıkıyor. Tepeye 15.0 dakikada varmak için ortalama güç çıktısı watt, kilowatt ve beygirgücü cinsinden ne kadardır?

ÇÖZÜM

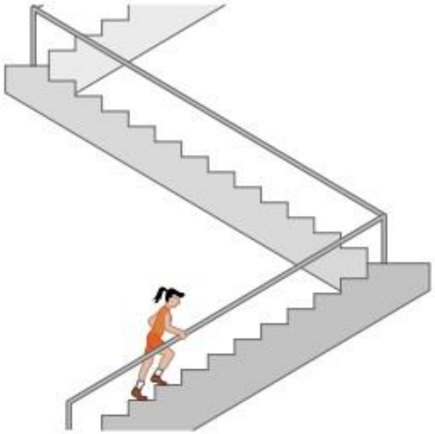
BELİRLEME: Koşucuyu kütlesi m olan bir parçacık gibi alacağız. Ortalama güç çıktısı P_{ort} kendi vücudunu yerçekimine karşı sabit süratte kaldırmaya yeterli olmalıdır.

TASARLAMA: P_{ort}'yı iki biçimde bulabiliriz: (1) Önce yapması gereken işi bulup sonra Denklem (6.15)'deki gibi geçen zamana böleriz, veya (2) kadının yukarıya, tırmanacağı yöne doğru uygulaması gereken ortalama kuvveti bulur, sonra bunu Denklem (6.17)'deki gibi yukarı doğru olan hızla çarparız.

İŞLEM: Örnek 6.8'deki görüldüğü gibi, m kütleli bir cismi yerçekimine karşı kaldırmak için ağırlık mg'nin h ile verilen yükseklikle çarpımına eşit iş miktarı gerekir. Demek ki atletin yapması gereken iş;

$$W = mgh = (50.0\ \text{kg})\,(9.80\ \text{m/s}^2)\,(443\ \text{m})$$
$$= 2.17 \times 10^5\ \text{J}$$

6.28 Chicago'daki Sears Kulesi'nin tepesine merdivenlerden 15 dakikada çıkmak için ne kadar güç gereklidir.



Geçen zaman 15.0 dakika = 900 s'dir. O zaman Denklem (6.15)'e göre ortalama güç:

$$P_{ort} = \frac{2.17 \times 10^5\,\text{J}}{900\,\text{s}} = 241\,\text{W} = 0.241\,\text{kW} = 0.323\,\text{hp}$$

Aynı hesabı Denklem (6.17)'i kullanarak yapalım. Uygulanan kuvvet dikey yöndedir. Hızın ortalama dikey bileşeni (443 m)/(900 s) = 0.492 m/s'dir. Buradan ortalama güç

$$P_{ort} = F_{\parallel} v_{ort} = (mg)\,v_{ort}$$
$$= (50.0\,\text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.492\ \text{m/s}) = 241\,\text{W}$$

olarak bulunur; daha önce bulunan sonuçla aynıdır.

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ