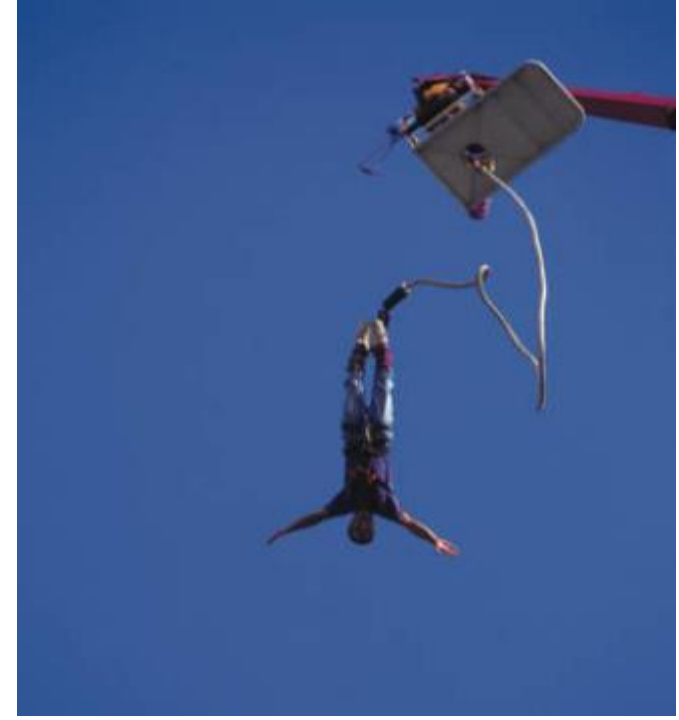
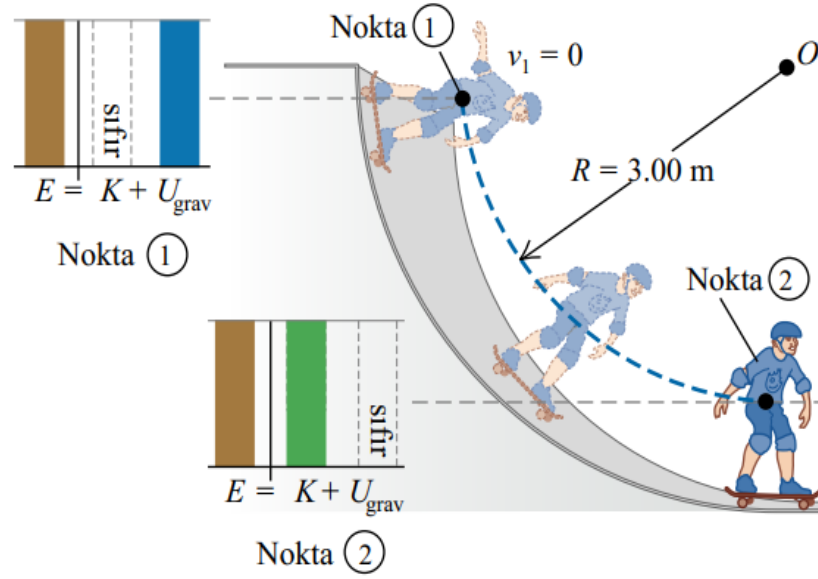




FİZİK-1 DERSİ

BÖLÜM 8: POTANSİYEL ENERJİ VE ENERJİNİN KORUNUMU

Ders kaynakları:

- 1. YOUNG ve FREEDMAN, 12 Baskı, Türkçesi**
- 2. Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar)**

ÖĞRENİM KONULARI

- Kütleçekimi potansiyel enerjisi kavramı, dikey hareket içeren problemlerde nasıl kullanılır.
- Esneklik potansiyel enerjisi, yaylara bağlı cisimlerle ilgili problemlerde nasıl kullanılır.
- Korunumlu ve korunumsuz kuvvetler arasındaki ayrım nedir ve bu iki cins kuvvetin etkilediği cisimlerin hareketini içeren problemler nasıl çözülür.
- Bir korunumlu kuvvetin özellikleri, bu kuvvetle ilgili potansiyel enerji fonksiyonu biliniyorsa nasıl hesaplanır.
- Bir korunumlu kuvvetin etkisi altında olan bir cismin tek boyuttaki hareketini anlamak için enerji diyagramları nasıl kullanılır.

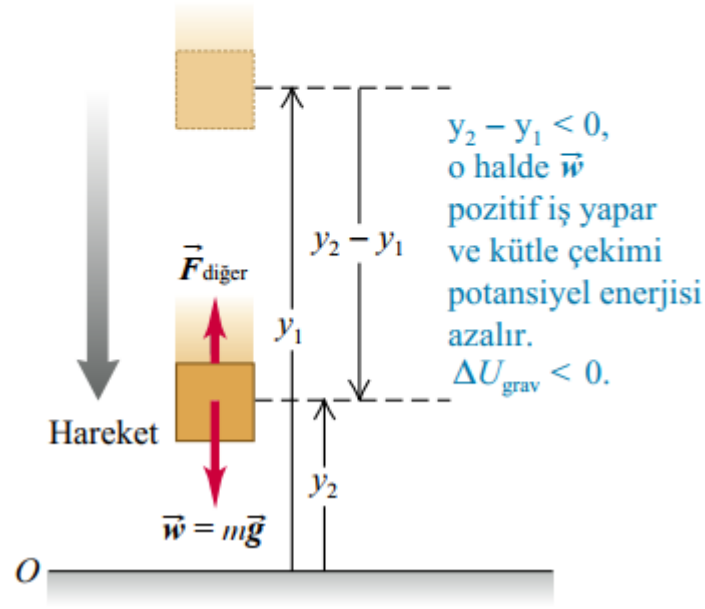
Kütleçekimi Potansiyel Enerjisi

Potansiyel enerji cismin ağırlığına ve yerden ne kadar yüksekte olduğuna bağlıdır. Buna **kütleçekimi potansiyel enerjisi** diyeceğiz.

Basket topu potaya inerken kütleçekimi potansiyel enerjisi kinetik enerjiye dönüşür ve topun sürati artar.

7.2 Bir cisim ilk y_1 yüksekliğinden son y_2 yüksekliğine dikey yol takip ederek giderken yerçekimi kuvveti iş yapar ve kütleçekimi potansiyel enerjisi değişir.

(a) Aşağıya hareket eden bir cisim

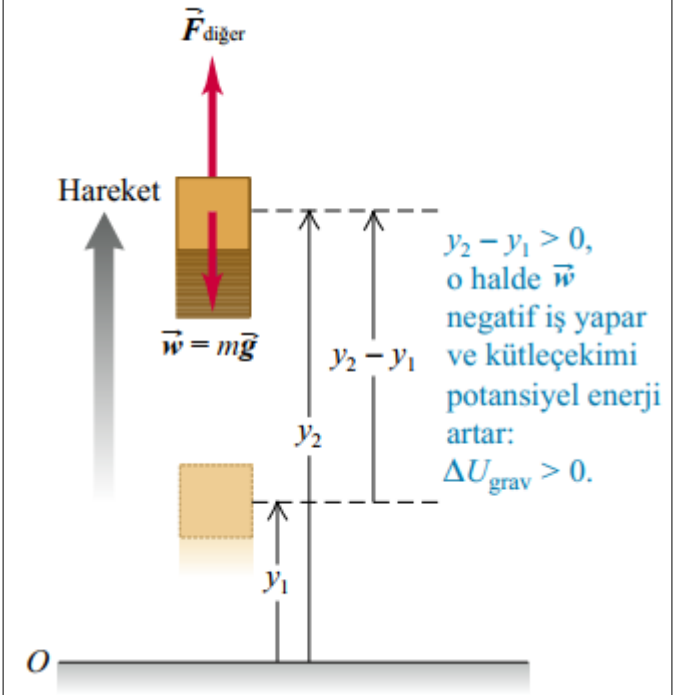


Şekil 7.2’de olduğu gibi, m kütleli bir cismin dikey y -ekseni boyunca hareket ettiğini düşünelim. Bu cismi etkileyen kuvvetler, büyüklüğü $w = mg$ olan cismin ağırlığı ve muhtemel başka kuvvetlerdir. Cismi ağırlık dışında etkileyen bütün kuvvetlerin vektörel toplamını $\vec{F}_{diğer}$ olarak gösterelim.

Bir cisim yeryüzünden yukarıda y_1 -konumundan aşağıdaki y_2 -konumuna aşağı doğru hareket ederken ağırlığın yaptığı işi bulmak istiyoruz (Şekil 7.2a). Ağırlık ve yerdeğiştirme aynı yönde olduklarından ağırlığın cisim üzerinde yaptığı iş W_{grav} pozitifdir;

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \quad (7.1)$$

(b) Yukarıya hareket eden bir cisim



Bu ifade aynı zamanda cismi y_1 'den y_2 'ye yukarı doğru çıkarmak için gerekli olan işi doğru olarak verir (Şekil 7.2b). Bu durumda $y_1 - y_2$ niceliği negatiftir, ağırlık ve yerdeğiştirme zıt yönde olduğundan $\vec{W}_{\text{grav}}$ de negatiftir.

Denklem (7.1) bize $\vec{W}_{\text{grav}}$ 'nin yerdeğiştirmenin başlangıcındaki ve sonundaki mgy değerleri cinsinden ifade edildiğini göstermektedir. Bu nicelik, ağırlık mg ile yolun h yüksekliğinin çarpımı olan büyüklüğü verir, buna **kütleçekimi potansiyel enerjisi** (U_{grav}) denir.

$$U_{\text{grav}} = mgy \quad (\text{kütleçekimi potansiyel enerjisi}) \quad (7.2)$$

Bu büyüklüğün başlangıç değeri $U_{\text{grav},1} = mgy_1$, son değeri ise $U_{\text{grav},2} = mgy_2$ 'dir. U_{grav} kütleçekimi potansiyel enerjisindeki değişim, son değer eksi başlangıç değeri veya $\Delta U_{\text{grav}} = U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1}$ 'dir. Cisim, y_1 'den y_2 'ye giderken ağırlığın yaptığı işi (W_{grav}) şu şekilde ifade edebiliriz.

$$W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = - (U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1}) = - \Delta U_{\text{grav}} \quad (7.3)$$

Mekanik Enerjinin Korunumu

(Sadece Kütle Çekim Kuvveti Etkili Olduğunda)

İş-enerji teoremi (Denklem 6.6)

$$W_{\text{top}} = \Delta K = K_2 - K_1$$

Denklem (7.3)'ten

$$W_{\text{top}} = W_{\text{grav}} = -\Delta U_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$$

Bunların tamamını bir denklem içine koyarsak

$$\Delta K = -\Delta U_{\text{grav}} \text{ veya } K_2 - K_1 = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$$

Bu sonuç şu şekilde de yazılabilir.

$$K_1 + U_{\text{grav},1} = K_2 + U_{\text{grav},2} \quad (\text{sadece kütle çekimi iş yaparsa}) \quad (7.4)$$

veya

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad (\text{sadece kütle çekimi iş yaparsa}) \quad (7.5)$$

Buradaki $K + U_{\text{grav}}$ kinetik ve potansiyel enerjinin toplamıdır, buna **sistemin toplam mekanik enerjisi** (E) denir. Burada “sistem”in anlamı kütlesi m olan bir cisim ve dünyadır; çünkü kütle çekim potansiyel enerjisi U , her iki cismin ortak özelliğidir. Bu nedenle $E_1 = K_1 + U_{\text{grav},1}$ sistemin y_1 yüksekliğindeki toplam mekanik enerjisi ve $E_2 = K_2 + U_{\text{grav},2}$ ise sistemin y_2 yüksekliğindeki toplam mekanik enerjisidir. Denklem (7.4)'e göre sadece cismin ağırlığı iş yapan tek kuvvet ise $E_1 = E_2$. Yani, E sabittir ve y_1 ve y_2 konumlarındaki değeri aynıdır. Burada y_1 ve y_2 noktaları cismin hareketi sırasında keyfi olarak seçilmiştir; toplam mekanik enerji E hareket boyunca bütün noktalarda aynı değere sahiptir:

$$E = K + U_{\text{grav}} = \text{sabit}$$

(sadece kütle çekimi iş yaparsa)

Her zaman aynı değere sahip bu niceliğe *korunumlu* nicelik denir. Sadece kütleçekim kuvveti etkin olduğunda toplam mekanik enerji sabittir, yani korunmaktadır (Şekil 7.3). Bu bizim ilk **korunumlu mekanik enerji** örneğidir.

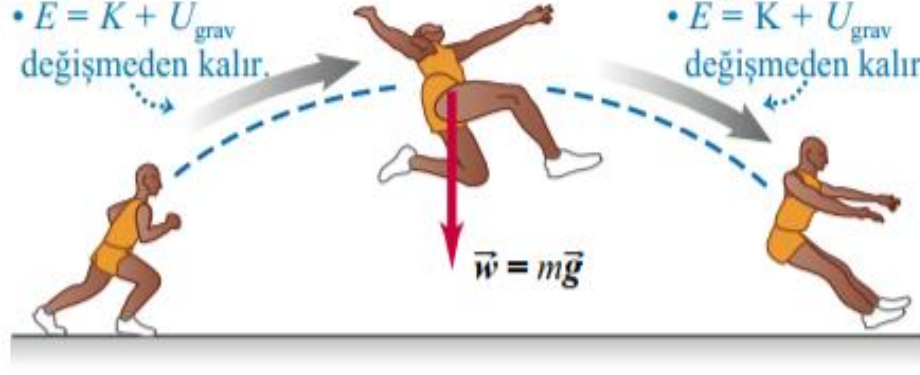
7.3 Bir atlet havada iken sadece kütleçekimi iş yapar (hava direncinin zayıf etkisini ihmal edebiliriz). Mekanik enerji E (kinetik ile potansiyel enerjinin toplamı) korunur.

Yükseliş:

- K azalır.
- U_{grav} artar.
- $E = K + U_{\text{grav}}$ değişmeden kalır.

Alçalış:

- K artar.
- U_{grav} azalır.
- $E = K + U_{\text{grav}}$ değişmeden kalır.



UYARI “Sıfır yükseklik” noktasını istediğiniz yerde seçebilirsiniz. Kütleçekimi potansiyeli enerjisini çalıştığımızda, istediğimiz yüksekliği $y = 0$ olarak seçebiliriz. y 'nin referans değerini ötelesek y_1, y_2 ve $U_{\text{grav},1}, U_{\text{grav},2}$ değerleride değişime uğrar, ama bu ötelemenin $y_2 - y_1$ ve $U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1} = mg(y_2 - y_1)$ farkları üzerinde bir etkisi olmaz. Aşağıdaki örnekten görüleceği gibi fiziksel öneme sahip büyüklük, herhangi bir noktadaki U_{grav} değeri değil, herhangi iki nokta arasındaki U_{grav} değer farkıdır. Bu nedenle problemde seçeceğimiz herhangi bir noktada U_{grav} “sıfır” alabiliriz, bu seçim problemin fiziksel anlamını etkilemez. ■

Örnek:

Enerjinin korunumundan bir topun yükseleceği mesafeyi bulmak

Kütlesi 0.145 kg olan bir topu 20.0 m/s başlangıç hızıyla yukarı doğru fırlattığınızı düşünelim. Hava direncini ihmal ederek, bu topun ne kadar yükselebileceğini bulunuz.

İŞLEM: $y_1 = 0$ olduğundan nokta 1'deki potansiyel enerji $U_{\text{grav},1} = mgy_1 = 0$ 'dır. Ayrıca nokta 2'de topun anlık sürati 0 olduğundan kinetik enerjisi bu noktada $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$ olur. Denklem (7.4)'e göre $K_1 + U_{\text{grav},1} = K_2 + U_{\text{grav},2}$ olduğundan bu son durumda,

$$K_1 = U_{\text{grav},2}$$

Şekil 7.4'teki enerji grafiğinde görüldüğü gibi, nokta 1'deki kinetik enerji nokta 2'de tamamen kütleçekimi potansiyel enerjisine dönüşmüştür. Nokta 1'deki kinetik enerjiyi bulalım;

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(0.145 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})^2 = 29.0 \text{ J}$$

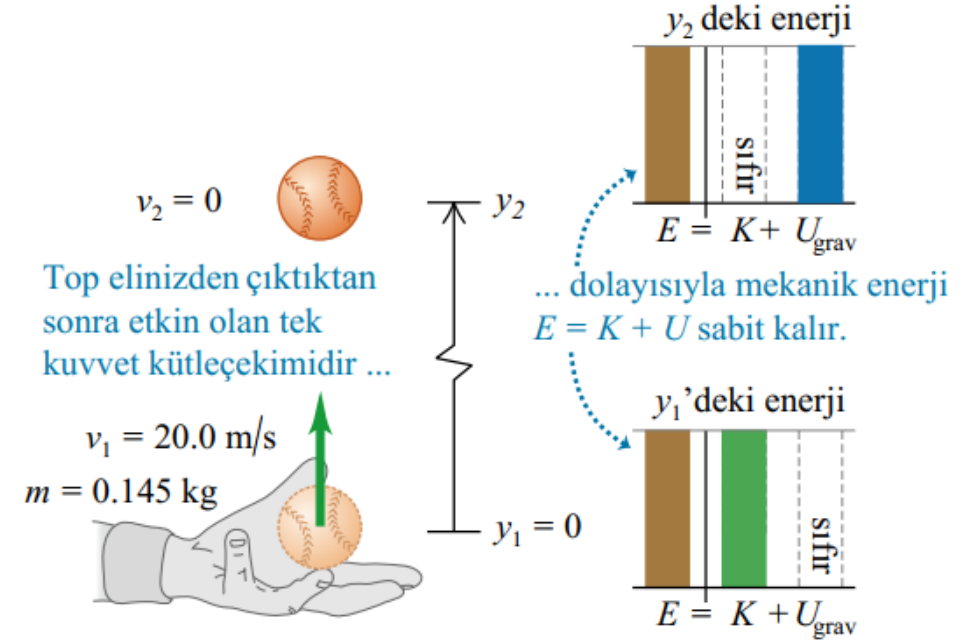
Bu aynı zamanda nokta 2'deki kütleçekimi potansiyel enerjisi $U_{\text{grav},2} = mgy_2$ eşittir. O halde,

$$y_2 = \frac{U_{\text{grav},2}}{mg} = \frac{29.0 \text{ J}}{(0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)} = 20.4 \text{ m}$$

Bu y_2 değeri $K_1 = U_{\text{grav},2}$ denklemini cebirsel olarak çözerek de bulunabilir:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2 \longrightarrow y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = 20.4 \text{ m}$$

7.4 Beysbol topu elinizi terk ettikten sonra mekanik enerji $E = K + U$ korunur.



Kütleçekimi Dışında Kuvvetler İş Yaptığında

Bu durumda bütün kuvvetlerin yaptığı toplam iş $W_{\text{top}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{diğer}}$ olarak verilmelidir. Bunu kinetik enerjideki değişime eşitleyerek,

$$W_{\text{diğer}} + W_{\text{grav}} = K_2 - K_1 \quad (7.6)$$

elde edilir. Denklem (7.3)'de $W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$, yani

$$W_{\text{diğer}} + U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = K_2 - K_1$$

Eşitlikler tekrar aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_{\text{grav},2} \quad \begin{array}{l} \text{(yerçekimi dışında} \\ \text{kuvvetler de iş yapıyorsa)} \end{array} \quad (7.7)$$

Sonuç olarak, değişik enerjiler için uygun ifadeleri kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{\text{diğer}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \begin{array}{l} \text{(yer çekimi dışında} \\ \text{kuvvetler de iş yapıyorsa)} \end{array} \quad (7.8)$$

Örnek (7.1)'deki topu bırakmadan önce elinizin yerden 0.50 m yukarıya hareket ettiğini varsayalım; daha sonra top elinizi 20 m/s hızla terk etsin. Yine hava direncini ihmal edin. (a) Eliniz topa yukarı doğru sabit kuvvet tatbik ettiğini göz önünde tutarak bu kuvvetin büyüklüğünü bulunuz. (b) Top elinizi terk ettiği noktanın 15.0 m yukarısında iken sürati nedir?

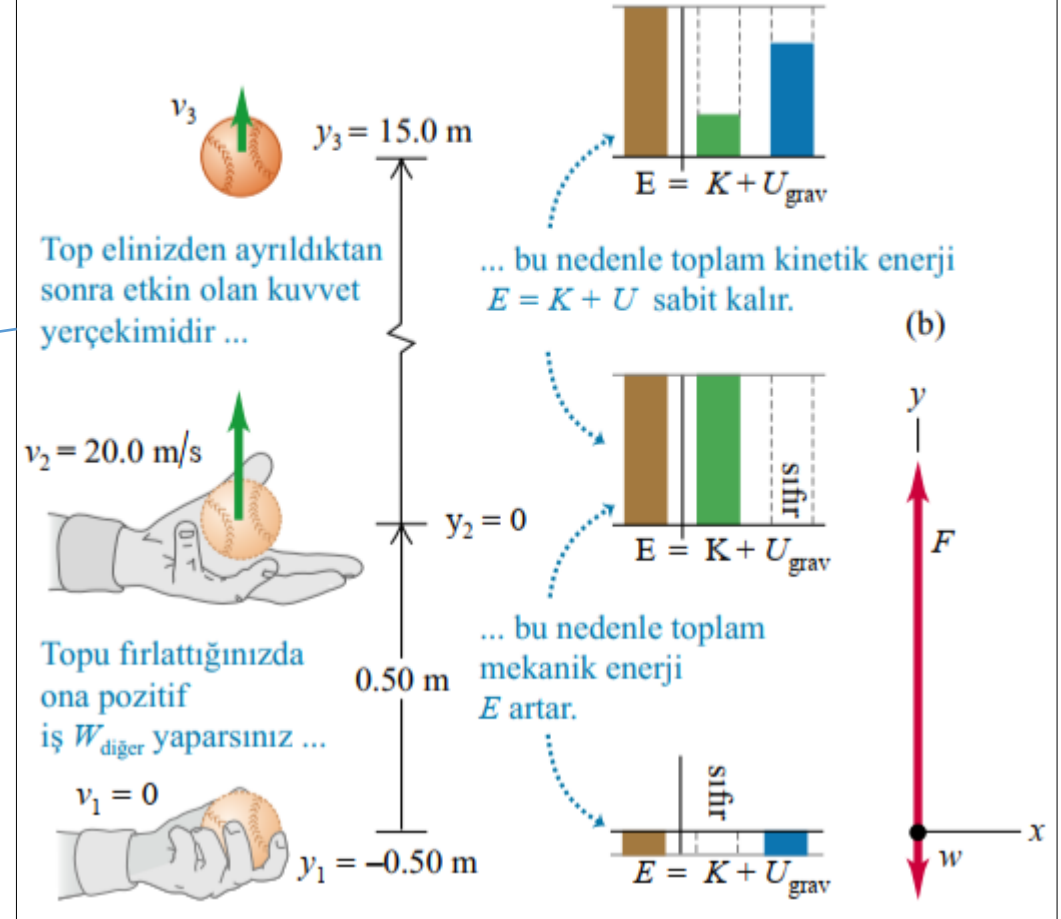
ÇÖZÜM

BELİRLEME: Örnek (7.1)'de mekanik enerji korunumunu kullanmıştık; çünkü sadece yerçekimi iş yapmıştı. Bu örnekte elimizin yaptığı işi de göz önüne almak zorundayız.

TASARLAMA: Şekil (7.6)'daki diyagram durumu gösteriyor, topun atılışını gösteren serbest cisim diyagramı da çizilmiştir. Nokta 1 elin harekete başladığı yer, nokta 2 topun eli terk ettiği yer olsun; noktada 3 nokta 1'in 15 m üstündedir. El topa $\vec{F}$ kuvvetini sadece 1. ile 2. noktalar arasında uygulamaktadır. Şekil 7.1'deki koordinat sistemini kullanarak $y_1 = -0.5$ m, $y_2 = 0.0$ m ve $y_3 = 15.0$ m değerlerini belirleyelim. Top y_1 noktasında durağan halden harekete başlamaktadır, o halde $v_1 = 0$ 'dır. Top elinizi 20 m/s ile terk ettiğine göre $v_2 = 20$ m/s'dir. Hedef değişkenler (a) topa elimizin uyguladığı $\vec{F}$ kuvvetinin büyüklüğü, (b) Topun nokta 3'deki sürati v_3 'tür.

7.6 (a) Enerjiye ile ilgili görüşlerin yukarı doğru fırlatılan topa uygulanması. (b) Fırlatılan top için serbest cisim diyagramları.

(a)



İŞLEM: (a) $\vec{F}$ büyüklüğünü belirlemek için öncelikle Denklem (7.7) ile bu kuvvetin yapmış olduğu $W_{\text{diğer}}$ işi belirleyeceğiz.

$$K_1 = 0$$

$$U_{\text{grav},1} = mgy_1 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.50 \text{ m}) = -0.71 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(0.145 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})^2 = 29.0 \text{ J}$$

$$U_{\text{grav},2} = mgy_2 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0) = 0$$

Başlangıç potansiyel enerjisi $U_{\text{grav},1}$ negatiftir; çünkü topun ilk konumu başlangıç noktasının altındadır. (Potansiyel enerji değerinin sıfırdan küçük çıkmasını dert etmeyiniz. Sadece iki konum arasındaki potansiyel enerji farkının önemli olduğunu hatırlayın.) Denklem (7.7)'ye göre $K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_{\text{grav},2}$, yani

$$\begin{aligned} W_{\text{diğer}} &= (K_2 - K_1) + (U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1}) \\ &= (29.0 \text{ J} - 0) + (0 - (-0.71 \text{ J})) = 29.7 \text{ J} \end{aligned}$$

Topun toplam kinetik enerjisi $K_2 - K_1 = 29.0 \text{ J}$ kadar artmıştır ve potansiyel enerjisi de $U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1} = 0.71 \text{ J}$ kadar artmıştır. Her ikisinin toplamı ($E_2 - E_1$) toplam mekanik enerjideki değişimdir. Bu değişim de $W_{\text{diğer}}$ 'e eşittir.

Elinizin topa uyguladığı yukarı yöndeki $\vec{F}$ kuvvetinin sabit olduğunu düşünün. Bu kuvvetin yaptığı iş $W_{\text{diğer}}$, $\vec{F}$ büyüklüğü ile yukarı doğru yerdeğiştirme olan $y_2 - y_1$ 'in çarpımına eşittir.

$$\begin{aligned} W_{\text{diğer}} &= F(y_2 - y_1) \\ F &= \frac{W_{\text{diğer}}}{y_2 - y_1} = \frac{29.7 \text{ J}}{0.50 \text{ m}} = 59 \text{ N} \end{aligned}$$

Bu değer topun ağırlığından yaklaşık olarak 40 defa daha büyüktür.

(b) Nokta 3'deki sürati bulmaya gelince; toplam mekanik enerjinin nokta 2 ile 3 arasında korunduğuna dikkat edelim. Nokta 2'den itibaren eliniz topun üzerinde iş yapmamaktadır, yani $W_{\text{diğer}} = 0$ 'dır. Denklem (7.4) kullanarak nokta 3'deki kinetik enerjiyi bulabiliriz;

$$K_2 + U_{\text{grav},2} = K_3 + U_{\text{grav},3}$$

$$U_{\text{grav},3} = mgy_3 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(15.0 \text{ m}) = 21.3 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= (K_2 + U_{\text{grav},2}) - U_{\text{grav},3} \\ &= (29.0 \text{ J} + 0 \text{ J}) - 21.3 \text{ J} = 7.7 \text{ J} \end{aligned}$$

$K_3 = \frac{1}{2}mv_{3y}^2$ eşitliğinden topun nokta 3'deki hızının y-bileşeni v_{3y} 'dir.

$$v_{3y} = \pm \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm \sqrt{\frac{2(7.7 \text{ J})}{0.145 \text{ kg}}} = \pm 10 \text{ m/s}$$

bulunur. Burada $\pm$ işaretinin anlamı topun biri çıkışta diğeri inişte olmak üzere y_3 noktasından iki kez geçmiş olmasıdır. Serbest düşme sırasında toplam mekanik enerji (E) sabit ve değeri 29.0 J 'dür. Hareketin yönünden bağımsız olarak (aşağı veya yukarı doğru) topun y_3 'deki potansiyel enerjisi ise $U_{\text{grav},3} = 21.3 \text{ J}$ 'dür.

Eğri Boyunca Hareket İçin Kütleçekim Potansiyel Enerjisi

İlk iki örneğimizde cisim düşey bir doğru boyunca hareket ediyordu. Hareket eğik düzlem veya eğri üzerinde olduğunda ne olur (Şekil 7.7a)? Cisim kütle çekim kuvveti $\vec{W} = m\vec{g}$ (cismin ağırlığı) ile bileşkesi $\vec{F}_{\text{diğer}}$ olarak tanımladığımız olası diğer kuvvetlerin etkisindedir. Bu yerdeğiştirme sırasında kütle çekim kuvvetinin yaptığı işi bulabilmek için gidilen yolu küçük $\Delta\vec{s}$ dilimlerine böleriz; Şekil 7.7b tipik bir dilimi göstermektedir. Kütle çekimi kuvvetinin bu dilimde yaptığı iş yerdeğiştirme vektörü ile kuvvet vektörünün skalar çarpımına eşittir. Birim vektörler cinsinden kuvvet $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ ve yerdeğiştirme $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$ olup, kütle çekimi kuvvetinin yaptığı iş

$$\vec{w} \cdot \Delta\vec{s} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

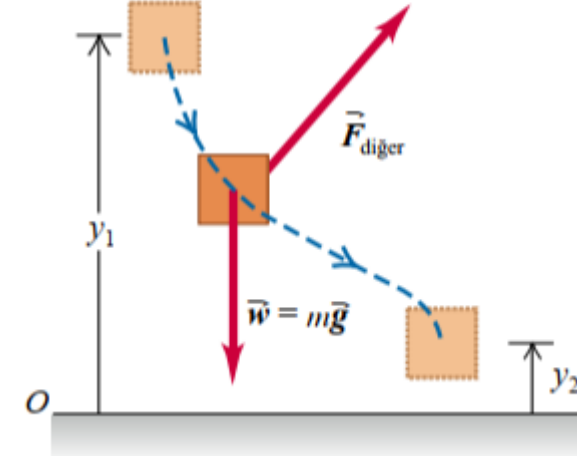
olarak bulunur. Yerçekiminin yaptığı iş, sanki cisim yatay yönde hiç hareket yapmadan sadece Δy kadar dikey yönde yerdeğiştirme yaptığını varsaydığımızda yapılan işle aynıdır. Bu tespit bütün eğri boyunca tüm dilimlerde yapılan yerdeğiştirmeler için geçerlidir. Neticede yerçekimi kuvvetinin yaptığı toplam iş, $-mg$ ile toplam dikey yerdeğiştirme ($\Delta y = y_2 - y_1$)'nin çarpımına eşittir:

$$W_{\text{grav}} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}.$$

Bu sonuç yerdeğiştirmenin tamamen dikey olarak varsayıldığı Denklem (7.1) veya (7.3) ile aynıdır. Demek ki, cisim iki nokta arasında eğri bir yol takip etse de, yerçekiminin yaptığı toplam iş sadece bu iki nokta arasındaki yükseklik farkına bağlıdır. Bu iş yatay yerdeğiştirmeden etkilenmez. Bu durumda varacağımız sonuç; *kütleçekimi potansiyel enerjisi için kullandığımız tanımlamalar cismin takip ettiği yol doğru da olsa, eğri de olsa aynıdır.*

7.7 Eğri bir yol boyunca yapılan harekette kütleçekimi potansiyel enerjisi değişiminin hesaplanması.

(a)



(b)



Kuzeniniz Throcky kayak ile dikey dairesel bir rampadan aşağıya kaymaktadır. Throcky ve kayakın toplam kütlesi 25.0 kg'dır. Throcky ve kayakı noktasal parçacık olarak kabul edelim. Bu parçacık yarıçapı $R = 3.0$ m olan tam dikey dairenin $1/4$ 'ü kadar yol alır (Şekil 7.9). Hareket durağan durumdan başlamıştır ve sürtünme yoktur. (a) Throcky'nin rampanın en alt noktasını eriştiği andaki süratini bulunuz. (b) Rampanın tabanında Throcky'yi etkileyen normal kuvveti bulunuz.

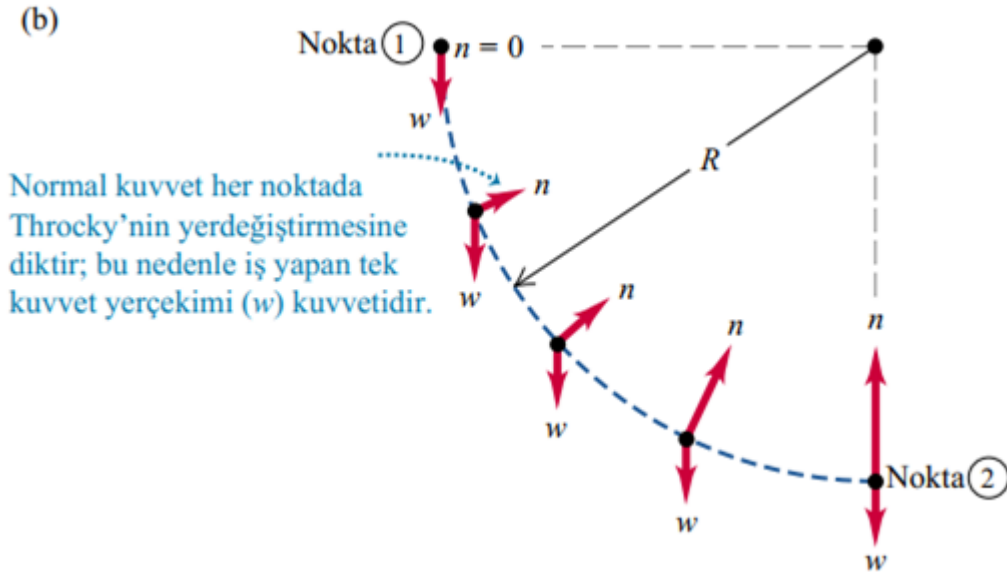
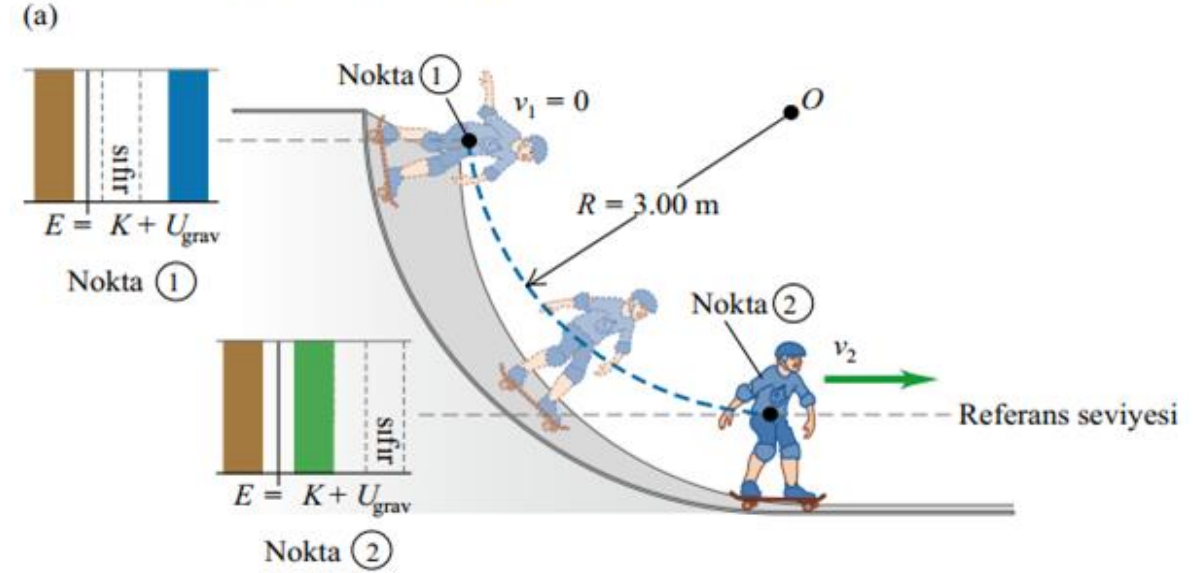
ÇÖZÜM

BELİRLEME: Sabit ivme denklemlerini kullanamayız, çünkü kuzenin ivmesi sabit değildir. Eğim alta yaklaştıkça azalmaktadır. Bunun yerine enerji yaklaşımını kullanacağız. Throcky dairesel bir yörünge boyunca hareket ettiğinden dolayı Bölüm 5.4'te dairesel hareket hakkında öğrendiklerimize başvuracağız.

TASARLAMA: Sürtünme olmadığına göre, ağırlık dışında uygulanan tek kuvvet rampa tarafından Throcky'e tatbik edilen normal kuvvet ($\vec{n}$)'dir (Şekil 7.9b). Bu kuvvet yol boyunca etkili olmasına rağmen iş yapmaz, çünkü Throcky'nin yerdeğiştirmesine her noktada diktir. Bu nedenle $W_{diğer} = 0$ 'dır ve mekanik enerji korunur.

Nokta 1 olarak başlangıç noktasını, nokta 2 olarak rampanın en alt noktasını alıyoruz. Bu en alt nokta $y = 0$ olsun (Şekil 7.9a). Böylece $y_1 = R$ ve $y_2 = 0$ (Throcky'nin bütün kütlesinin bu merkezde yoğunlaşmış olduğunu düşünüyoruz). Throcky harekete durgun olarak başlamaktadır, yani $v_1 = 0$ 'dır. Hedef değişkenimiz (a) şıkında onun süratini (v_2) en aşağı noktada bulmaktır; (b) şıkında nokta 2'de ona tatbik olan normal kuvveti bulmaktır. Bu normal kuvvet iş yapmadığından dolayı enerji denklemlerinde kullanılmaz. Biz de Newton'un ikinci yasasından bu kuvveti hesaplamak için yararlanacağız.

7.9 (a) Hhrocky'nin kayakı sürtünmesiz dairesel bir rampadan inmektedir. Toplam mekanik enerji sabittir. (b) Rampanın çeşitli noktalarında Throcky ve kayakının serbest cisim diyagramı.



İŞLEM: (a) Çeşitli enerji ifadeleri:

$$K_1 = 0 \quad U_{\text{grav},1} = mgR$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad U_{\text{grav},2} = 0$$

Mekanik enerjinin korunumundan,

$$K_1 + U_{\text{grav},1} = K_2 + U_{\text{grav},2}$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gR}$$

$$= \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(3.00 \text{ m})} = 7.67 \text{ m/s}$$

Rampanın dairesel şeklinin açık olarak denklemlere girmediğini fark etmişsinizdir; rampanın şeklinin burada önemi yoktur.

Throcky daima rampanın dibinde $v_2 = \sqrt{2gR}$ hızına ulaşacaktır. Hareket sırasında kaykayın tekerlekleri yerden ayrılırsa bile bu eşitlik geçerliliğini korur çünkü yerçekimi iş yapmaya devam etmektedir. Eğer Throcky R yüksekliğinden serbest düşseydi cevap yine değişmeyecekti. Bu son sürat kütleden bağımsızdır..

(b) n (normal kuvvet) kuvvetini nokta 2'de bulabilmek için Newton'un ikinci yasasından yararlanarak serbest cisim diyagramını çizelim (Şekil 7.9b). Nokta 2'de Throcky $v_2 = \sqrt{2gR}$ hızı ile yarıçapı R olan dairede hareket etmektedir. Bu nedenle merkeze doğru olan ivmenin büyüklüğü;

$$a_{\text{rad}} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Artı y -yönünü yukarı doğru alırsak, Newton yasasının y -bileşeni

$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{\text{rad}} = 2mg$$

$$n = w + 2mg = 3mg$$

$$= 3(25.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 735 \text{ N}$$

Nokta 2'de normal kuvvet Throcky'nin ağırlığının üç katıdır. Bu netice dairesel rampanın yarıçapından bağımsızdır. Örnek 5.9 (Kısım 5.2) ve Örnek 5.24 (Kısım 5.4)'te gördüğümüz gibi n 'nin büyüklüğü hissedilen ağırlıktır; yani, Throcky gerçek ağırlığı mg 'nin üç misli ağırmış gibi hissedecektir. Trocky rampanın yatay bölümü olan nokta 2'nin sağ tarafına ulaştığında normal kuvvet azalarak tekrar $w = mg$ değerine geri döner. Throcky ağırlığını yine normal hissetmeye başlar.

DEĞERLENDİRME: Bu örnek enerjiyle ilgili teknikler kullanarak çözdüğümüz problemlerde kuvvetlerin rolü hakkında genel kuralları anlatıyor. Önemli olan kuvvetin uygulanıp uygulanmadığı değil iş yapıp yapmamasıdır. Kuvvet iş yapmadığı zaman (bu örnekteki $\vec{n}$ kuvveti gibi) $W_{\text{diğer}}$ Denklem (7.7)'de $(K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_{\text{grav},2})$ yer almaz.

Bu problemin çözümünde hem enerji yaklaşımını hem de Newton yasasını birlikte kullandığımıza dikkatinizi çekmek isteriz. Enerji konumu sayesinde sürati elde ettik, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ kullanarak normal kuvveti bulduk. Problemdaki ara adımlarda sonucu verecek en uygun yöntemi kullandık.

Örnek:

Sürtünmeli dikey dairesel hareket

Örnek 7.4'deki rampanın sürtünmeli olduğunu ve tabanında Throcky'nin süratinin 6.00 m/s olduğunu varsayalım. Throcky'yi etkileyen sürtünme kuvveti ne kadar iş yapmıştır?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Şekil 7.10'daki serbest cisim diyagramı normal kuvvetin gene iş yapmadığını gösteriyor. Fakat şimdi $\vec{f}$ olarak tanımlanan bir sürtünme kuvveti iş yapmaktadır. Bu nedenle nokta 1 ile nokta 2 arasında, kütleçekimi dışındaki kuvvetlerin Throcky üzerinde yaptığı iş sıfırdan farklıdır: $W_{\text{diğer}}$ sıfır değildir.

TASARLAMA: Örnek 7.4'teki aynı koordinat sistemini ve aynı başlangıç ve bitiş noktalarını kullanacağız. Hedef değişkenimiz sürtünme kuvvetinin yaptığı W_f işini bulmaktır. Burada sürtünme kuvveti yerçekimi dışında tek iş yapan kuvvet olduğundan yaptığı iş, $W_{\text{diğer}}$ işine eşittir. Denklem (7.7)'yi kullanarak W_f bulunabilir.

İŞLEM: Enerji büyüklükleri

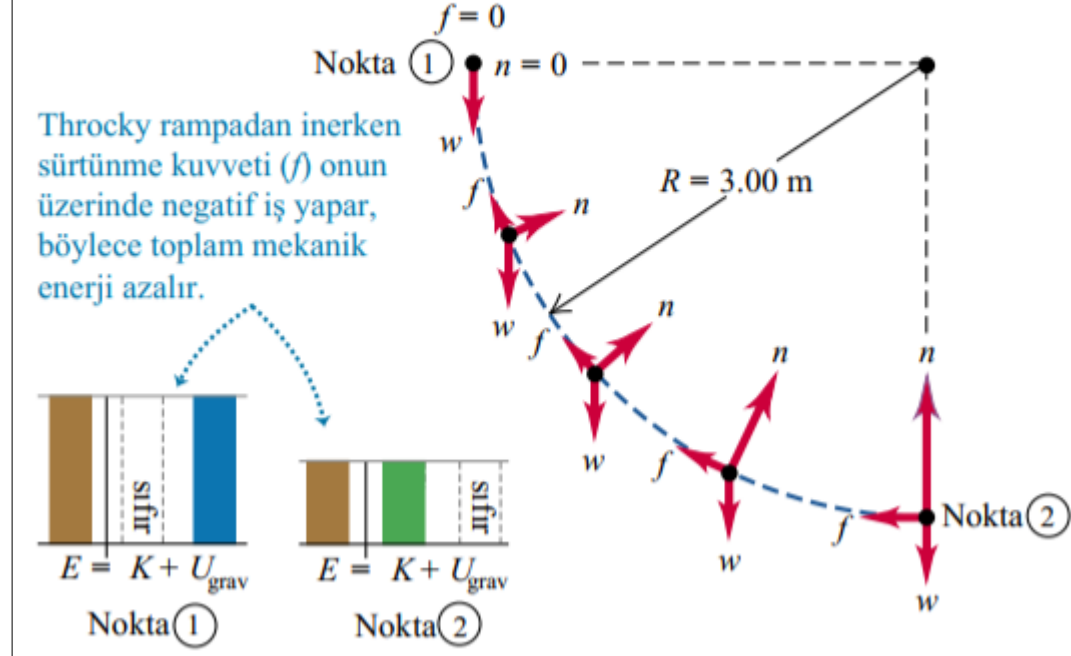
$$K_1 = 0$$

$$U_{\text{grav},1} = mgR = (25.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(3.00 \text{ m}) = 735 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25.0 \text{ kg})(6.00 \text{ m/s})^2 = 450 \text{ J}$$

$$U_{\text{grav},2} = 0$$

7.10 Throcky ve kaykayı sürtünmeli rampadan inerken serbest cisim diyagramı ve enerji çubuk grafikleri.



Denklem (7.7)'den, $W_f = K_2 + U_{\text{grav},2} - K_1 - U_{\text{grav},1}$
 $= 450 \text{ J} + 0 - 0 - 735 \text{ J} = -285 \text{ J}$

Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş -285 J 'dur; toplam mekanik enerji 285 J kadar azalmaktadır. Burada W_f 'nin neden negatif olmak zorunda olduğunu anlayabiliyoruz.

Örnek:

Sürtünmeli eğik düzlem

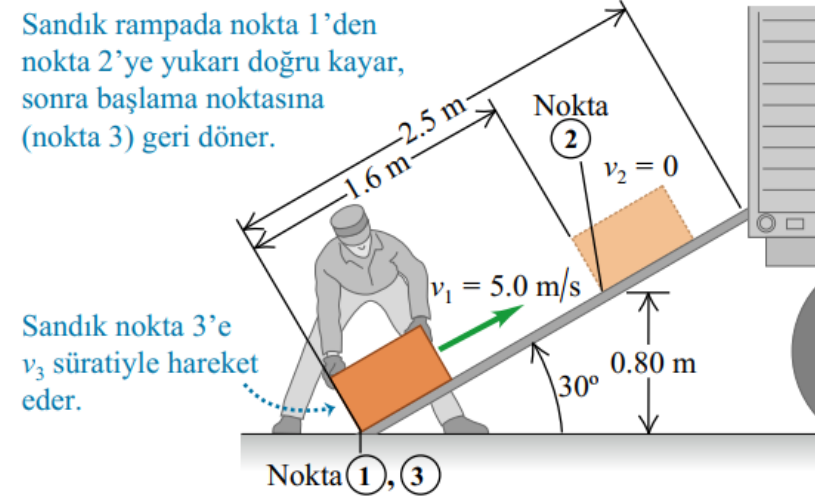
Kütlesi 12 kg olan bir sandık sürtünmeli bir rampadan yukarı doğru kaydırılarak kamyonun kasasına yüklemek isteniyor. Rampa yatay ile 30° açı yapmaktadır ve rampanın uzunluğu 2.5 m'dir. Bir işçi sürtünmeyi hesaba katmadan, sandığa başlangıçta 5.0 m/s bir sürat verirse rampanın tamamını tırmanacağını düşünüyor. Fakat sürtünme ihmal edilebilir olmadığından sandık önce 1.6 m yukarı doğru rampa boyunca kayıyor ve sonra geri yönde kaymaya başlıyor (Şekil 7.11). (a) Sandığa uygulanan sürtünme kuvvetinin sabit olduğunu farz ederek, bu kuvvetin büyüklüğünü bulunuz. (b) Sandık rampanın dibine eriştiğinde süratinin ne kadar olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

TASARLAMA: Hareketin birinci kısmı rampanın tabanındaki başlangıç noktası 1'den sandığın anlık olarak durduğu konum olan nokta 2'dir. Hareketin ikinci kısmında sandık rampanın dibine inmektedir; bu konumuna nokta 3 diyelim (Şekil 7.11a). Yer seviyesinde $y = 0$ kabul edelim (dolayısıyla $U_{\text{grav}} = 0$), bu durumda $y_1 = 0$, $y_2 = (1.6 \text{ m}) \sin 30^\circ = 0.80 \text{ m}$ ve $y_3 = 0$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$ ve $v_2 = 0$ (sandık nokta 2'de bir an için duruyor) olur. Problemin ilk kısmında (a) hedef değişkenimiz f sürtünme kuvvetinin büyüklüğüdür, ikinci kısımda (b) ise rampanın dibinde sandığın son sürati v_3 'ü bulmaktır.

7.11 (a) Sandık rampadan yukarı doğru kayar, durur ve sonra aşağıya kayar. (b) Nokta 1, 2, 3'teki enerji çubuk grafikleri.

- (a) Sandık rampada nokta 1'den nokta 2'ye yukarı doğru kayar, sonra başlama noktasına (nokta 3) geri döner.



- (b) Sürtünme kuvveti hareket sırasında sandık üzerinde negatif iş yapar, toplam mekanik enerji $E = K + U_{\text{grav}}$ azalır.
- (b) Enerji çubuk grafikleri:
- Nokta 1: $E = K + U_{\text{grav}}$
 - Nokta 2: $E = K + U_{\text{grav}}$
 - Nokta 3: $E = K + U_{\text{grav}}$

İŞLEM: (a) Enerji nicelikleri,

$$K_1 = \frac{1}{2}(12 \text{ kg})(5.0 \text{ m/s})^2 = 150 \text{ J}$$

$$U_{\text{grav},1} = 0$$

$$K_2 = 0$$

$$U_{\text{grav},2} = (12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.80 \text{ m}) = 94 \text{ J}$$

$$W_{\text{diğer}} = -fs$$

Burada f sürtünme kuvvetinin bilinmeyen büyüklüğüdür ve $s = 1.6$ m'dir. Denklem (7.7) kullanarak,

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_{\text{grav},2}$$

$$W_{\text{diğer}} = -fs = (K_2 + U_{\text{grav},2}) - (K_1 + U_{\text{grav},1})$$

$$f = -\frac{(K_2 + U_{\text{grav},2}) - (K_1 + U_{\text{grav},1})}{s}$$

$$= -\frac{(0 + 94 \text{ J}) - (150 \text{ J} + 0)}{1.6 \text{ m}} = 35 \text{ N}$$

Burada 35 N büyüklüğündeki sürtünme kuvveti 1.6 m üzerinde iş yaparak sistemin mekanik enerjisini 150 J'den 94 J'e indirmektedir (Şekil 7.11b).

(b) Sandık nokta 2'den nokta 3'e (rampanın dibi) giderken hem sürtünme kuvveti hem de yerdeğiştirme ters işaretli ama aynı büyüklüğe sahiptir; sürtünme kuvvetinin yaptığı iş sandık nokta 1'den nokta 2'ye giderken yaptığı işle aynı negatif değere sahiptir. Sürtünme kuvvetinin nokta 1 ile nokta 3 arasında yaptığı toplam iş;

$$W_{\text{diğer}} = W_{\text{sürtünme}} = -2fs = -2(35 \text{ N})(1.6 \text{ m}) = -112 \text{ J}$$

Problemin (a) kısmında $K_1 = 150 \text{ J}$ ve mekanik enerji ve $U_{\text{grav},1} = 0$ 'dir. Denklem (7.7)'ye göre

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{diğer}} = K_3 + U_{\text{grav},3}$$

$$K_3 = K_1 + U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},3} + W_{\text{diğer}}$$

$$= 150 \text{ J} + 0 - 0 + (-112 \text{ J}) = 38 \text{ J}$$

Sandık rampanın dibine başlangıçtaki 150 J'lük mekanik enerjinin sadece 38 J'ü ile geri dönüyor (Şekil 7.11b). $K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2$ denklemini kullanarak,

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38 \text{ J})}{12 \text{ kg}}} = 2.5 \text{ m/s}$$

DEĞERLENDİRME: Sandığın rampanın dibine indiğinde son sürati $v_3 = 2.5 \text{ m/s}$ 'dir. Bu da aynı noktadaki başlangıç sürat $v_1 = 5 \text{ m/s}$ 'den daha küçüktür.

Esneklik Potansiyel Enerjisi

Birçok durumda, yerçekiminden kaynaklanmayan potansiyel enerjilerle karşılaşırız. Buna bir örnek lastik sapandır. Sapan gerilirken kauçuk bant üzerinde geren kuvvet iş yapar. Bant serbest bırakıldığında ise sistemde biriken iş fırlatılan cismin kinetik enerjisine dönüşür.

Burada da Kısım 6.3'te gördüğümüz gibi, sadece ideal esnek yaylarda biriken enerjiyi inceleyeceğiz. Böyle ideal bir yayı küçük x mesafesi kadar uzatmak için $F = kx$ kuvvetini uygulamalıyız. Burada k yayın kuvvet sabitidir. İdeal yay kullanışlı bir modeldir; çünkü birçok elastik cisim kuvvet $\vec{F}$ ile yerdeğiştirme x arasında aynı doğrusal orantı özelliği gösterir.

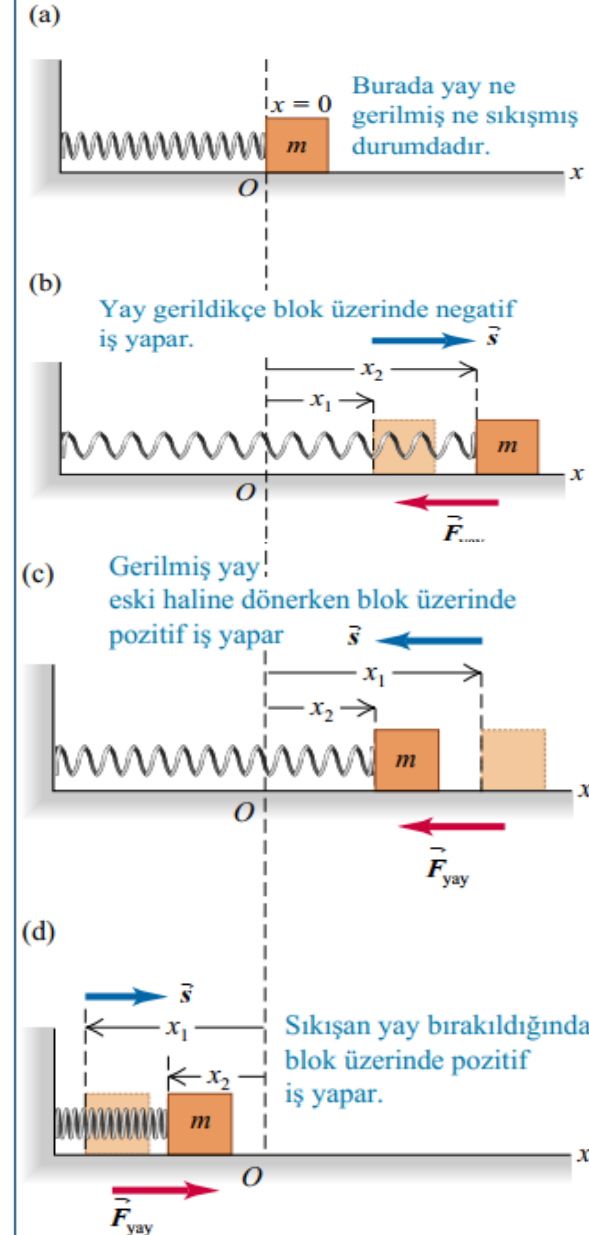
Kütleçekimi potansiyel enerjisi için yaptığımız gibi, öncelikle elastik (yay) kuvvetin yaptığı işi hesap edip bunu iş-enerji teoremiyle birleştireceğiz. Kütleçekimi potansiyel enerjisiyle arasındaki tek fark esneklik potansiyel enerjisinin tamamen yayın (veya diğer bükülebilir cisimlerin) içinde depolanmasıdır.

Şekil 7.13'te Şekil 6.18'deki ideal yayı tekrar ele alıyoruz;

Kısım 6.3'te gördüğümüz gibi yayı x_1 uzamasından x_2 uzaması durumuna geçirmek için yapmamız gereken iş;

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (\text{yay üzerinde yapılan iş})$$

7.13 Yatay bir yüzey üzerinde, bir bloğa bağlı olan yayın yaptığı işin hesaplanması. x büyüklüğü yayın gerilmesi veya sıkıştırılmasıdır.



$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (\text{yayın yaptığı iş})$$

Alt indis “el” (elastik = esnek) anlamına gelmektedir.

Yerçekimi kuvvetinin yaptığı iş tanımında olduğu gibi, yayın yaptığı işi sadece yerdeğiştirmenin başlangıç ve bitiş konumlarındaki nicelikler cinsinden ifade edilebiliriz. Bu nicelik $\frac{1}{2}kx^2$ 'dir ve **esneklik potansiyel enerjisi** olarak (elastik potansiyel enerji) olarak tanımlanır.

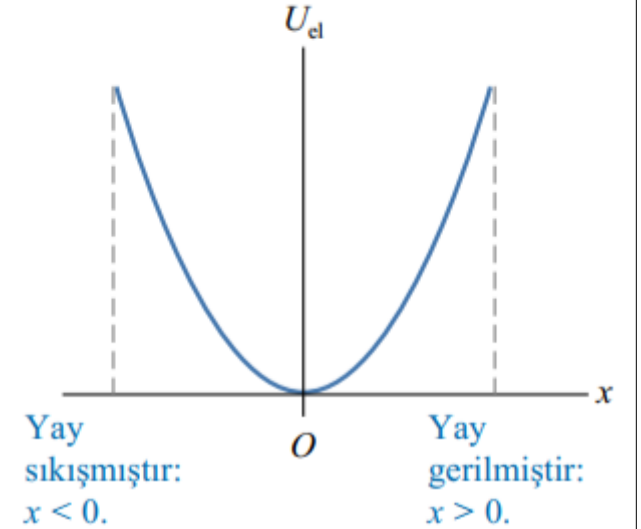
$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{esneklik potansiyel enerjisi}) \quad (7.9)$$

Şekil 7.14, Denklem (7.9) grafiğidir. U_{el} 'in birimi enerji (J)'dür, bu birim tüm enerji ve iş niceliklerinde kullanılır. Bunu Denklem (7.9)'da görebilmek için k 'nın biriminin N/m olduğunu hatırlayalım; 1 Nm = 1 J.

Denklem (7.9) kullanarak esnek kuvvetin kütle üzerine yaptığı işi (W_{el}) esneklik potansiyel enerjideki değişim cinsinden ifade edebiliriz;

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \quad (7.10)$$

7.14 İdeal bir yayın esneklik potansiyel enerji grafiği parabol şeklindedir: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$. Burada x yayın gerilme veya sıkışma mesafesidir. Esneklik potansiyel enerjisi U_{el} hiçbir zaman negatif olamaz.



İş-enerji teoremi $W_{\text{top}} = K_2 - K_1$ olduğunu söylemektedir, bu ilişki cismi etkileyen kuvvetlerin doğasından bağımsızdır. Elastik kuvvet cisim üzerinde iş yapan tek kuvvet ise,

$$W_{\text{top}} = W_{\text{el}} = U_{\text{el},1} - U_{\text{el},2}$$

O halde iş-enerji teoremi $W_{\text{top}} = K_2 - K_1$ 'ye göre,

$$K_1 + U_{\text{el},1} = K_2 + U_{\text{el},2} \quad (\text{sadece elastik kuvvet iş yapıyorsa}) \quad (7.11)$$

Burada U_{el} Denklem (7.9) tarafından verilir, yani;

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (\text{sadece elastik kuvvet iş yapıyorsa}) \quad (7.12)$$

Bu durumda toplam mekanik enerji $E = K + U_{\text{el}}$ (kinetik ve elastik potansiyel enerjilerin toplamı) korunan bir büyüklüktür. Buna örnek olarak Şekil 7.13'deki sürtünmesiz yatay yüzeyde yaya bağlı olarak kütlenin hareketini gösterebiliriz. Burada yayın uyguladığı kuvvet dışında iş yapan kuvvet yoktur.

Yerçekimi ve Esneklik Potansiyel Enerjilerinin Beraber Olduğu Durumlar

$W_{\text{top}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{el}} + W_{\text{diğer}}$ İş enerji teoremine buna göre:

$$W_{\text{grav}} + W_{\text{el}} + W_{\text{diğer}} = K_2 - K_1$$

Yerçekimi kuvvetinin yaptığı iş $W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$, yayın yaptığı iş $W_{\text{el}} = U_{\text{el},1} - U_{\text{el},2}$ 'dir. En sık rastlanan böylesi durumda enerji-iş teoremini şöyle yazabiliriz.

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + U_{\text{el},1} + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_{\text{grav},2} + U_{\text{el},2} \quad (\text{her durumda geçerli}) \quad (7.13)$$

veya eş değer bir şekilde,

$$K_1 + U_1 + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_2 \quad (\text{her durumda geçerli}) \quad (7.14)$$

Burada $U = U_{\text{grav}} + U_{\text{el}} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$, yerçekimi potansiyel enerjisi ile elastik potansiyel enerjilerin toplamıdır. Kısa olarak U 'ya sadece “potansiyel enerji” diyeceğiz.

Denklem (7.14) kinetik enerji, potansiyel enerji ve diğer kuvvetlerin yaptığı iş arasında en genel bağlantıdır ve şunu ifade etmektedir:

Esneklik ve yerçekimi kuvvetleri dışındaki tüm kuvvetlerin yaptığı iş sistemin toplam mekanik enerjisindeki $E = K + U$ değişime eşittir; burada U , yerçekimi potansiyel enerjisi (U_{grav}) ve esneklik potansiyel enerjisinin (U_{el}) toplamıdır.

Örnek 7.7

Örnek:

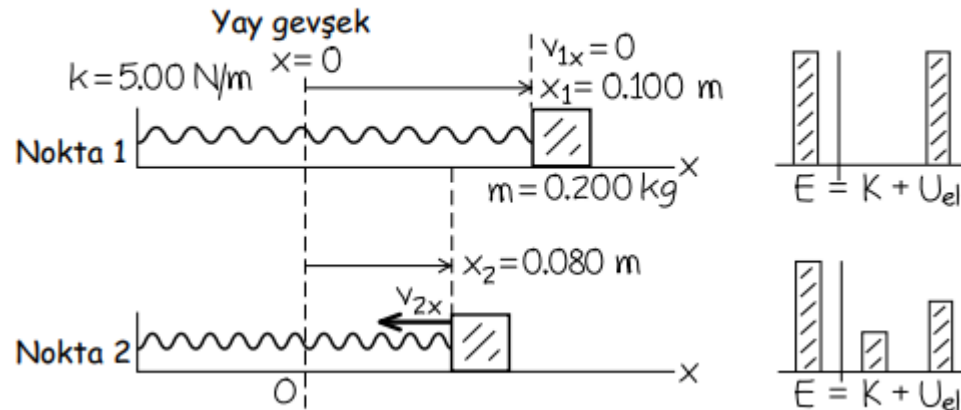
Kütlesi $m = 0.200$ kg olan bir cisim sürtünmesiz yatay hava masası üzerinde kuvvet sabiti $k = 5.00$ N/m olan yaya bağlı olarak durmaktadır. Yayı 0.100 m uzatacak şekilde kütleyi çekip, ilk süratsız olarak serbest bırakıyoruz. Kütle ($x = 0$) denge konumuna doğru harekete başlıyor. $x = 0.080$ m konumundan geçerken anlık süratı ne olur?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Yayın kütleye uyguladığı kuvvet cismin konumuna göre değiştiğinden problemi sabit ivme için geçerli formüllerle çözemeyiz. Onun yerine, kütle serbest bırakıldıktan sonra esneklik potansiyel enerjinin kinetik enerjiye dönüşeceğini düşünmeliyiz. Hareket sırasında kütle aynı yükseklikte kalmaktadır ve bu nedenle yerçekimi potansiyel enerjisi etkin değildir. Sonuç olarak,

$$U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

7.16 Problemin çözümü ve karşılık gelen enerji-çubuk grafikleri.



TASARLAMA: Şekil 7.16 problemle ilgili çizimimizi gösteriyor. İş yapan tek kuvvet yayın uyguladığı elastik (esneklik) kuvvetidir; $W_{diğer} = 0$. Denklem (7.11)'i kullanabiliriz. Kütlenin serbest bırakıldığı yer nokta 1 ve $x = 0.080$ m; nokta 2 olsun. Nokta 1'de ilk sürat sıfır olduğundan $v_{1x} = 0$ 'dır. Hedef değişkenimiz nokta 2'deki hız v_{2x} 'dir.

İŞLEM: Enerji ile ilgili büyüklükler,

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 = \frac{1}{2}(0.200 \text{ kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(5.00 \text{ N/m})(0.100 \text{ m})^2 = 0.0250 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00 \text{ N/m})(0.080 \text{ m})^2 = 0.0160 \text{ J}$$

Denklem (7.11)'i kullanarak;

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250 \text{ J} - 0.0160 \text{ J} = 0.0090 \text{ J}$$

$$v_{2x} = \pm \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm \sqrt{\frac{2(0.0090 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = \pm 0.30 \text{ m/s}$$

Negatif kökü seçiyoruz, çünkü kütle eksi x -yönünde hareket etmektedir. Yanıt $v_{2x} = -0.30$ m/s'dir.

Örnek:

Esneklik potansiyel enerjisiyle hareket ve diğer kuvvetlerin yaptığı iş

Örnek 7.7'deki sistemi ele alalım. m kütlesi $x = 0$ noktasında duran ve yay gevşek olsun. Kütleye artı x -yönünde büyüklüğü 0.610 N olan sabit $\vec{F}$ kuvveti uygulanıyor. Kütle $x = 0.100$ m'ye ulaştığı andaki sürati ne olur?

ÇÖZÜM

TASARLAMA: Nokta 1'de $x = 0$ olsun; hız $v_{1,x} = 0$ olur. Nokta 2'de $x = 0.100$ m'dir. (Bu noktalar Şekil 7.16'da gösterilen noktalardan farklıdır.) Hedef değişkeniniz cismin nokta 2'deki sürati $v_{2,x}$ 'dir.

(Örnek 7.7'de olduğu gibi yerçekimini hesaba katmayacağız çünkü cismin yüksekliği değişmemektedir. Burada sadece esneklik potansiyel enerjisi vardır ve $U = U_{el} = \frac{1}{2} kx^2$ 'dir.)

İŞLEM: Enerji büyüklükleri

$$K_1 = 0, \quad U_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 = 0, \quad K_2 = \frac{1}{2} mv_{2,x}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} (5.00 \text{ N/m})(0.100 \text{ m})^2 = 0.0250 \text{ J}$$

$$W_{\text{diğer}} = (0.610 \text{ N})(0.100 \text{ m}) = 0.0610 \text{ J}$$

$W_{\text{diğer}}$ 'i hesap etmek için kuvvetin büyüklüğü ile yerdeğiştirmeyi çarptık, çünkü her ikisi de artı x -yönündeler). Başlangıçta toplam mekanik enerji sıfırdır; sonra $\vec{F}$ 'nin yaptığı iş toplam mekanik enerjiyi 0.061 J'e çıkartır; bunun 0.0250 J kadarı esneklik potansiyel enerjisi ve geriye kalanı kinetik enerjidir. Denklem (7.13)'e göre

$$K_1 + U_1 + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{\text{diğer}} - U_2 \\ = 0 + 0 + 0.0610 \text{ J} - 0.0250 \text{ J} = 0.0360 \text{ J}$$

$$v_{2,x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0360 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = 0.60 \text{ m/s}$$

Burada kütle artı x -yönüne doğru hareket ettiği için değeri pozitif olan karekökü seçtik.

DEĞERLENDİRME: Yanıtımızı kontrol etmek için, yay ile kütlenin bağlantısını kopardığımızda ne olacağına bakalım. Bu durumda $\vec{F}$ tek iş yapan kuvvet olacaktı ve bütün anlarda potansiyel enerjisi sıfır olacaktı. Denklem (7.13)'e göre

$$K_2 = K_1 + W_{\text{diğer}} = 0 + 0.0610 \text{ J}$$

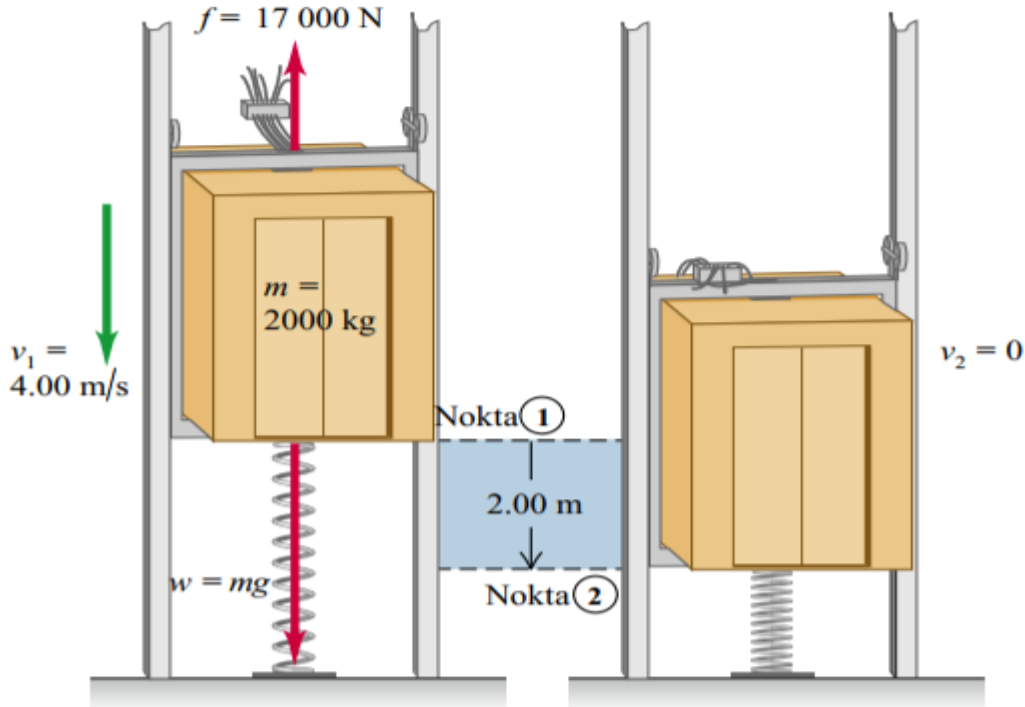
$$v_{2,x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0610 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = 0.78 \text{ m/s}$$

Bulduğumuz sonuç yukarıdaki sonuçtan daha büyük bir hızı ifade ediyor; çünkü yay gerildiğinde kütle üzerinde negatif iş yapmaktadır (Bkz. Şekil 7.13b).

“En kötü ihtimal” senaryosuna göre tasarlanan 2 000 kg’lık bir asansör, kablunun kopmasıyla 4.00 m/s süratle düşerken shaftın alt ucundaki emniyet yayıyla temas eder. Asansörü durdurması için yayın Şekil 7.17’deki gibi 2 m sıkışması gerektiği varsayılmıştır. Bu hareket sırasında bir emniyet kelepçesi asansöre sabit 17 000 N’luk bir sürtünme kuvveti uygulamaktadır. Bir tasarım danışmanı olarak yay kuvvet sabitinin ne olması gerektiğini hesaplamamız isteniyor.

ÇÖZÜM

7.17 Asansörün düşüşü bir yay ve sabit sürtünme kuvveti tarafından durduruluyor.



İŞLEM: Asansörün ilk sürati $v_1 = 4.00 \text{ m/s}$ ise başlangıçtaki kinetik enerji

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2\,000\text{kg})(4.00 \text{ m/s})^2 = 16\,000 \text{ J}$$

Asansör nokta 2’de durduğuna göre $K_2 = 0$ ’dır. Nokta 1’de potansiyel enerji U_1 sıfırdır; U_{grav} de sıfırdır çünkü $y_1 = 0$ ve $U_{\text{el}} = 0$ ’dır çünkü yay henüz sıkışmamıştır. Nokta 2’de hem yerçekimi hem de esneklik potansiyel enerjisi vardır, yani,

$$U_2 = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

Nokta 2’de yerçekimi potansiyel enerjisi,

$$mgy_2 = (2\,000 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-2 \text{ m}) = -39\,200 \text{ J}$$

Diğer kuvvet 17 000 N’luk sürtünme kuvveti 2 m’lik yerdeğiştirmeye ters yönde etki etmektedir, böylece

$$W_{\text{diğer}} = -(17\,000 \text{ N})(2.00\text{m}) = -34\,000 \text{ J}$$

Bütün işlemleri $K_1 + U_1 + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_2$ formülüne uygularsak;

$$K_1 + 0 + W_{\text{diğer}} = 0 + \left(mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2\right)$$

buradan da yay kuvvet sabitini şöyle bulabiliriz;

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(K_1 + W_{\text{diğer}} - mgy_2)}{y_2^2} \\ &= \frac{2[16\,000\text{J} + (-34\,000\text{J}) - (-39\,200\text{J})]}{(-2.00\text{m})^2} \\ &= 1.06 \times 10^4 \text{ N/m} \end{aligned}$$

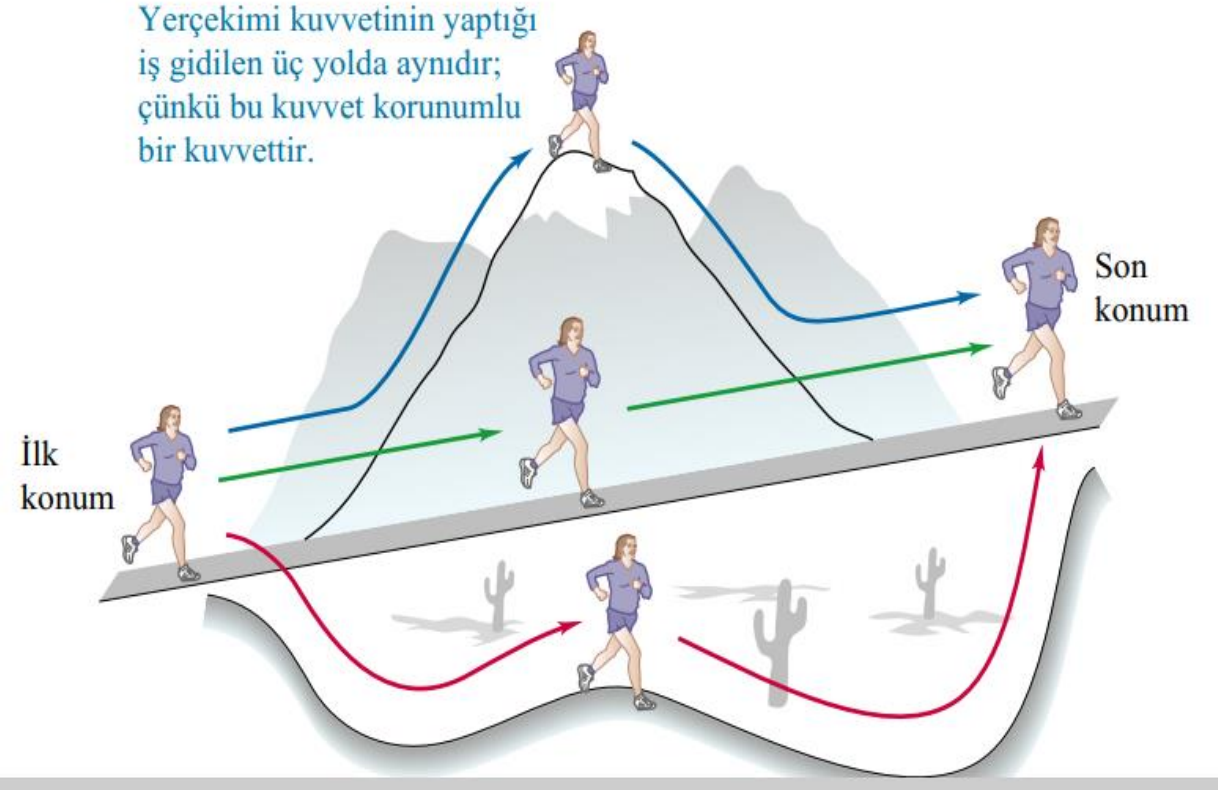
Korunumlu ve Korunumsuz Kuvvetler

Korunumlu Kuvvetler

Kinetik ile potansiyel enerji arasında karşılıklı dönüşüme izin veren kuvvete **korunumlu kuvvet** denir. Bu kuvvetlere ait iki örnek gördük: Yerçekimi kuvveti ve yayın kuvveti.

Korunumlu kuvvetlerin en temel özelliği yaptıkları işin daima tersine çevrilebilmesidir. Bir başka önemli özelliği de, nokta 1'den nokta 2'ye çeşitli yolları takip ederek gidebilir ama korunumlu kuvvetin bütün farklı yollar üzerinde yaptığı iş eşittir (Bkz. Şekil 7.18).

7.18 Yer çekimi gibi korunumlu bir kuvvet tarafından yapılan iş sadece hareketin başlangıç ile bitiş konumuna bağlıdır. Başlangıç ve bitmiş noktaları dışında izlenen yolda yapılan işten bağımsızdır.



Korunumlu bir kuvvetin yaptığı işin her zaman dört özelliği vardır:

1. Yapılan iş bir potansiyel enerji fonksiyonunun başlangıç ve bitiş değerlerinin farkı olarak ifade edilebilir.
2. Tersinir bir harekettir.
3. Cismin izleyeceği yoldan bağımsızdır, sadece başlangıç ve bitiş noktalarına bağlıdır.
4. Eğer başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise toplam iş sıfırdır.

Eğer iş sadece korunumlu kuvvetler tarafından yapılıyorsa toplam mekanik enerji $E = K + U$ sabittir.

Korunumsuz Kuvvetler

Korunamayan kuvvetler **korunumsuz kuvvet** olarak adlandırılır. Korunumsuz kuvvetin yaptığı iş bir potansiyel enerji fonksiyonu ile ifade edilemez. Kinetik sürtünme veya akışkan direnci gibi bazı korunumsuz kuvvetler, mekanik enerjinin kısmen kaybolmasına veya tamamen yok olmasına neden olurlar. Bu tür bir kuvvet **yitirimli kuvvet** olarak adlandırılır. Bunların yanı sıra mekanik enerjiyi arttırıcı korunumsuz kuvvetlerde de vardır. Oksijenin barutla kimyasal reaksiyona girmesiyle patlayan havai fişegin parçaları büyük bir kinetik enerji ile havaya fırlarlar. Bu reaksiyon sonucunda serbest kalan kuvvetler korunumsuzdur, çünkü reaksiyon geri döndürülemez. (Parçalar artık kendi kendilerine bir araya gelip havai fişegi geri oluşturmazlar!)

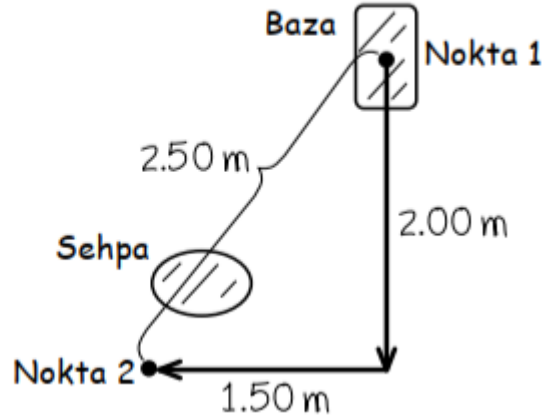
Örnek:

Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş gidilen yola bağlıdır

Mobilyalarınızın yerini değiştiriyorsunuz. 40 kiloluk bir bazalı yatağı 2.50 m boyunca hareket ettirmeyi planlıyorsunuz. Ancak yolunuzun üzerindeki ağır sehpa düz bir hatta harekete etmenize mani oluyor ve sehpayı yerinden oynatmak istemiyorsunuz. Bu nedenle yatağınızı önce 2.0 m daha sonra 1.50 m boyunca köşeli bir yol izleyerek kaydırmanız gerekiyor. Düz bir hatta kaydırmak yerine köşeli bir yol izleyerek yatağı hareket ettirmek için ne kadar daha fazla iş yapmanız gerekiyor? Kinetik sürtünme katsayısı 0.20 dir.

ÇÖZÜM

7.19 Bu problem için şemamız.



TASARLAMA: Şekil 7.19 şemamızı gösteriyor. Yatak nokta 1 ve nokta 2'de hareketsizdir, bu durumda $K_1 = K_2 = 0$. Burada (herhangi bir yay olmadığından) esneklik potansiyel enerjisi yoktur. Yerçekimi potansiyel enerjisi de yatak sadece yatay yönde hareket ettiği için değişmemektedir, yani $U_1 = U_2$. Denklem (7.14)'e göre

$W_{diğer} = 0$ 'dır. Yatağı hareket ettirmek için yapılan iş ise, sizin itmekle yaptığınız pozitif iş W_{siz} ile kinetik sürtünme kuvvetinin yaptığı negatif iş $W_{sürtünme}$ 'nin toplamıdır. Bunların toplamı da sıfır olduğuna göre,

$$W_{siz} = - W_{sürtünme} \text{ 'dir.}$$

W_{siz} 'in ne olduğunu bulabilmek için sürtünmenin yaptığı işi hesaplamamız gerekiyor.

İŞLEM: Zemin yatay olduğu için, yatağın normal kuvveti onun ağırlığı mg 'ye eşittir ve sürtünme kuvvetinin büyüklüğü de $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$ 'dir. İzlediğiniz her yol için yapacağınız iş;

$$\begin{aligned} W_{siz} &= - W_{sürtünme} = - (-f_k s) = + \mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.50 \text{ m}) \\ &= 196 \text{ J} \quad (\text{eğer düz hatta ilerlenseydi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{siz} &= - W_{sürtünme} \\ &= (0.200)(40.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ m} + 1.50 \text{ m}) \\ &= 274 \text{ J} \quad (\text{köşeli yol izlendiğinde}) \end{aligned}$$

Sizin yapacağınız fazladan iş $274 \text{ J} - 196 \text{ J} = 78 \text{ J}$

DEĞERLENDİRME: Düz bir hatta sürtünmenin yaptığı iş $W_{sürtünme} = - W_{siz} = - 196 \text{ J}$ Köşeli yolda ise -274 J 'dür. Sürtünmenin yaptığı iş seçtiğiniz yola bağlıdır, bu da gösteriyor ki sürtünme korunumsuz bir kuvvettir.

Enerjinin Korunum Yasası

Korunumsuz kuvvetler potansiyel enerji cinsinden ifade edilemezler. Bu korunumsuz kuvvetlerin yaptığı etkiyi kinetik ve potansiyel enerjiler dışında başka tür bir enerji cinsinden ifade edebiliriz. Bir araba fren yapıp tekerleklerini bloke ederek kayarak durduğunda, lastikler ve yolun yüzeyi bir miktar ısınır. Maddenin durum değişikliğiyle ilgili bu enerjiye **iç enerji** denir. Bir cismin sıcaklığını yükselttiğimizde o cismin iç enerjisi artar, sıcaklığını alçalttığımız zaman ise cismin iç enerjisi düşer.

İç enerji kavramının önemini anlamak için pürüzlü bir yüzey üzerinde kayan cismi göz önüne alalım. Sürtünme kuvveti kayan cisim üzerinde negatif iş yapar; cismin ve üzerinde kaydığı yüzeyin iç enerjilerindeki değişim pozitiftir (her iki cisminde sıcaklığı artar). Yapılan çok hassas deneyler gösteriyor ki, iç enerjideki artış sürtünme kuvvetinin yaptığı işin mutlak değerine tam olarak eşittir. Başka bir deyişle,

$$\Delta U_{iç} = -W_{diğer}$$

Burada $\Delta U_{iç}$ iç enerjideki değişimdir. Bunu denklem (7.7) veya (7.14) içine koyarsak;

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{iç} = K_2 + U_2$$

buluruz. $\Delta K = K_2 - K_1$ ve $\Delta U = U_2 - U_1$ yazarsak, ifadeyi şöyle tanımlarız:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{iç} = 0 \quad (\text{enerjinin korunumu yasası}) \quad (7.15)$$

Kuvvet ve Potansiyel Enerji

$$W = -\Delta U$$

Bunu Δx kadar küçük yerdeğiştirmeye uygulayalım $F_x(x)$ bu yerdeğiştirme sırasında yaklaşık olarak $F_x(x)\Delta x$ kadar iş yapar. Burada “yaklaşık” demek durumundayız; çünkü $F_x(x)$, Δx aralığında bir miktar değişecektir. Böylece;

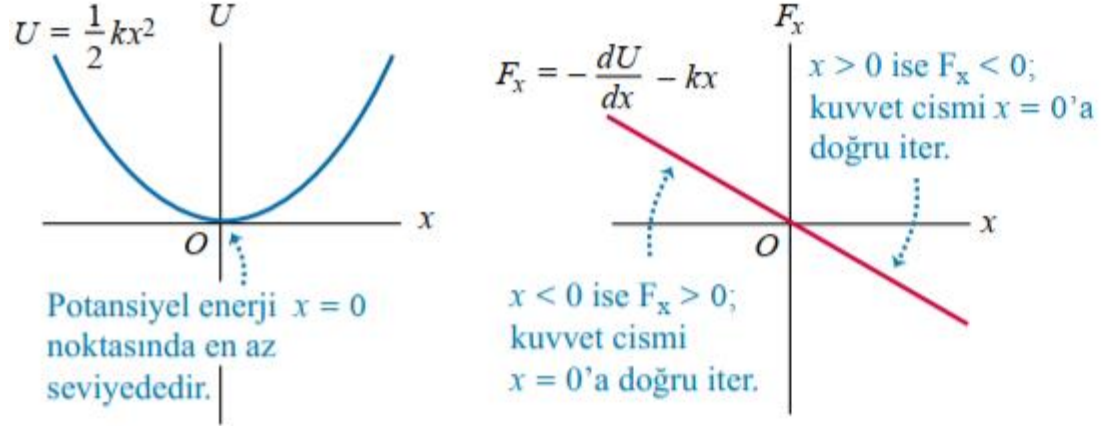
$$F_x(x) \Delta x = -\Delta U \quad \text{ve} \quad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

yaklaşık olarak doğrudur. Bu hesabın bizi nereye götüreceğini görüyorsunuz. $\Delta x \rightarrow 0$ limitini aldığımızda F_x değişimi ihmal edilecek kadar küçülür, böylece kesin ifadeye ulaşırız:

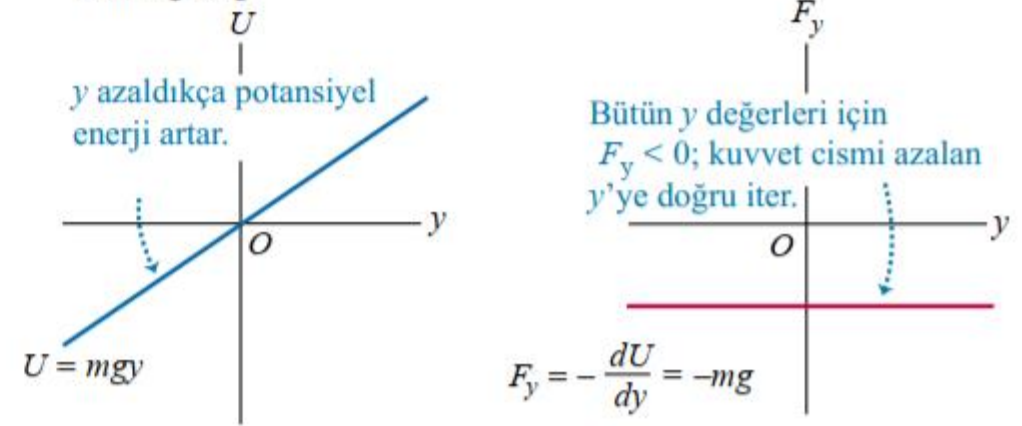
$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (\text{potansiyel enerjiden kuvvet, tek boyutta}) \quad (7.16)$$

7.22 Korunumlu bir kuvvet, ona karşılık gelen potansiyel enerji fonksiyonu türevinin negatifidir.

(a) Yayın potansiyel enerji ve kuvvetin x 'in fonksiyonu olarak grafiği



(b) Yerçekimi potansiyel enerjisi ve kuvvetin y 'in fonksiyonu olarak grafiği



$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$ —————> buluruz. Bu da yayın ucundaki cisme uyguladığı kuvvet için doğru bir ifadedir (Şekil 7.22a). Benzer bir şekilde, yerçekimi potansiyeli için $U(y) = mgy$ (yerçekimi potansiyelinin y -fonksiyonu olduğunu göz önünde tuttuk); $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$ elde edilir. Bu da yerçekimi kuvveti için doğru ifadedir (Şekil 7.22b).

Üç Boyutta Kuvvet ve Potansiyel Enerji

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y}$$

$$F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ ve } \Delta z \rightarrow 0$$

∂ sembolü yerine d de kullanılabilir. Bu durumda şöyle yazabiliriz:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (7.17)$$

$\vec{F}$ kuvvetini tek bir vektör ifadesiyle yazmak için birim vektör kullanabiliriz.

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) \quad (\text{potansiyel enerjiden gelen kuvvet}) \quad (7.18)$$

U 'nun gradienti

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad (7.19)$$

Kontrol etmek için Denklem (7.19)'a yerçekimi potansiyel enerjisi olan $U = mgy$ 'i yerleştirelim:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z} \hat{k}\right) = (-mg) \hat{j}$$

Elde ettiğimiz denklem yerçekimi kuvvetinin bilinen ifadesidir.

Örnek:

İki boyutlu ortamda kuvvet ve potansiyel enerji

Düz sürtünmesiz hava hokeyi tablasının üzerinde bir disk kaymaktadır. Diskin koordinatları x ve y 'dir. Bu disk aşağıda potansiyel enerji fonksiyonu verilen bir korunumlu kuvvete göre hareket etmektedir.

$$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Diskün üzerine etki eden kuvvet ile bu kuvvetin konum fonksiyonu olarak büyüklüğünün ifade edilmesi istenmektedir.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: $U(x,y)$ fonksiyonu ile başlayabilmek için korunumlu $\vec{F}$ kuvvetine karşılık gelen büyüklüğü ve bu kuvvetin vektör bileşenlerini bulmamız gerekmektedir.

TASARLAMA: Denklem (7.18)'i kullanarak $U(x,y)$ 'den kuvvetin bileşenlerini bulabiliriz. Bu fonksiyon z 'ye bağımlı değildir; bu durumda z 'ye göre U 'nun kısmi türevi $\partial U/\partial z = 0$ 'dır ve kuvvetin z -bileşeni yoktur. Bu durumda kuvvetin büyüklüğünü belirlemek için vektörün büyüklüğünü belirlediğimiz formülü kullanacağız: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

İŞLEM: Kuvvetin x ve y -bileşenleri şöyledir:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

Denklem (7.18)'deki eşitliğe göre vektöryel ifade olarak karşılığı:

$$\vec{F} = -k(x\hat{i} + y\hat{j})$$

Eşitlikteki $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$ parçacığın konum vektörü olduğuna göre ifadeyi şu şekilde yazabiliriz: $\vec{F} = -k\vec{r}$ Bu eşitlik şunu ifade etmektedir: Her noktadaki kuvvet, o noktadaki konum vektörü ile ters yöndedir. Başka bir deyişle, her noktadaki kuvvet başlangıç yönüne doğru çevrilmiştir. Başlangıçtaki potansiyel enerji minimum olduğuna göre kuvvet diski azalan potansiyel enerji yönüne doğru çekmektedir.

Herhangi bir noktadaki kuvvetin büyüklüğü;

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

Burada r parçacığın başlangıçtan uzaklığını belirtmektedir. Disk eğer Hooke yasasına uyan ve gerilmediğinde uzunluğu (problemdeki diğer uzaklıklarla karşılaştırıldığında) ihmal edilecek kadar küçük olan bir yayın ucuna iliştilmişse, diski etkileyen kuvvet örnekte verilen kuvvettir. (Yayın diğer ucu başlangıç noktasında hava hokeyi tablasına iliştilmiştir.)

DEĞERLENDİRME: Sonucu kontrol etmek için potansiyel enerji fonksiyonunu $U = (1/2)kr^2$ olarak da ifade edebileceğimizi hatırlayalım. Bu şekilde yazıldığında U sadece bir r koordinatının fonksiyonu olmaktadır. Bu durumda Denklem (7.16)'yı x 'in yerine r 'yi koyarak kullanırsak,

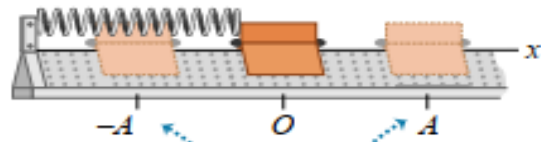
$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

Yukarıda da hesapladığımız gibi kuvvetin büyüklüğü kr 'dir; eksi işareti kuvvetin radyal olarak içe dönük (başlangıç noktasına doğru) olduğunu göstermektedir.

Enerji Diyagramları

7.23 (a) Hava yastığı üzerinde kayan bir cisim. Yay cisme $F_x = -kx$ kuvveti uyguluyor. (b) Potansiyel enerji fonksiyonu.

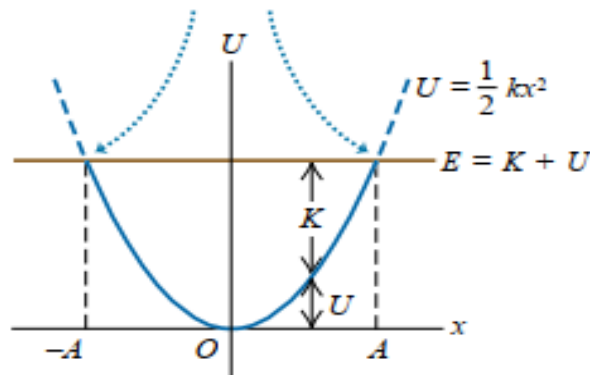
(a)



Kayan cismin hareketinin sınırları $x = A$ ve $x = -A$ noktalarıdır.

(b)

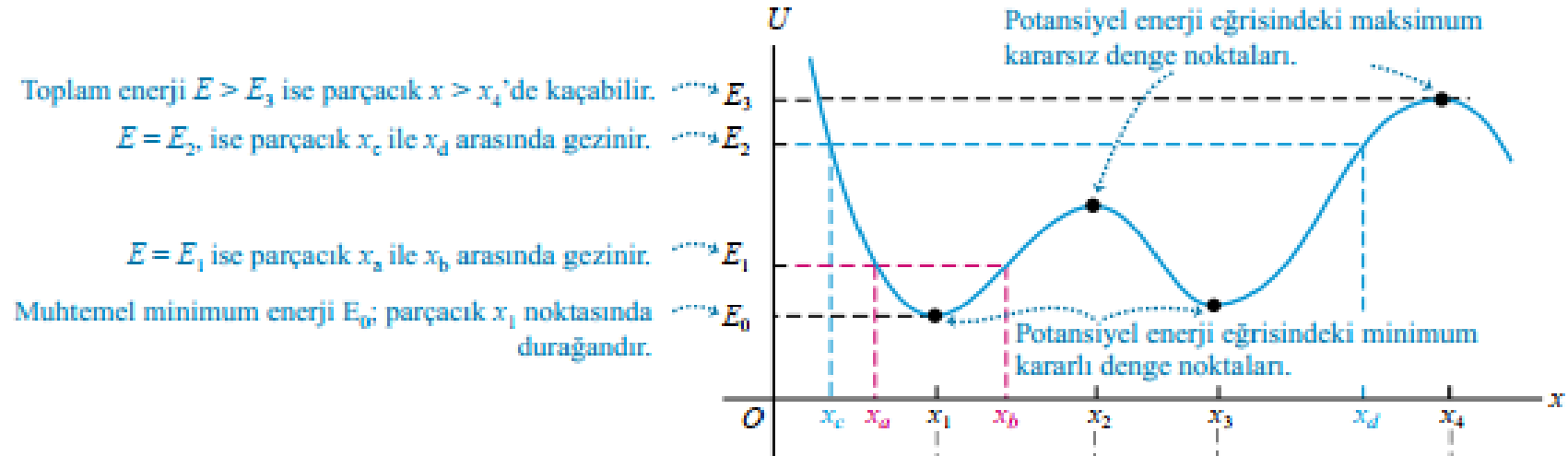
Grafikte U eğrisinin toplam mekanik enerji E 'yi temsil eden yatay çizgiyi kestiği noktalar hareketin sınırlarıdır.



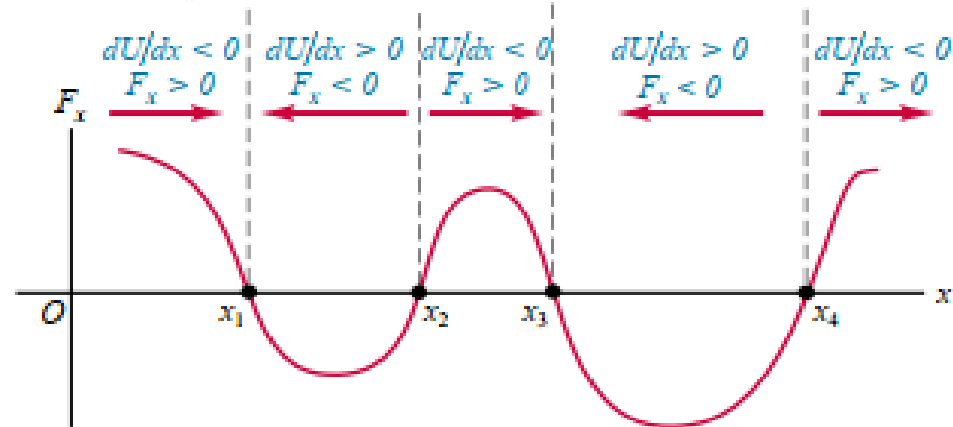
Bir parçacık bir doğru boyunca korunumlu bir kuvvetin etkisi altında hareket ediyorsa sadece potansiyel enerji grafiğine (U_x) bakarak hareketin nasıl geliştiğini anlayabiliriz. Şekil 7.23 hava yastığı üzerinde sürtünmesiz olarak kayan m kütle-sini göstermektedir. Yay kütleyle x -bileşeni $F_x = -kx$ olan bir kuvvet uygulamaktadır. Şekil 7.23b bu kuvvete karşılık gelen potansiyel enerji $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ grafiğini gösteriyor. Eğer kütle yatay yönde sadece ideal yayın uyguladığı elastik kuvvetten etkileniyor ise, toplam mekanik enerji $E = K + U$ sabittir ve x -koordinatından bağımsız bir değer alır. Mekanik enerji E 'nin grafiği x 'in fonksiyonu olarak sabit bir yatay çizgidir. **Enerji diyagramı** deyimini parçacığın etkisi altında olduğu kuvvetten kaynaklanan potansiyel enerji fonksiyonu $U(x)$ ile mekanik enerji E 'yi birlikte gösteren grafikler için kullanacağız.

7.24 Potansiyel enerji fonksiyonu $U(x)$ 'in, $F_x(x) = 0$ noktasına karşılık gelen maksimum ve minimumları.

(a) Hipotetik (varsayılan) bir potansiyel enerji fonksiyonu $U(x)$



(b) Kuvvet $F_x(x) = -dU(x)/dx$ 'in x -bileşenleri



Bunun anlamı şudur: Fiziksel yapıyı bozmadan potansiyel enerji fonksiyonuna daima bir sabit ekleyebilirsiniz. ■

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ