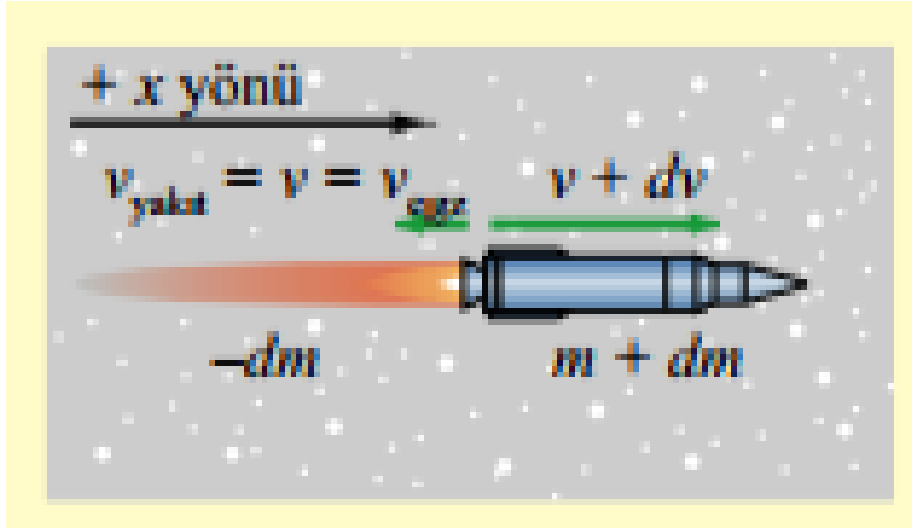
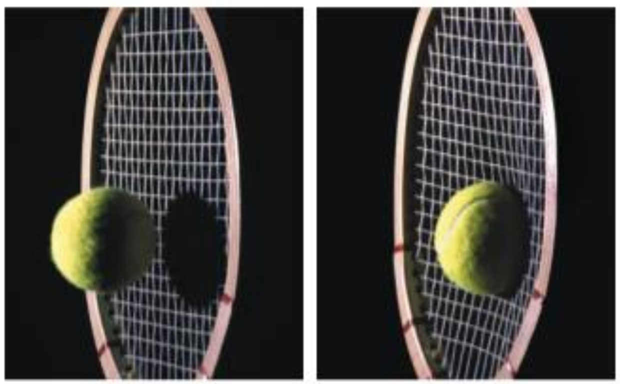




FİZİK I DERSİ
Bölüm 9. Momentum, İtme ve Çarpışmalar

Ders kaynakları:

1. YOUNG ve FREEDMAN, 12 Baskı, Türkçesi

2. Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar)

Öğrenim Konuları

- Bir parçacığın momentumu ne anlama gelir ve parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin itmesi momentumu nasıl değiştirir.
- Parçacık sisteminin toplam momentumunun sabit (korunumlu) olması için gerekli şartlar nelerdir.
- Çarpışan iki kütleyi içeren problemler nasıl çözülür.
- Esnek, esnek olmayan ve hiç esnek olmayan çarpışmalar arasındaki fark nedir.
- Bir parçacık sisteminin kütle merkezi nasıl tanımlanır, kütle merkezinin hareketini tanımlayan şey nedir.

Momentum ve İtme

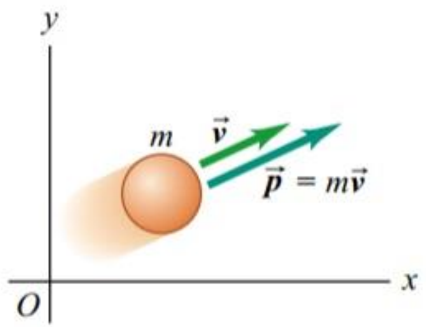
Newton un ikinci kanunu hatırlayarak;

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (8.1)$$

Bu m kütlesi sabit olduğundan türev içine alabiliriz. Dolayısıyla, Newton'un ikinci yasası, parçacık üzerine etkiyen net kuvveti parçacığın kütlesi ve hızının çarpımı $m\vec{v}$'nin zamanla değişimi hızına eşit olduğunu belirtir. Buna parçacığın **momentumu** veya **doğrusal momentum** denir. Momentum için $\vec{p}$ sembolünü kullanırsak,

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(momentumun tanımı)} \qquad (8.2)$$

8.1 Bir parçacığın hız ve momentum vektörleri.



Momentum $\vec{p}$ bir vektörel niceliktir; bir parçacığın momentumu, hızı $\vec{v}$ ile aynı yöndedir.

Momentum, hız ile aynı yönlü *vektörel* bir niceliktir.

Momentum ve İtme

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(Newton'un ikinci yasasının momentum cinsinden ifadesi)} \qquad (8.4)$$

Bir parçacık üzerine etkiyen net kuvvet (bütün kuvvetlerin vektörel toplamı) parçacığın momentumunun zamana bağlı değişim hızına eşittir. Bu ifade ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$ değil) aslında, (Newton momentumu "hareket niceliği" olarak tanımlamış olmasına rağmen) Newton'un ikinci yasa olarak ileri sürdüğü fikrin ifadesidir. Bu yasa sadece eylemsiz referans sistemleri için geçerlidir.

Belirli bir $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında sabit bir $\sum \vec{F}$ net kuvveti etkisi altında bulunan m kütleli bir parçacığı düşünelim. (Değişken kuvvet haline biraz sonra değineceğiz.) Net kuvvetin itmesi net kuvvetin ve zaman aralığının çarpımıdır ($\vec{J}$ olarak gösterilir);

$$\vec{J} = \sum \vec{F}(t_2 - t_1) = \sum \vec{F}\Delta t \qquad \text{(sabit kuvvet varsayımı)} \qquad (8.5)$$

Momentum ve İtme

İtmenin neye yaradığını anlamak için, momentum cinsinden ifade edilen Newton'un ikinci yasası Denklem (8.4)'e tekrar dönelim. Eğer net kuvvet $\sum \vec{F}$ sabit ise, $d\vec{p}/dt$ oranı da sabittir. O halde, $d\vec{p}/dt$ oranı $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında momentumdaki toplam $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ değişimine eşittir;

$$\sum \vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Bu denklemin her iki tarafını $t_2 - t_1$ ile çarptığımızda

$$\sum \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

denklemini buluruz. Bu denklemi Denklem (8.5)'le karşılaştırdığımızda **itme-momentum teoremi** olarak bilinen sonuca ulaşırız.

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \text{(itme-momentum teoremi)} \qquad (8.6)$$

Bir parçacığın belirli bir zaman aralığında momentumundaki değişimi, aynı zaman aralığında parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin itmesine eşittir.

Momentum ve İtme

İtme-momentum teorisi aynı zamanda kuvvetlerin sabit olmadığı durumlarda da geçerlidir. Bunu anlamak için, Newton'un ikinci yasası $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$ eşitliğini t_1 ve t_2 zaman aralığında integre edelim:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Soldaki integral, net kuvvet $\sum \vec{F}$'in bu zaman aralığında itmesi $\vec{J}$'nin tanımını verir;

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt \qquad \text{(itmenin genel tanımı)} \qquad (8.7)$$

Bu tanımla itme-momentum teoremi $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ yani Denklem (8.6), $\sum \vec{F}$ zaman içinde değişse bile geçerliliğini korur.

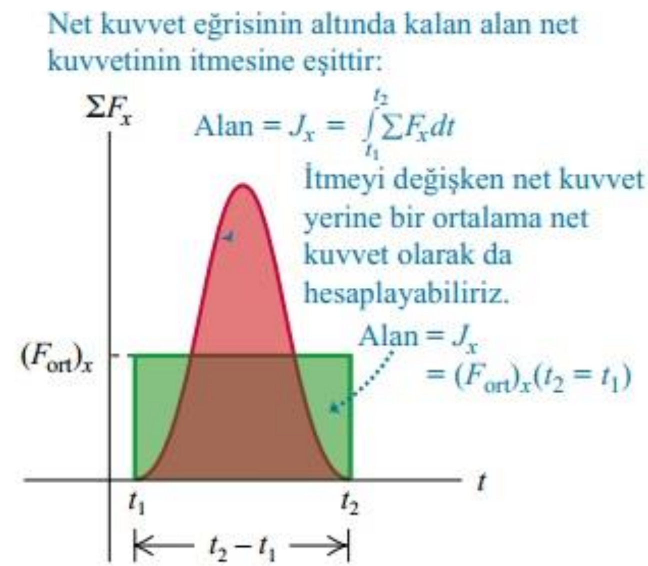
Öyle bir ortalama net kuvvet $\vec{F}_{ort}$ tanımlayabiliriz ki, $\sum \vec{F}$ sabit olmadığında bile itme

$$\vec{J} = \vec{F}_{ort} (t_2 - t_1) \qquad (8.8)$$

olur. $\sum \vec{F}$ sabit olduğunda $\sum \vec{F} = \vec{F}_{ort}$ olur ve Denklem (8.8) Denklem (8.5)'e indirgenir.

8.3 $\sum \vec{F}$ zaman t'nin fonksiyonu olarak çizildiğinde, eğrinin altında kalan alanın anlamı.

(a)

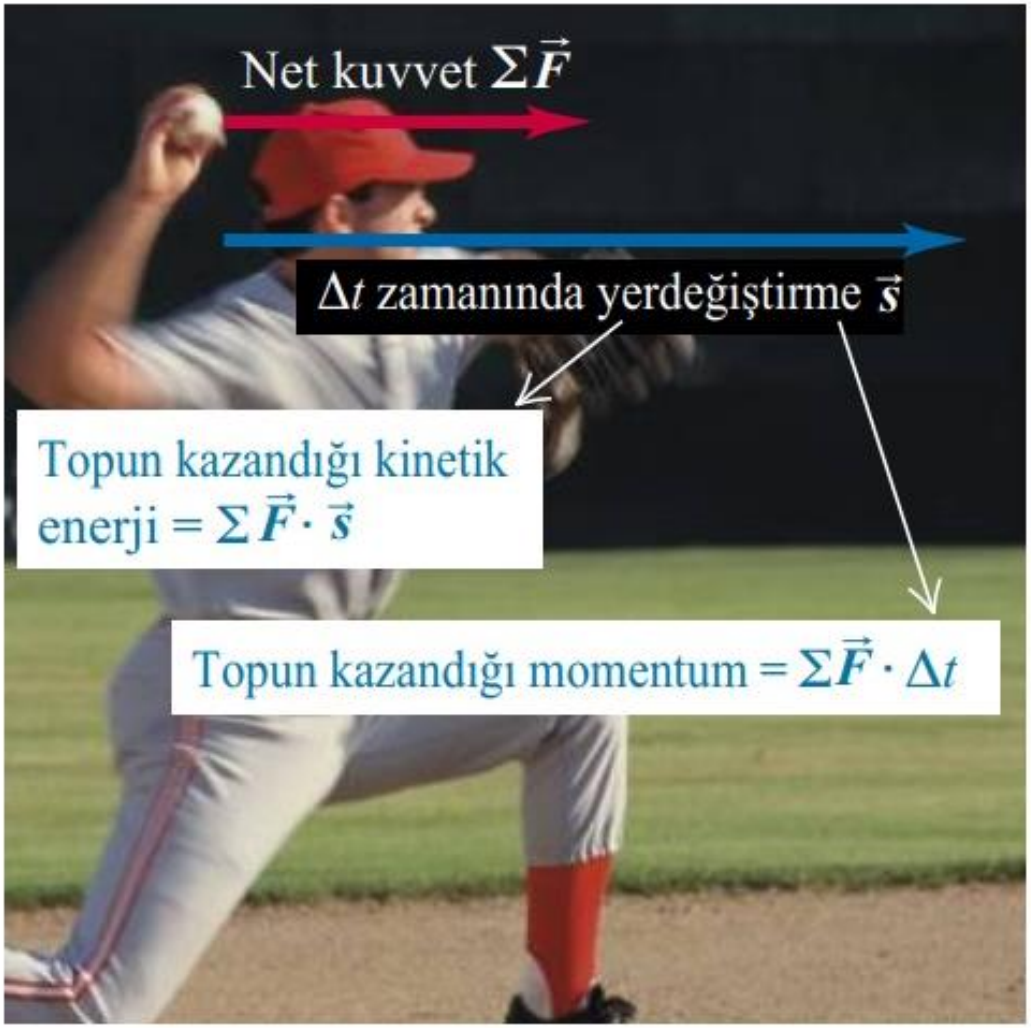


(b)

Momentum ve İtme

Momentum ve kinetik enerjiyi karşılaştırmak için aşağıdaki şekil incelenebilir;

8.4 Fırlatılan beysbol topunun kinetik enerjisi, oyuncunun top üzerinde yaptığı işe eşittir (kuvvet çarpı topun atma süresi boyunca aldığı yol). Aynı topun momentumu, oyuncunun topa verdiği itmedir (kuvvet çarpı uygulanma süresi).

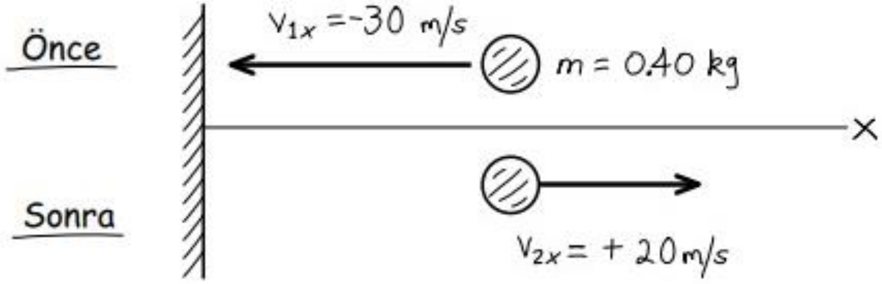


Örnek Duvara çarpan top

Tuğla bir duvara karşı 0.40 kg'lık bir topu fırlatıyorsunuz. Top yatay yönde sola doğru giderken 30 m/s hızla duvara çarpıp yine yatay yönde 20 m/s hızla geri geliyor. (a) Topun duvara çarpma esnasında topa etki eden net kuvvetin itmesini bulunuz. (b) Top 0.010 *s* boyunca duvarla temas halinde kalıyorsa duvarın topa uyguladığı ortalama yatay kuvvetin değerini bulunuz.

TASARLAMA: Şekil 8.5 hareketi gösteriyor. Hareket tamamen yatay olduğundan sadece tek bir eksen kullanacağız. *x*-eksenini yatay olarak alalım, artı *x*-yönü sağa doğru olsun. (a) şıkkında hedef değişkenimiz itmenin *x*-bileşeni J_x'tir. Denklem (8.9)'u kullanarak J_x'i son ve ilk momentumların farkı olarak ifade edeceğiz. (b) şıkkında hedef değişkenimiz kuvvet F_{ort}'nın *x*-bileşeninin ortalama değeridir. Bir defa J_x'si bulduktan sonra bu ortalama kuvvet Denklem (8.9) yardımıyla bulunur.

8.5 Bu problem için çizimimiz.



İŞLEM: (a) *x*-ekseni seçtiğimize göre, topun momentumunun *x*-bileşeninin ilk ve son hızları;

$$p_{1x} = mv_{1x} = (0.40\ \text{kg})(-30\ \text{m/s}) = -12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{2x} = mv_{2x} = (0.40\ \text{kg})(+20\ \text{m/s}) = +8.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Denklem (8.9)'un *x*-bileşeni kullanılarak, itmenin *x*-bileşeni momentumun *x*-bileşeninin değişimine eşittir;

$$J_x = p_{2x} - p_{1x}$$
$$= 8.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 20\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = 20\ \text{N}\cdot\text{s}$$

(b) Çarpışma süresi $t_2 - t_1 = \Delta t = 0.010$ s Denklem (8.9)'un *x*-bileşeni kullanılarak $J_x = (F_{ort})_x(t_2 - t_1) = (F_{ort})_x\,\Delta t$, yani

$$(F_{ort})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20\ \text{N}\cdot\text{s}}{0.010\ \text{s}} = 2\,000\ \text{N}$$

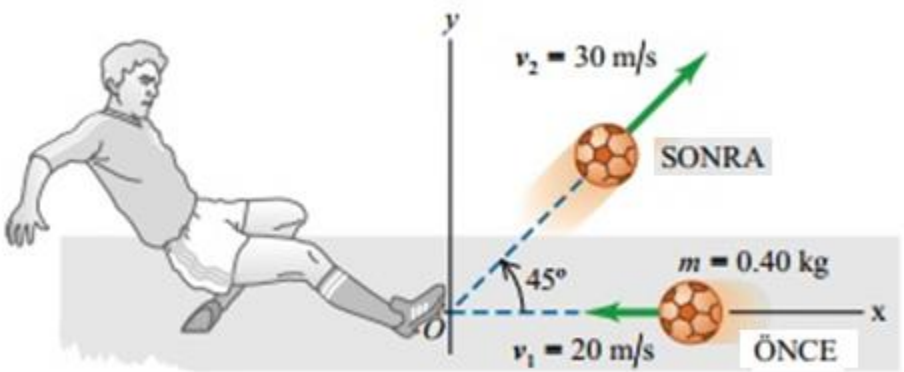
Örnek Futbol topuna şut atmak

Bir futbol topunun kütlesi 0.40 kg'dır ve başlangıçta sola doğru 20 m/s hızla hareket etmektedir. Top şut çekildikten sonra yatayla 45° açı yaparak sağa doğru 30 m/s hızla ilerlemeye başlar (Şekil 8.7a) Çarpışmanın $\Delta t = 0.010$ s sürdüğünü farz ederek net kuvvetin itmesini ve ortalama net kuvveti bulunuz.

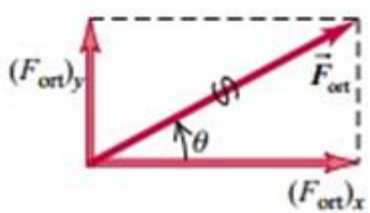
TASARLAMA: x-eksenini yatay olarak sağa doğru alıyoruz, y-ekseni yukarı doğru olacak. Hedef değişkenlerimiz topa uygula-

8.7 (a) Topa çekilen şut. (b) Topa etkiyen ortalama kuvvetin bileşenleri yardımıyla bulunması.

(a) Önce ve sonra diyagramı



(b) Top üzerindeki ortalama kuvvet



İŞLEM: Eksen seçimimize uygun şekilde topun hızının bileşenlerini tekmeden önce (alt indis 1) ve sonra (alt indis 2) olarak bulalım.

$$v_{1x} = -20\,\mathrm{m/s} \qquad v_{1y} = 0$$

$$v_{2x} = v_{2y} = (30\ \mathrm{m/s})(0.707) = 21.2\ \mathrm{m/s}$$

$$(\cos 45° = \sin 45° = 0.707 \text{ olduğundan})$$

İtmenin x-bileşeni, momentumun x-bileşeninin değişimine eşittir. Aynısı y-bileşenleri için de geçerlidir;

$$J_x = p_{2x} - p_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x})$$
$$= (0.40\ \mathrm{kg})[21.2\ \mathrm{m/s} - (-20\ \mathrm{m/s})] = 16.5\ \mathrm{kg\,.\,m/s}$$
$$J_y = p_{2y} - p_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y})$$
$$= (0.40\ \mathrm{kg})\,(21.2\ \mathrm{m/s} - 0) = 8.5\ \mathrm{kg\,.\,m/s}$$

Ortalama net kuvvetin bileşenleri,

$$(F_{ort})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = 1650\ \mathrm{N} \qquad (F_{ort})_y = \frac{J_y}{\Delta t} = 850\ \mathrm{N}$$

Ortalama net kuvvetin büyüklüğü ve yönü,

$$F_{ort} = \sqrt{(1\,650\mathrm{N})^2 + (850\mathrm{N})^2} = 1.9 \times 10^3\mathrm{N}$$

$$\theta = \arctan\frac{850\ \mathrm{N}}{1650\ \mathrm{N}} = 27°$$

Burada [] açısı, artı x-ekseninden yukarı doğru ölçülmektedir. Top başlangıçta durağan olmadığından, topun son hızının yönü onu etkileyen ortalama kuvvetin yönünden farklı olduğuna dikkat ediniz.

Momentumun Korunumu

Her hangi bir sistemde sistemin bir parçacığın diğeri üzerinde uyguladığı kuvvete **iç kuvvet** denir. Sistemin dışından sitemdeki parçalardan herhangi birine uygulanan herhangi bir kuvvete **dış kuvvet** denir. Şekil 8.8'deki sistemde *B* parçacığının *A* parçacığına uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{B-A}$, *A* parçacığının *B* parçacığına uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{A-B}$'dır. Dış kuvvet yoktur. Bu sisteme **izole sistem** (yalıtılmış) denir.

$$\vec{F}_{B-A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{A-B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \qquad (8.10)$$

Her iki parçacığın da momentumu değişmektedir, Newton'un üçüncü yasasına göre bu değişimler birbirleriyle bağlantılıdır. $\vec{F}_{B-A}$ ve $\vec{F}_{A-B}$ kuvvetlerinin daima büyükleri eşit ve yönleri daima birbirlerine zıttır. Yani, $\vec{F}_{B-A} = \vec{F}_{A-B}$ veya $\vec{F}_{B-A} + \vec{F}_{A-B} = 0$. Denklem (8.10)'daki iki denklemi birbirlerine eklersek;

$$\vec{F}_{B-A} + \vec{F}_{A-B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0 \qquad (8.11)$$

Momentumlarındaki değişme birbirlerine eşit ve yönleri birbirlerinin zıttır; yani, değişim vektörlerinin toplamı $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ sıfır olur. Şimdi sistemdeki **toplam momentum** $\vec{P}$'yi her bir parçacığın momentumunun vektör toplamı olarak tanımlayalım;

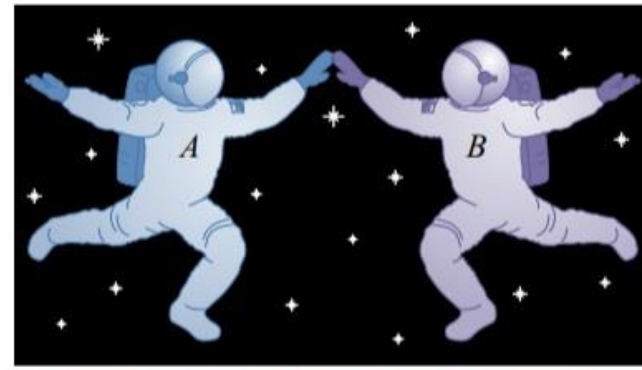
$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \qquad (8.12)$$

Denklem (8.11) neticede şu hali alır;

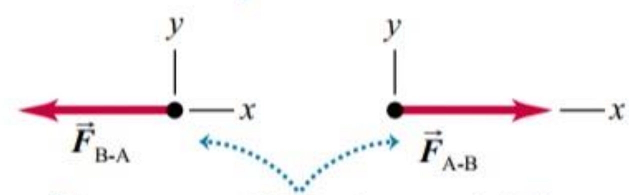
$$\vec{F}_{B-A} + \vec{F}_{A-B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (8.13)$$

Toplam momentumun $\vec{P}$'nin zaman içinde değişimi sıfırdır. Demek ki, parçacıkların momentumları teker teker değişse bile sistemin toplam momentumu sabittir.

8.8 İki astronot sıfır yerçekiminin olduğu uzay boşluğunda birbirlerini itmektedir.



Bu iki astronotu etkileyen dış kuvvet yoktur. Bu nedenle toplam momentum korunur.



İki astronotun birbirlerine uyguladıkları kuvvetler, etki-tepki çiftidir.

Sonuç: Dış kuvvetlerin vektör toplamı sıfır ise sistemin toplam momentumu sabit kalır.

Momentumun Korunumu

Dış kuvvetlerin vektör toplamı sıfırsa, sistemin toplam momentumu sabit kalır.

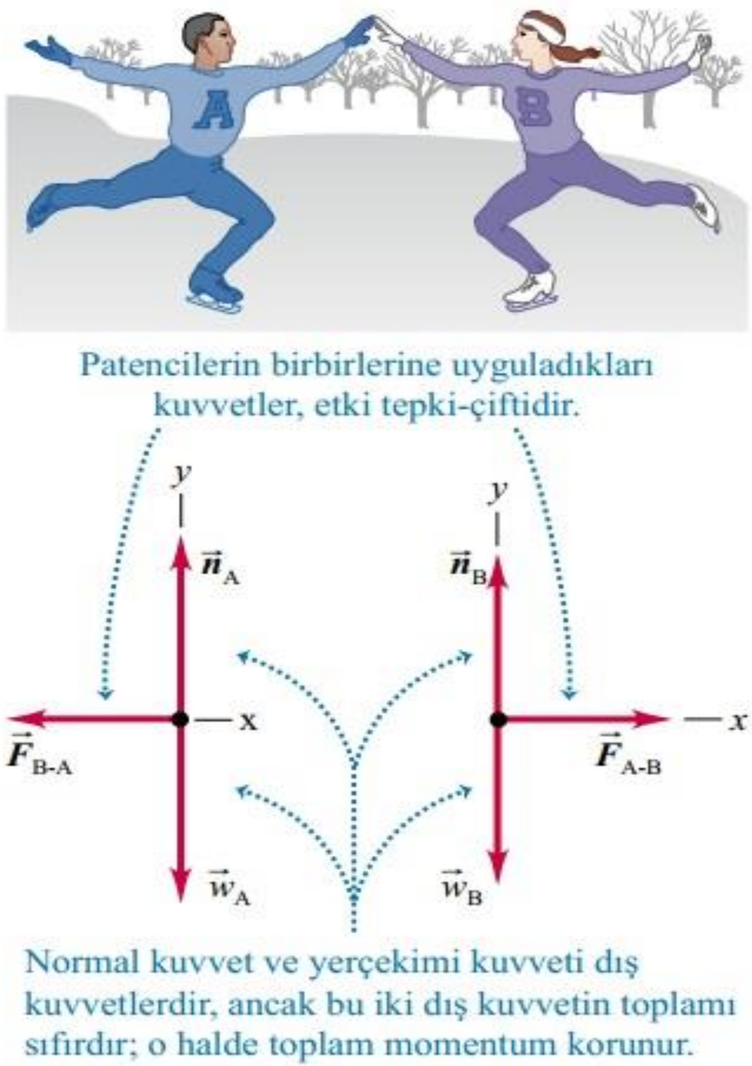
Bu ifade doğrusal **momentumun korunumu ilkesi**'nin en basit şeklidir. Bu ilke Newton'un üçüncü yasasının doğrudan bir sonucudur. Bu ilkeyi çok yararlı yapan olgulardan bir tanesi, sistemde yer alan parçacıklar arasındaki iç kuvvetlerin niteliğinden bağımsız olmasıdır. Bunun anlamı, parçacıklar arasındaki iç kuvvetler hakkında çok bir şey bilmesek bile (çoğunlukla bu kuvvetlerin ayrıntısı bilinmez) momentumun korunumu ilkesine başvurabiliriz demektir. Bu ilkeyi Newton'un ikinci yasasından çıkardık, yani bu ilkenin sadece eylemsiz referans çerçevesinde geçerli olduğunu unutmayalım.

Bu ilkeyi birbirleriyle etkileşen *A, B, C,.....* gibi çok sayıda parçacık içeren bir sistem için genelleştirebiliriz. Böyle bir sistemin toplam momentumu;

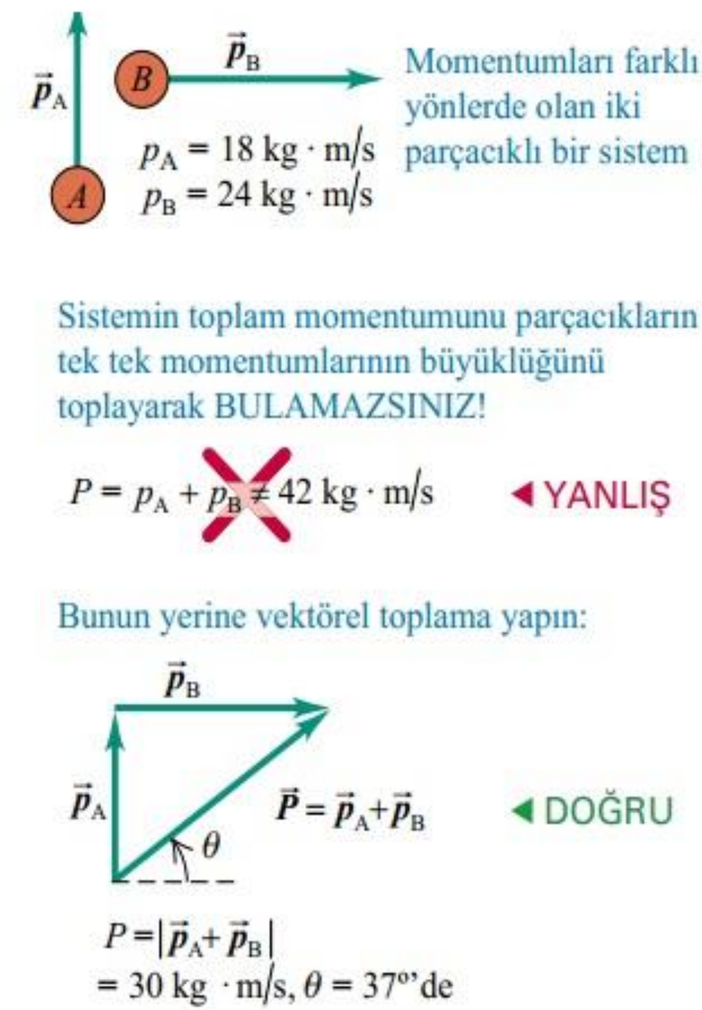
$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \quad \text{(parçacıklar sisteminin toplam momentumu)} \tag{8.14}$$

Momentumun Korunumu

8.9 İki buz patenci, sürtünmesiz yatay yüzeyde kayarken birbirlerini itmektedir. (Şekil 8.8 ile karşılaştırın.)



8.10 Momentum korunumunu uygularken, momentumun bir vektör büyüklük olduğunu unutmayın.

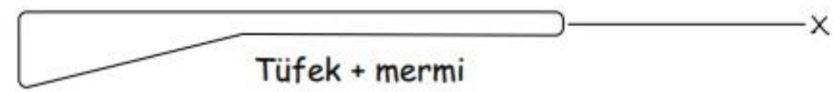


Örnek **Tüfeğin geri tepmesi**

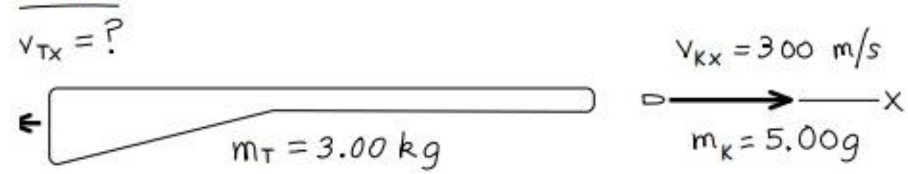
Bir nişancı $m_T = 3.00$ kg kütleli bir tüfeği gevşek olarak yani tüfek geri tepebilecek şekilde tutmaktadır. Kütlesi $m_K = 5.00$ gr bir mermiyi yere göre $v_K = 300$ m/s hızla ateşliyor. Tüfeğin geri tepme sürati v_T'in değeri nedir? Mermi ve tüfeğin son momentumu ve kinetik enerjisi nedir?

8.11 Bu problem için şemamız.

Önce



Sonra



TASARLAMA: Şekil 8.11 sistemi kabaca gösteriyor. Artı x-eksenini nişancının nişan aldığı yön olarak alıyoruz. Ateş etmeden önce silah ve mermi durağandır ve bu nedenle momentumun x-bileşeni sıfırdır. Ateş edildikten sonra merminin x-momentumu $p_{Kx} = m_K v_{Kx}$, tüfeğin x-momentumu $p_{Tx} = m_T v_{Tx}$'dir. Hedef değişkenlerimiz p_{Kx}, p_{Tx}, v_{Tx} ve mermi ve tüfeğin son kinetik enerjilerdir ($K_K = ½\, m_K v_{Kx}$ ve $K_T = ½\, m_T v_{Tx}$).

İŞLEM: Toplam momentumun x-bileşeninin korunumu;

$$P_x = 0 = m_K v_{Kx} + m_T v_{Tx}$$

$$v_{Tx} = -\frac{m_K}{m_T} v_{Kx} = -\left(\frac{0.00500\,\text{kg}}{3.00\,\text{kg}}\right)(300\,\text{m/s}) = -\,0.500\,\text{m/s}$$

Eksi işareti geri tepmenin yönünün mermininkiyle zıt olduğunu gösterir. Tüfeğin kabzası bu süratle omzunuza çarparsa acıyı hissedersiniz. Tüfeği sıkıca tutup omzunuza dayadığınızda, geri tepen kütle m_T sizin ve tüfeğin toplam kütlesiyle yer değiştireceğinden geri tepme hızı çok daha düşük olur.

Merminin son momentumu ve kinetik enerjisi;

$$p_{Kx} = m_K v_{Kx} = (0.00500 \text{ kg})\,(300 \text{ m/s}) = 1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$K_K = \frac{1}{2} m_K v_{Kx}^2 = \frac{1}{2}(0.00500\,\text{kg})(300\,\text{m/s})^2 = 225\,\text{J}$$

Tüfeğin son momentumu ve kinetik enerji;

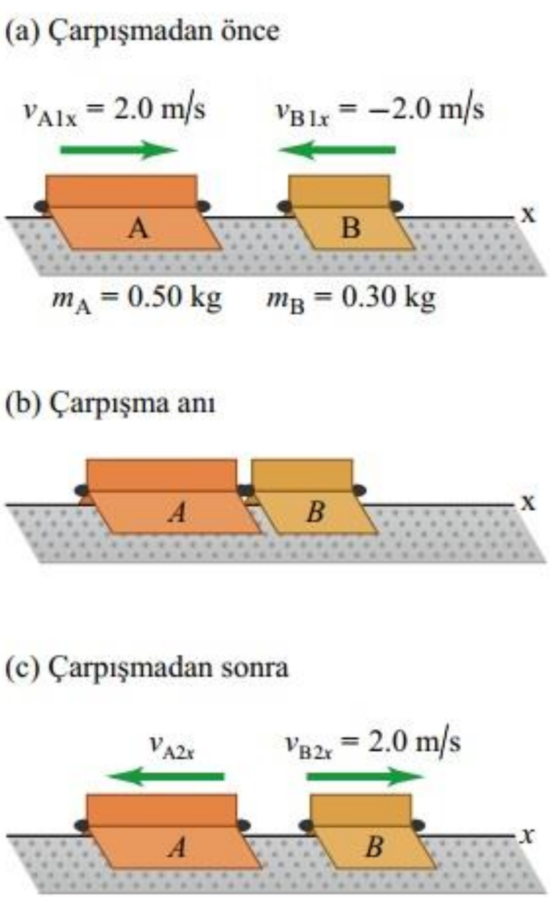
$$p_{Tx} = m_T v_{Tx} = (3.00 \text{ kg})\,(-0.500 \text{ m/s}) = -1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$K_T = \frac{1}{2} m_T v_{Tx}^2 = \frac{1}{2}(3.00\,\text{kg})(-\,0.500\,\text{m/s})^2 = 00.375\,\text{J}$$

Örnek 5. Düz bir yolda çarpışma

İki kütle hava rayı üzerinde sürtünmesiz olarak birbirine doğru kayıyor (Şekil 8.12a) ve sonra (Şekil 8.12b) çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra *B* kütlesi +2.0 m/s son hızla hareket ediyor (Şekil 8.12c). *A* kütlesinin son hızı nedir? Her iki kütlenin momentumlarının ve hızlarının değişimi birbirleriyle nasıl mukayese edilebilir?

8.12 Hava rayında çarpışan iki kütle.



TASARLAMA: Artı *x*-eksenini hava rayı üzerinde sağa doğru alıyoruz. Cisimlerin kütleleri ve ilk hızları ile *B* kütlesinin son hızı verilmiştir. Hedef değişkenlerimiz *A* kütlesinin son hızının *x*-bileşeni v_{A2x} ve iki kütlenin momentumları ve hızlarındaki değişimdir (çarpışmadan sonraki değer eksi çarpışmadan önceki değer).

İŞLEM: Toplam momentumun *x*-bileşeninin çarpışmadan önceki değeri;

$$P_x = m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}$$
$$= (0.50\text{ kg})(2.0\text{ m/s}) + (0.30\text{ kg})(-2.0\text{ m/s})$$
$$= 0.40\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Bu pozitif bir sonuçtur (Şekil 8.12'de sağa doğru), çünkü kütle *A* çarpışmadan önce *B* kütlesinden daha büyük bir momentuma sahiptir. Çarpışmadan sonra toplam momentumun *x*-bileşeni değişmez. Yani;

$$P_x = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Bu denklemi v_{A2x} için çözdüğümüzde *A*'nın son *x*-hızı;

$$v_{A2x} = \frac{P_x - m_B v_{B2x}}{m_A} = \frac{0.40\text{kg}\cdot\text{m/s} - (0.30\text{kg})(2.0\text{m/s})}{0.50\text{kg}}$$
$$= -0.40\text{ m/s}$$

A kütlesinin *x*-momentumunun değişimi,

$$m_A v_{A2x} - m_A v_{A1x} = (0.50\text{ kg})(-0.40\text{ m/s}) - (0.50\text{ kg})(2.0\text{ m/s})$$
$$= -1.2\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

B kütlesinin *x*-momentumunun değişimi,

$$m_B v_{B2x} - m_B v_{B1x} = (0.30\text{ kg})(2.0\text{ m/s}) - (0.30\text{ kg})(-2.0\text{ m/s})$$
$$= +1.2\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

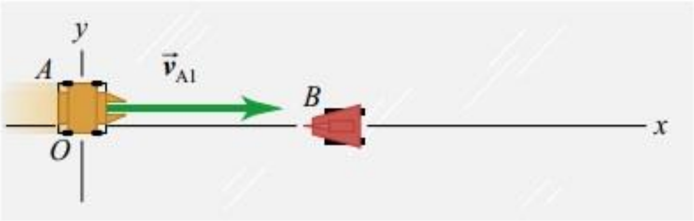
Her iki kütlenin momentumları değişiminin büyüklükleri birbirlerine eşit, fakat değişimin yönleri birbirlerine zıttır. Aynı durum hız farkları için geçerli değildir. *A* için; $v_{A2x} - v_{A1x} = (-0.40\text{ m/s}) - 2.0$ m/s $= -2.4$ m/s. *B* için ise $v_{B2x} - v_{B1x} = 2.0\text{ m/s} - (-2.0\text{ m/s}) = +4.0$ m/s.

Örnek Yatay düzlemde çarpışma

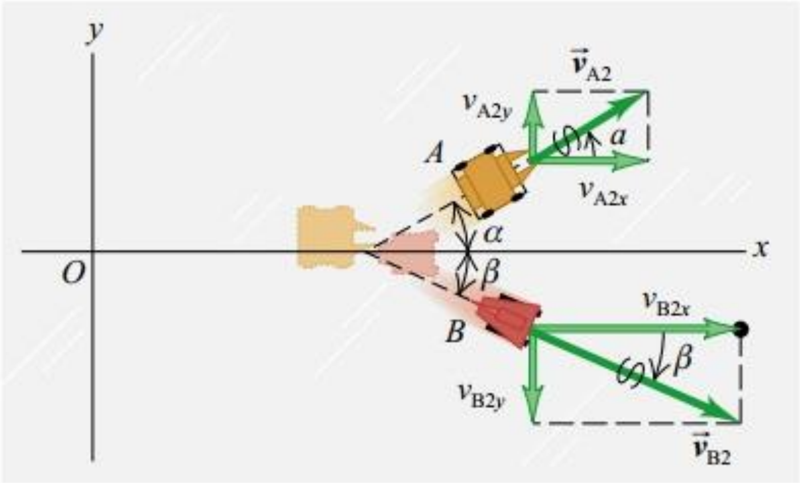
Şekil 8.13a sürtünmesiz yüzeyde birbirlerine doğru kayan iki robotu gösteriyor. Robot *A*'nın kütlesi 20 kg olup *x*-ekseni boyunca başlangıçta 2.0 m/s süratle ilerlemektedir; kütlesi 12 kg olan ve çarpışmadan önce hareketsiz duran *B* robotuna çarpar. Çarpışmadan sonra *A* robotu *x*-ekseni ile 30° yapan yönde 1.0 m/s süratle ilerlemeye başlar. *B* robotunun son hızı ne olur?

8.13 Hızların üstten görünümü, (a) çarpışmadan önce (b) çarpışmadan sonra.

a) Çarpışmadan önce



b) Çarpışmadan sonra



İŞLEM: Toplam momentumun *x*-bileşeni korunumu;

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\text{kg})(2.0\,\text{m/s}) + (12\text{kg})(0) \\ -(20\text{kg})(1.0\,\text{m/s})(\cos 30°)\end{bmatrix}}{12\text{kg}}$$

$$= 1.89\ \text{m/s}$$

Benzer bir şekilde toplam momentumun *y*-bileşeni için;

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\text{kg})(0) + (12\text{kg})(0) \\ -(20\text{kg})(1.0\text{m/s})(\sin 30°)\end{bmatrix}}{12\text{kg}}$$

$$= -0.83\ \text{m/s}$$

Çarpışmadan sonra, robot *B* artı *x*-yönüne ve eksi *y*-yönünde hareket eder (Şek. 8.13b. $\vec{v}_{B2}$'nin büyüklüğü;

$$v_{B2} = \sqrt{(1.89\,\text{m/s})^2 + (-0.83\,\text{m/s})^2} = 2.1\ \text{m/s}$$

Yönünün artı *x*-ekseni ile yaptığı açı;

$$\beta = \arctan\frac{-0.83\ \text{m/s}}{1.89\ \text{m/s}} = -24°$$

Momentumun Korunumu ve Çarpışmalar

Esnek ve Esnek Olmayan Çarpışmalar

Cisimler arasındaki kuvvetler korunumlu ise çarpışmada mekanik enerji kaybol maz veya kazanılmaz, sistemin toplam kinetik enerjisi değişmez. Bu tür çarpış malara **esnek çarpışma** denir. İki mermer küre veya iki bilardo topu arasındak çarpışma neredeyse tamamen esnektir. Şekil 8.14 esnek çarpışma için bir mode gösteriyor. Kayan kütleler çarpıştığında aralarındaki yay kısa bir süre için sıkışı ve kinetik enerjinin bir kısmı bir süre için esneklik potansiyel enerjisine dönüşü Sonra da kütleler ayrılır, yay gerilerek açılırken bu potansiyel enerji tekrar kine tik enerjiye dönüşür.

Bir çarpışmada, çarpışmadan sonraki toplam kinetik enerji çarpışmada önceki kinetik enerjiden az ise bu çarpışmaya **esnek olmayan çarpışma** deni Spagetti tabağına düşen bir köfte veya bir tahta parçasına saplanan kurşun esnel olmayan çarpışma örnekleridir. Çarpışma esnasında iki cisim birbirlerine yapışıp daha sonra her ikisi tek bir cisim gibi hareket ederlerse bu çarpışmaya **hiç esnel olmayan çarpışma** diyoruz. Şekil 8.15'de, bir önceki şekilde yer alan iki kütle nin yayları çıkarılmış, yerine kuvvetli bir yapışkan sürülerek çarpışma esnasında kütlelerin birbirlerine yapışmaları sağlanmıştır. Bundan sonra iki cisim berabe hareket etmektedir.

Hiç esnek olmayan çarpışma

İki topun (A ve B), tamamen esnek olmayan çarpışma esnasında kinetik enerji ve momentumuna ne olacağına bakalım (Şekil 8.15). Çarpışma esnasında toplar birbirlerine yapıştıklarından her ikisi de ortak son hız $\vec{v}_2$'ye sahip olurlar.

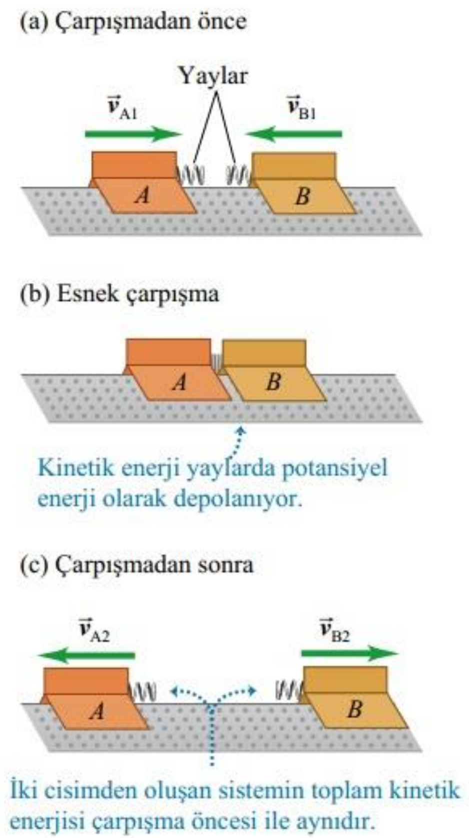
$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

Momentum korunumu şu ilişkiyi verir;

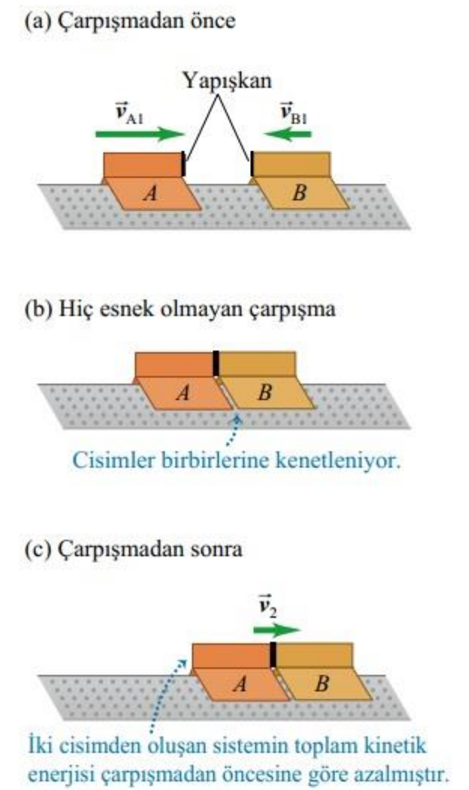
$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2 \qquad \text{(hiç esnek olmayan çarpışma)} \qquad (8.16)$$

Cisimlerin kütlelerini ve ilk hızlarını biliyorsak ortak son hız $\vec{v}_2$ bulunabilir.

8.14 Kayan iki cisim sürtünmesiz yüzey üzerinde esnek çarpışıyor. Her cismin önünde diğer cisme korunumlu kuvvet uygulayan yay tampon bulunuyor.



8.15 İki cisim hiç esnek olmayan çarpışmaya uğruyorlar. Cisimlerin önüne yay tamponun yerine yapışkan konmuştur. Çarpışmada iki cisim birbirlerine kenetleniyor.



Momentumun Korunumu ve Çarpışmalar

Örnek olarak kütlesi m_A ve ilk hızının x-bileşeni $v_{Ax,1}$ olan bir cisim, kütlesi m_B olan duran ($v_{B1x} = 0$) bir cisme esnek olmayarak çarpıyor. Denklem (8.16)'dan her iki cismin çarpışmadan sonraki ortak son hızları v_{2x}'in x-bileşeni;

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \quad \text{(hiç esnek olmayan çarpışma, } B \text{ çarpışmadan önce durağan)} \tag{8.17}$$

Tamamen esnek olmayan bu çarpışmadan sonra toplam kinetik enerjinin azaldığını gösterelim. Hareket sadece x-ekseni boyuncadır ve çarpışmadan önce ve sonra kinetik enerjiler sırasıyla K_1 ve K_2'dir;

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1x}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 v_{A1x}^2$$

Buradan kinetik enerjilerin oranı;

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad \text{(hiç esnek olmayan çarpışma, } B \text{ çarpışmadan önce durağan)} \tag{8.18}$$

olduğu görülür. Sağ taraf daima 1'den daha küçüktür çünkü payda her zaman paydan daha büyüktür. İkinci cismin (m_B) başlangıç hızı sıfırdan farklı olduğunda bile, hiç esnek olmayan çarpışmada kinetik enerjinin azalacağını ispatlamak zor değildir.

Lütfen dikkat: Denklem (8.17) veya (8.18)'i aklınızda tutmanızı beklemiyoruz. Biz bu denklemleri sadece hiç esnek olmayan çarpışmada kinetik enerjinin azalacağını göstermek için çıkardık.

Örnek Hiç esnek olmayan çarpışma

Örnek 8.5'teki çarpışma deneyini tekrarladığımızı düşünelim, ama şimdi kütleler çarpışmada geri tepmek yerine birbirlerine yapışıyorlar. Cisimlerin ilk hızları ve kütleleri Örnek 8.5'de olduğu gibidir. Çarpışmadan sonra ortak x-hızı v_{2x}'i bulunuz ve sistemin son kinetik ile ilk kinetik enerjilerini karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: x-yönünde bir dış kuvvet yoktur, yani momentumun x-bileşeni korunmaktadır.

TASARLAMA: Şekil 8.17'deki çizimde çarpışma gösteriliyor. Örnek 8.5'de olduğu gibi artı x-eksenini sağa doğru alıyoruz. Hedef değişkenlerimiz son x-hızı v_{2x} ve sistemin kinetik enerjisinin ilk ve son değerleridir.

İŞLEM: Momentumun x-bileşeninin korunmasından;

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B) v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(0.50\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) + (0.30\ \text{kg})(-2.0\ \text{m/s})}{0.50\ \text{kg} + 0.30\ \text{kg}}$$

$$= 0.50\ \text{m/s}$$

v_{2x} pozitif olduğundan, cisimler beraberce sağa doğru artı x-yönünde ilerliyor. Çarpışma öncesi A ve B nin kinetik enerjileri;

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_{A1x}^2 = \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s})^2 = 1.0\ \text{J}$$

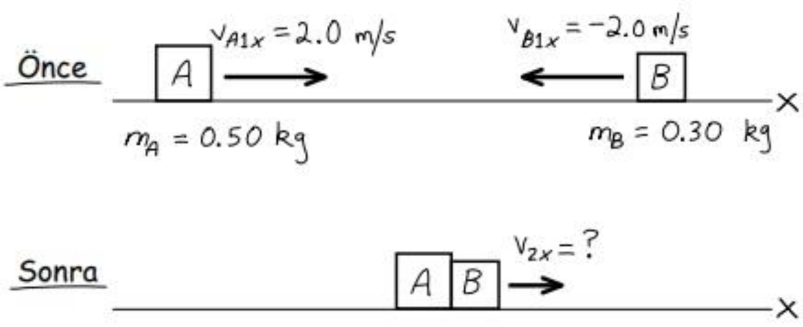
$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_{B1x}^2 = \frac{1}{2}(0.30\ \text{kg})(-2.0\ \text{m/s})^2 = 0.60\ \text{J}$$

(B kütlesinin hem v_{B1x} hızının x-bileşeni, hem de momentum $m_B v_{B1x}$ negatif olduğu halde kinetik enerjisinin pozitif olduğuna dikkatinizi çekeriz). Çarpışmadan önceki toplam kinetik enerji 1.60 J'dur. Çarpışmadan sonraki kinetik enerji ise;

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}^2 = \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg} + 0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m/s})^2 = 0.10\ \text{J}$$

DEĞERLENDİRME: Son kinetik enerji ilkinin ancak 1/16'sıdır. Enerjinin 15/16'sı mekanik enerjiden diğer şekillerdeki enerjiye dönüşmüştür. Kütlelerin önünde küçük bir sakız parçası olsaydı, çarpışmada sakızın sıcaklığı artacaktı. Kütlelerin önlerinde yay olsaydı ve yay çarpışmada maksimum sıkıştığında kilitlenseydi, enerji yayların potansiyel enerjisi halinde depolanmış olacaktı. Bu iki durumda da sistemin toplam enerjisi korunmaktadır ama kinetik enerji başka türlü bir enerjiye dönüşmüştür. Yalıtılmış bir sistemde, çarpışma esnek olsun olmasın sistemin toplam momentumu daima korunur.

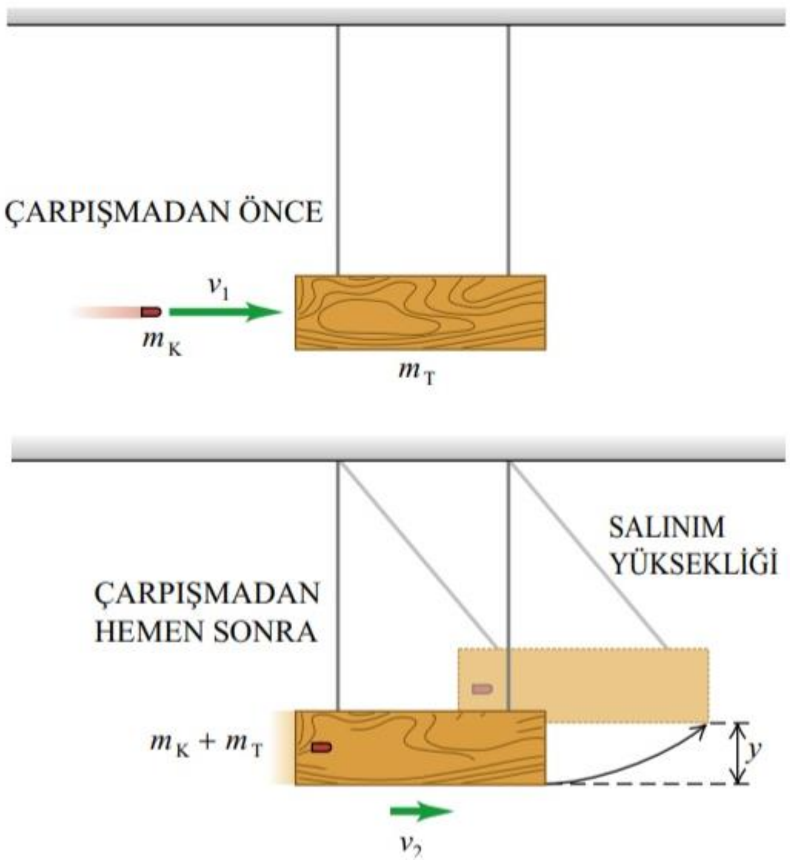
8.17 Bu problemin çizimi.



Örnek Balistik sarkaç

Şekil 8.18'de görünen balistik sarkaç mermilerin hızını ölçmekte kullanılan bir sistemdir. Kütlesi m_K olan bir mermi sarkacın ucundaki kütlesi m_T olan tahta kütüğe hiç esnek olmayan çarpışma ile saplanır. Çarpışmadan sonra kütük ve mermi beraberce maksimum y yüksekliğine kadar salınır. Kütüğün çıktığı y yüksekliği ile mermi ve kütüğün kütleleri verildiğine göre merminin ilk hızını (v_1) bulunuz.

8.18 Balistik sarkaç.



İŞLEM: İlk aşamada bütün hızlar artı x-yönündedir. Momentum korunumu;

$$m_K v_1 = (m_K + m_T) v_2 \qquad v_1 = \frac{m_K + m_T}{m_K} v_2$$

İkinci aşamanın başında mermi-kütük sisteminin kinetik enerjisi $K_2 = ½(m_K + m_T)v_2^2$. Denklem (8.18)'de olduğu gibi, esnek olmayan çarpışmada, çarpışmadan sonraki kinetik enerji öncekinden daha azdır! Mermi-kütük sistemi salınır ve y_2 yüksekliğine eriştiğinde anlık olarak durur; burada kinetik enerjisi sıfır, potansiyel enerjisi ise $(m_K + m_T)gy_2$'dir. Enerji korunumu;

$$\frac{1}{2}(m_K + m_T) v_2^2 = (m_K + m_T) gy \qquad v_2 = \sqrt{2gy}$$

Şimdi hedef değişkenimiz v_1'i bulmak için yukarıdaki eşitliği momentum denklemine yerleştirelim;

$$v_1 = \frac{m_K + m_T}{m_K}\sqrt{2gy}$$

Örnekteki m_K, m_T ve y değerleri ölçüldüğünde merminin ilk hızı artık bulunabilir.

DEĞERLENDİRME: Cevabın doğruluğunu bazı makul sayılar koyarak kontrol edelim. m_K = 5.00 gr = 0.0050 kg, m_T = 2.00 kg, y = 3.00 cm = 0.0300 m olsun. Merminin ilk sürati;

$$v_1 = \frac{0.00500\ \text{kg} + 2.00\ \text{kg}}{0.00500\ \text{kg}}\sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.0300\ \text{m})}$$

$$= 307\ \text{m/s}$$

Kütüğün çarpışmadan hemen sonraki sürati;

$$v_2 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9.80\text{m/s}^2)(0.0300\text{m})}$$

$$= 0.767\ \text{m/s}$$

Örnek — Bir trafik kazası

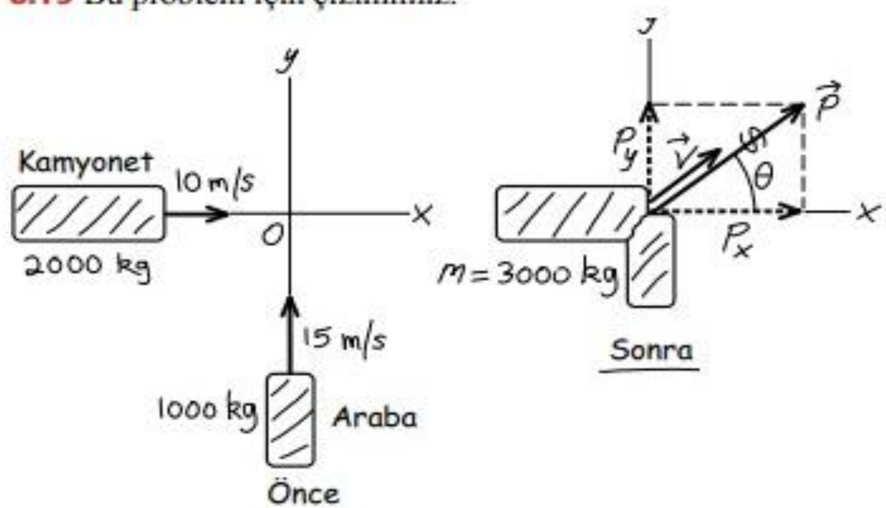
Kuzey yönünde 15m/s süratle ile ilerleyen 1 000 kg'lık bir araba, doğu yönünde 10 m/s süratle giden 2 000 kg bir kamyonetle çarpışıyor. Bütün yolcular emniyet kemeri taktıkları için hiçbiri zarar görmüyor. Çarpışmadan sonra iç içe girmiş taşıtlar tek bir kütle olarak beraber hareket ediyorlar. Sigorta uzmanı size çarpışmadan sonra bir bütün olarak ilerleyen enkazın ortak hızını soruyor. Ne cevap verirdiniz?

TASARLAMA: Şekil 8.19 çizimimizi gösteriyor. Çarpışmadan önceki toplam momentum $\vec{P}$'yi Denklem (8.15)'i kullanarak bulabiliriz. Koordinat eksenleri Şek. 8.19'da gösterilmiştir. Momentum çarpışmadan hemen sonra aynı değere sahiptir, o halde $\vec{P}$'yi bulduktan sonra çarpışmadan sonraki ortalama hız $\vec{V}$ 'yi, $\vec{P} = M\vec{V}$ bağlantısını kullanarak hesaplayabiliriz. Burada M birbirlerinin içine girmiş taşıtların toplam kütlesidir. Araba için alt indis olarak A, kamyonet için ise K kullanacağız.

İŞLEM: Denklem (8.15)'ten toplam momentum $\vec{P}$'nin bileşenlerini bulabiliriz.

$$P_x = p_{Ax} + p_{Kx} = m_A v_{Ax} + m_K v_{Kx}$$
$$= (1000\text{ kg})(0) + (2\,000\text{ kg})(10\text{ m/s})$$
$$= 2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$P_y = p_{Ay} + P_{Ky} = m_A v_{Ay} + m_K v_{Ky}$$
$$= (1\,000\text{ kg})(15\text{ m/s}) + (2\,000\text{ kg})(0)$$
$$= 1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

8.19 Bu problem için çizimimiz.



$\vec{P}$'nin büyüklüğü;

$$P = \sqrt{(2.0\times10^4\text{kg}\cdot\text{m/s})^2 + (1.5\times10^4\text{kg}\cdot\text{m/s})^2}$$
$$= 2.5\times10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Momentumun θ açısı ile verilen yönü (Şekil 8.19'da gösterildiği gibi);

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1.5\times10^4\text{kg}\cdot\text{m/s}}{2.0\times10^4\text{kg}\cdot\text{m/s}} = 0.75 \qquad \theta = 37°$$

Çarpışmadan sonraki toplam momentum çarpışmadan öncekine eşittir. Araçlardan hiç bir parça kopmadığını farz ederek, enkazın toplam kütlesi: $M = m_A + m_K = 3\,000$ kg. $\vec{P} = M\vec{V}$ eşitliğinden, hız vektörünün çarpışmadan sonraki yönü momentum ile aynıdır, büyüklüğü ise;

$$V = \frac{P}{M} = \frac{2.5\times10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{3\,000\text{ kg}} = 8.3\text{m/s}$$

Esnek Çarpışmalar

A ve B cisimleri arasındaki bir esnek çarpışmayı ele alalım. Önce bütün hızların aynı doğrultuda olduğu tek boyuttaki çarpışmaları inceleyeceğiz, x-eksenini bu doğrultuda alalım. Her iki momentum ve hızın sadece x-bileşeni olacaktır. A ve B cisimlerinin çarpışmadan önceki hızlarına v_{A1x}, v_{B1x}, çarpışmadan sonrakilerine v_{A2x}, v_{B2x} diyelim. Kinetik enerji korunumundan;

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1x}{}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1x}{}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2x}{}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2x}{}^2$$

Momentumun korunumundan ise;

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Cisimlerin kütleleri m_A ve m_B, ilk hızları v_{A1x}, v_{B1x} biliniyorsa bu iki denklemi çözerek son hızlar v_{A2x} ve v_{B2x}'i bulabiliriz.

Esnek Çarpışmalar

Esnek Çarpışma, Cismin Biri Başlangıçta Hareketsiz

Yukarıdaki denklemlerin genel çözümü biraz karmaşıktır. Bu nedenle öncelikle *B* cisminin çarpışmadan önce durağan olduğu durumu inceleyeceğiz ($v_{B1x} = 0$). *B* cismini, *A* cisminin vuracağı hedef olarak düşünelim. Kinetik enerji ve momentum korunumları denklemleri sırasıyla;

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2x}^2 \tag{8.19}$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \tag{8.20}$$

v_{A2x} ve v_{B2x} *A*'nın ilk hızı v_{A1x} cinsinden çözülebilir. Bu oldukça karmaşık cebir işlemi gerektirir ama uğraşmaya değer. Yorulmadan netice elde edilemez! Bu en basit yaklaşım biraz dolambaçlı gibi gözükse de esnek çarpışmaların bazı ilginç özeliklerini ortaya çıkaracaktır.

Denklem (8.19) ve (8.20)'yi aşağıdaki gibi tekrar düzenliyoruz;

$$m_B v_{B2x}^2 = m_A(v_{A1x}^2 - v_{A2x}^2) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x}) \tag{8.21}$$

$$m_B v_{B2x} = m_A(v_{A1x} - v_{A2x}) \tag{8.22}$$

Şimdi Denklem (8.21)'i Denklem (8.22)'ye bölelim;

$$v_{B2x} = v_{1Ax} + v_{A2x} \tag{8.23}$$

Esnek Çarpışmalar

Bu çıkan ifadeyi tekrar Denklem (8.22)'nin içine koyup v_{B2x}'i elimine edip, v^2_{A2x} için denklemi çözelim;

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x} \tag{8.24}$$

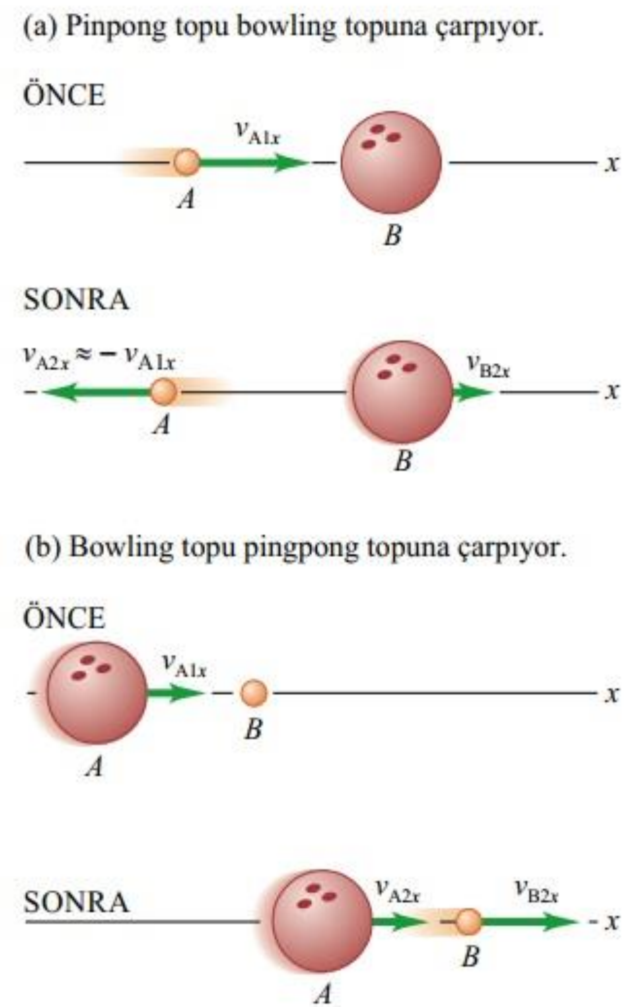
Son olarak, bulduğumuz sonucu Denklem (8.23)'te yerine koyalım;

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \tag{8.25}$$

Şimdi A cisminin bir ping-pong topu, B cisminin de bir bowling topu olduğunu varsayalım. A topunun çarpışmadan sonra başlangıçtaki hızına neredeyse eşit hızla ama ters yönde uzaklaşacağını tahmin edebiliriz, başlangıçta durağan olan B'nin hızı çok daha az olacaktır. Bu tahmin tam da denklemlerin öngörüsüne uyar. m_A, m_B'den çok daha küçük olduğunda, Denklem (8.24)'teki kesir yaklaşık olarak (–1) olur ve v_{A2x} yaklaşık olarak $-v_{A1x}$'ye eşittir. Denklem (8.25)'deki kesir ise 1'den çok daha küçük olur ve v_{B2x}, v_{A2x}'den çok daha küçüktür. Şekil 8.22b tam tersi bir durumu gösteriyor; A hareket halindeki bowling topu, B durağan pingpong topudur ve m_A, m_B'den çok daha büyüktür. Öngörünüzü Denklem (8.24) ve (8.25) ile karşılaştırınız.

Bir başka ilginç durum her iki kütlenin birbirlerine eşit olduğunda gerçekleşir (Şekil 823). Eğer $m_A = m_B$ ise, Denklem (8.23) ve (8.24) $v_{A2x} = 0$ ve $v_{B2x} = v_{A1x}$ sonucunu verir. Yani hareket eden parçacık tamamen durmuş, bütün momentum ve kinetik enerjisini diğer parçacığa vermiştir. Topun bu davranışı bilardo oyuncularının iyi bildiği bir olaydır.

8.22 Çarpışmalar, (a) pingpong topu ve çarpışmadan önce durağan olan bowling topu arasında, (b) bowling topu ile çarpışmadan önce durağan pingpong topu arasında.



Esnek Çarpışmalar ve Göreceli Hız

A ve B cisimlerinin farklı kütlelere sahip olduğu genel duruma geri dönelim. Denklem (8.23) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$v_{A1x} = v_{B2x} - v_{A2x} \tag{8.26}$$

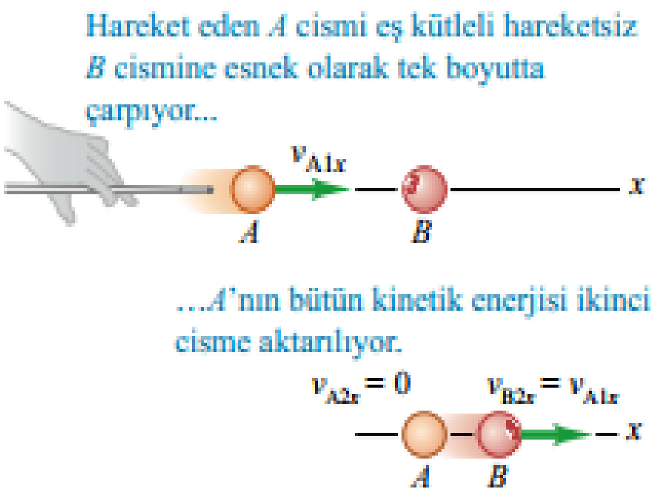
Burada $v_{B2x} - v_{A2x}$, B parçacığının, A parçacığına göre çarpışmadan sonraki göreceli hızıdır. Denklem (8.26)'ya göre bu aynı zamanda v_{A1x} eşittir; bu da B'nin A ya göre çarpışmadan önceki göreceli hızının negatifidir. (Göreceli hızı Kısım 3.5'te incelemiştik.) Göreceli hız çarpışmadan önce ve sonra aynı büyüklüğe sahiptir ama işaretleri birbirlerine zıttır. A ve B cismi çarpışmadan önce birbirlerine yaklaştıkları ve çarpışmadan sonra birbirlerinden uzaklaştıkları için işaret değişmiştir. Bu çarpışmayı gösteren ikinci bir koordinat sistemi çizdiğimizi ve hareketin birinciye göre sabit hızla olduğunu düşünelim, cisimlerin hızlarının farklı ama göreceli hızlarının eşit olduğunu görürüz. Demek ki, tek boyutlu herhangi bir esnek çarpışmada ilk ve son hızların farkı hakkına söylediklerimiz, başlangıçta her iki cisimlerden biri başlangıçta durağan olmasa bile geçerliliğini korur. *Düz çizgi boyunca iki cismin esnek çarpışmasında cisimlerin birbirlerine göreceli hızları çarpışmadan önce ve sonra aynı büyüklüğe sahiptir, çarpışmada sadece işaret değişir.* Bu ifadeye göre, B cismi çarpışmadan önce hareket halindeyse Denklem (8.26) şöyle yazılabilir;

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x}) \tag{8.27}$$

Denklem (8.27)'ye benzer bir vektörel ilişki bütün esnek çarpışmaların ortak özelliğidir. Cisimler başlangıçta hareket halinde olduklarında ve hızları düz bir çizgi boyunca olmadıklarında bile bu vektörel ilişki geçerliliğini korur. Bu tespit elastik çarpışma tanımına uygun düşen alternatif bir tanım ortaya koyuyor; *bir esnek çarpışmada cisimlerin birbirlerine göreceli hızları çarpışmadan önce ve sonra aynı büyüklüğe sahiptir.* Bu formülasyon esnek çarpışmanın eşdeğer bir tanımıdır. Bu şart yerine geldiği zaman toplam kinetik enerji de korunumludur.

İki cismin esnek çarpışması kafa kafaya değilse hız düz bir doğru boyunca olmaz. Hareket bir düzlem boyunca olur ve iki cisminde son hızlarının bilinmeyen iki bileşeni vardır, yani toplam bilinmeyen sayısı dörttür. Enerji korunumu ve momentumun x ve y-bileşeninin korunumu bize sadece üç adet eşitlik vermektedir. Son hızları bulabilmek için ek bilgiye ihtiyacımız olacaktır, bu bilgi cisimlerin bir tanesinin son hızının büyüklüğü veya yönü olabilir.

8.23 İki eş kütleli cisim arasında tek boyutta çarpışma.



Örnek Düz bir doğru boyunca esnek çarpışma

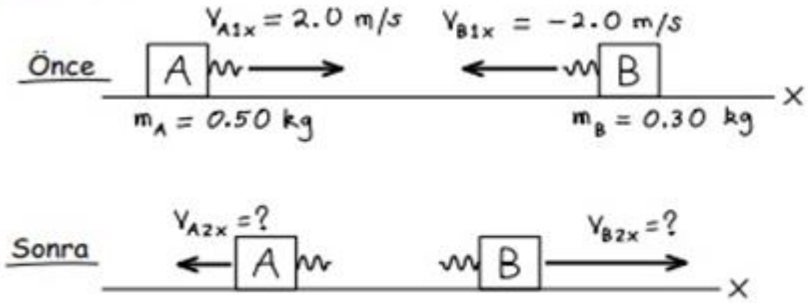
Kütlelerin hava yastığı üzerinde çarpışma deneyini (Örnek 8.5) tekrar ele alalım. Çarpışmanın esnek olması için ideal yaydan tamponlar kütlelere takılmıştır. Çarpışmadan sonra *A* ve *B* kütlelerinin hızları nedir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Örnek 8.5'de olduğu gibi kütleler üzerinde dış kuvvet sıfırdır ve sistemin momentumu korunmaktadır.

TASARLAMA: Şekil 8.24 çarpışmanın çizimimizi gösteriyor. Pozitif *x*-eksenini gene sağa doğru seçiyoruz. Hedef değişkenimiz v_{A2x} ve v_{B2x} değerlerini Denklem (8.27) ve momentumun korunumu denklemlerini kullanarak bulacağız.

8.24 Bu problem için çizimimiz.



İŞLEM: Momentum korunumundan;

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$(0.50\text{ kg})(2.0\text{ m/s}) + (0.30\text{ kg})(-2.0\text{ m/s}) = (0.50\text{ kg})v_{A2x} + (0.30\text{ kg})v_{B2x}$$

$$0.50v_{A2x} + 0.30v_{B2x} = 0.40\text{ m/s} \qquad [1]$$

(En son denklemin tamamını "kg" birimiyle böldük.) Denklem (8.27)'den göreceli hızlar arasındaki ilişkiyi buluruz.

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x})$$

$$= -(-2.0\text{ m/s} - 2.0\text{ m/s})$$

$$v_{B2x} - v_{A2x} = 4.0\text{ m/s} \qquad [2]$$

B'nin *A* ya göre bağıl hızı çarpışmadan önce sola doğru 4.0 m/s, çarpışmadan sonra sağa doğru 4.0 m/s'dir. Bu denklemleri birlikte çözersek; Yani [1] ve [2] denklemlerini

$$v_{A2x} = -1.0\text{ m/s} \qquad v_{B2x} = 3.0\text{ m/s}$$

Örnek Nükleer reaktördeki yavaşlatıcı

Bir nükleer reaktörde uranyum çekirdeğinin parçalanması yüksek süratte hareket eden nötronlar yaratır. Nötronların başka bir nükleer tepkimeyi tetiklemeleri için önce başka çekirdeklere çarparak yavaşlatılmaları gerekir. İlk nükleer reaktör (Chicago Üniversitesi'nde 1942'da kurulmuştu) ve 1986 Chernobyl'de kazaya uğrayan reaktörde yavaşlatıcı olarak karbon (grafit) kullanıyorlardı. Kütlesi 1u olan nötronların 2.6×10^7 m/s süratle ilerlerken kütlesi 12 u olan durgun karbon çekirdekleri ile kafa kafaya esnek olarak çarpışmaya uğradıklarını varsayalım. Çarpışma esnasında dış kuvvetler ihmal edilecek kadar düşüktür. Çarpışmadan sonra nötronların sürati ne olur? (u atomik kütle birimidir $1\text{ u} = 1.66 \, x \, 10^{-27}$ kg.)

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Dış kuvvetlerin ihmal edilecek kadar küçük olduğu söyleniyor (yani çarpışmada momentum korunmaktadır) ve çarpışmalar esnektir (kinetik enerji de korunmaktadır).

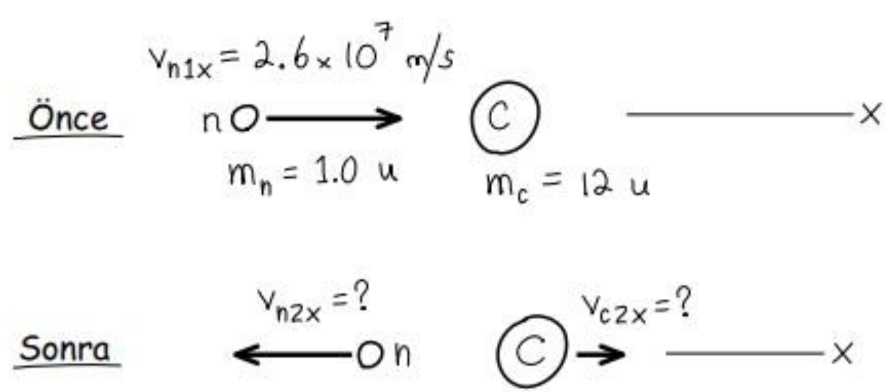
TASARLAMA: Şekil 8.25 çarpışmanın çizimini gösteriyor. x-eksenini nötronun ilk hızının yönünde alıyoruz. Çarpışma kafa kafaya olduğundan nötron ve karbon çekirdeği çarpışmadan sonra düz bir çizgi halinde hareket etmektedir. Çarpışmadan önce karbon çekirdekleri durgun olduklarından, Denklem (8.24) ve (8.25)'i kullanabiliriz. Denklemlerde A yerine n (nötron için), B yerine C (karbon çekirdeği için) kullanalım. Elimizde $m_n = 1.0$ u ve $m_C = 12.0$ u, $v_{n1x} = 2.6 \times 10^7$ m/s vardır. Hedef değişkenlerimiz v_{n2x} ve v_{C2x}'dir (sırasıyla nötron ve karbon çekirdeğinin son hızları).

İŞLEM: Hesapları yapmayı size bırakıyoruz, sonuç aşağıdaki gibi olacaktır;

$$v_{n2x} = -2.2 \times 10^7 \text{ m/s} \qquad v_{C2x} = 0.4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

DEĞERLENDİRME: Nötronların sürati, ilk süratin 11/13'ne iniyor, geri tepen karbon çekirdeklerinin sürati ise nötronların ilk süratinin 2/13'dür. Bu oranların $(m_n - m_C)/(m_n + m_C)$ ve $2m_n/(m_n + m_C)$ oldukları Denklem (8.24) ve (8.25)'den görülür. (Alt indislere bu problem için değiştirilmiştir.) Kinetik enerji süratin karesi ile orantılıdır yani nötronun son kinetik enerjisi, ilkinin $(11/13)^2$ kadarıdır, ya da ilk enerjinin yaklaşık 0.72'si kadardır. Eğer nötron benzer bir çarpışmaya bir daha uğrarsa, kinetik enerjisi 0.72 daha azalacak ve ilk enerjinin yarısı değerine inecektir. Birçok çarpışmadan sonra nötronlar uranyum çekirdeğinde bölünme reaksiyonunu tetikleyecek kadar yavaşlayabilirler.

8.25 Bu problem için çizimimiz.



Örnek İki boyutta esnek çarpışma

Şekil 8.26'da sürtünmesiz yüzeyde (hava yastıkları üzerinde) kayan iki hokey diskinin elastik çarpışması görülüyor. A diskinin kütlesi $m_A = 0.500$ kg, B diskinin kütlesi $m_B = 0.300$ kg'dır. A diskinin ilk hızı artı x-yönünde 4.00 m/s'dir. Çarpışmadan sonra A bilinmeyen bir yöne doğru son hız 2.00 m/s ile ilerler. Disk B başlangıçta durağandır. Çarpışmadan sonraki B'nin son sürati v_{B2}'yi ve şekildeki α ve β açılarını bulunuz.

İŞLEM: Çarpışma esnek olduğundan ilk ve son kinetik enerjiler eşittir;

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$

$$v_{B2}^2 = \frac{m_A v_{A1}^2 - m_A v_{A2}^2}{m_B}$$

$$= \frac{(0.500\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s})^2 - (0.500\ \text{kg})(2.00\ \text{m/s})^2}{0.300\ \text{kg}}$$

$$v_{B2} = 4.47\ \text{m/s}$$

Toplam momentumun x-bileşeninin korunumu;

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

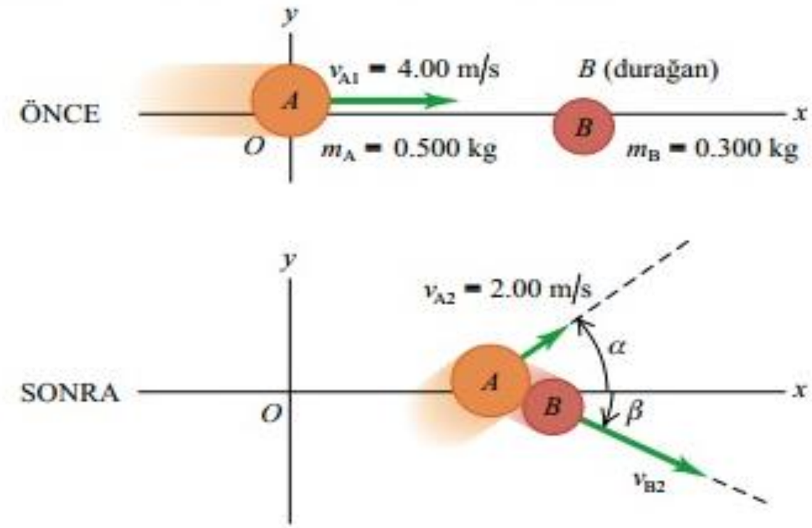
$$(0.500\ \text{kg})\ (4.00\ \text{m/s}) = (0.500\ \text{kg})\ (2.00\ \text{m/s})\ (\cos\alpha) + (0.300\ \text{kg})\ (4.47\ \text{m/s})\ (\cos\beta)$$

ve y-bileşeninin korunumu;

$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$0 = (0.500\ \text{kg})\ (2.00\ \text{m/s})\ (\sin\alpha) - (0.300\ \text{kg})\ (4.47\ \text{m/s})\ (\sin\beta)$$

8.26 Kafa kafaya olmayan bir esnek çarpışma.



Bunlar α ve β için eş zamanlı denklemdir. En kolay işlem β'yı şu yolla elimine etmek olacaktır; birinci denklemi cos β'yı bulmak için, ikinci denklemi de sin β'yı bulmak için çözüyoruz. Daha sonra her iki eşitliğin karesini alıp topluyoruz. $\cos\beta^2 + \sin\beta^2 = 1$ olduğuna göre, bu toplamdan β düşer ve geriye cos α, neticede α için denklem kalır. Bulacağımız değeri iki denklemin birinin içine koyduğumuzda β için sonucu buluruz. Ayrıntıları Alıştırma 8.44'de bulacaksınız. Sayısal neticeler;

$$\alpha = 36.9° \qquad \beta = 26.6°$$

DEĞERLENDİRME: Cevabı kontrol etmenin en kısa şekli, çarpışmadan önce sıfır olan y-momentumun çarpışmadan sonrada sıfır olup olmadığına bakmaktır; iki diskin y-momentumlarını toplayalım.

$$p_{A2y} = (0.500\ \text{kg})\ (2.00\ \text{m/s})\ (\sin 36.9°) = +0.600\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{B2y} = -(0.300\ \text{kg})\ (4.47\ \text{m/s})\ (\sin 26.6°) = -0.600\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Bu değerlerin toplamı sıfırdır.

Kütle Merkezi

Kütle merkezi kavramını kullanarak momentum korunumunu ilkesini daha anlaşılır bir şekilde ifade edebiliriz. Kütleleri m_1, m_2, ….. olan birçok parçacığımız olduğunu farz edelim. Birinci parçacık m_1'in koordinatları (x_1, y_1), ikinci parçacık m_2'nin koordinatları (x_2, y_2) olsun ve diğerleri benzer şekilde devam etsin. Sistemin kütle merkezini koordinatları (x_{km}, y_{km}) olan nokta olarak tanımlarız.

$$x_{km} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{km} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(kütle merkezi)} \quad (8.28)$$

Kütle merkezinin konum vektörü $\vec{r}_{km}$, parçacıkların konum vektörleri $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... cinsinden ifade edilebilir.

$$\vec{r}_{km} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_2\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}}{\sum_i m_i} \qquad \text{(kütle merkezi)} \qquad (8.29)$$

İstatistik dilinde kütle merkezi, parçacıklarının konumlarının ağırlıklı ortalamasıdır.

Örnek Su molekülünün kütle merkezi

Şekil 8.27 su molekülünün yapısının basit bir modelini gösteriyor. Atomlar arası aralık $d = 9.57 \times 10^{-11}$ m'dir. Her hidrojen atomunun kütlesi 1u, oksijen atomunun kütlesi 16 u'dur. Kütle merkezinin konumunu bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Atomun bütün kütlesi neredeyse çekirdeğinde yoğunlaşmıştır. Çekirdeğin boyutları molekülün yarıçapının yaklaşık 10^{-5} katıdır. Atomu çekirdeğinde yoğunlaşmış bir parçacık gibi temsil etmekte sakınca yoktur.

TASARLAMA: Koordinat sistemi Şekil 8.27'de gösterildiği gibidir. Denklem (8.28)'i kullanarak kütle merkezinin koordinatlarını (x_{km}, y_{km}) belirleyeceğiz.

İŞLEM: Hidrojen atomlarının x-koordinatları $d\cos(105^0/2)$, alt ve üstteki hidrojen atomlarının y-koordinatları sırasıyla $+d\sin(105°/2)$ ve $-d\sin(105°/2)$'dir. Oksijen atomunun koordinatları ise $x = 0$, $y = 0$'dır. Denklem (8.28)'den kütle merkezinin x-koordinatı;

$$x_{km} = \frac{\begin{bmatrix}(1.0\text{ u})(d\cos 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times\ (d\cos 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{bmatrix}}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}}$$

$$= 0.068\, d$$

ve y-koordinatı

$$y_{km} = \frac{\begin{bmatrix}(1.0\text{ u})\ (d\sin 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times\ (-\,d\sin 52.5°) + (16.0\text{ u})\ (0)\end{bmatrix}}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}}$$

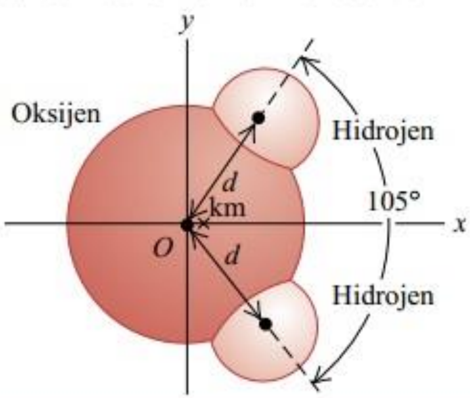
$$= 0$$

d değeri 9.57×10^{-11} m olduğundan;

$$x_{km} = (0.068)\ (9.57 \times 10^{-11}\text{ m}) = 6.5 \times 10^{-12}\text{ m}$$

DEĞERLENDİRME: Kütle merkezi oksijen atomuna hidrojenlerden olduğundan çok daha yakındır çünkü oksijen atomunun kütlesi daha yoğundur. Kütle merkezinin molekülün simetri ekseni olan x-ekseni üzerinde olduğuna dikkatinizi çekeriz. Molekül bu eksen etrafında 180^0 çevrildiğinde dönmeden önceki hali ile tamamen aynıdır. Kütle merkezinin konumu bu dönmeden etkilenmez, daima simetri ekseni üzerindedir.

8.27 Su molekülünün kütle merkezi nerdedir?



Kütle Merkezi

Kütle Merkezinin Hareketi

Parçacıkların toplamından oluşan bir cismin kütle merkezinin önemini anlamak için parçacıklar hareket ettiğinde sistemin kütle merkezine ne olduğunu sormalıyız. Kütle merkezi hızının x ve y-bileşenleri ($v_{km\text{-}x}$ ve $v_{km\text{-}y}$), x_{km} ve y_{km}'nin türevidir. Aynı zamanda, dx_1/dt birinci parçacığın hızının x-bileşenidir, $dx_1/dt = v_{1x}$ ve dx_2/dt ikinci parçacığın hızının x-bileşenidir, bütün parçacıklar için notasyon bu şekilde devam eder. Denklem (8.28)'in zamana göre türevini alarak

$$v_{km-x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$
$$v_{km-y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \qquad (8.30)$$

Bu denklemler, Denklem (8.29)'un zamana göre türevi alınarak elde edilen tek bir vektörel denklemle ifade edilebilir.:

$$\vec{v}_{km} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \qquad (8.31)$$

Toplam kütle $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ için M sembolünü kullanacağız. Bu notasyonda Denklem (8.31) tekrar yazarsak;

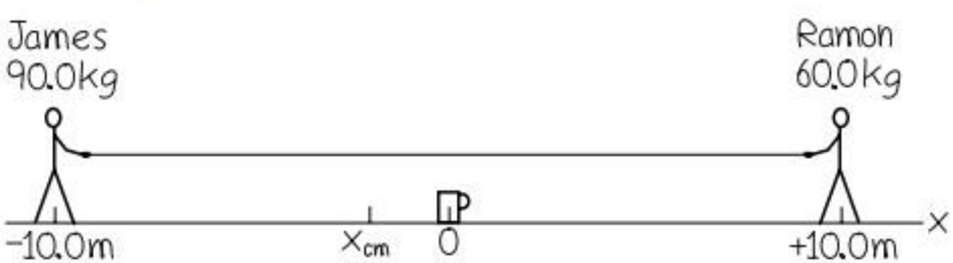
$$M\vec{v}_{km} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P} \qquad (8.32)$$

Örnek — Buz üzerinde birbirini çekme yarışı

James ve Ramon donmuş bir göletin üzerinde duruyorlar. Aralarında 20 m mesafe vardır. Ramon'un kütlesi 60.0 kg, James'in 90.0 kg'dır. İkisinin tam ortasında en sevdikleri içeceğin fincanı vardır ve iki arkadaş aralarındaki gergin ipin iki ucundan tutmuşlardır. Ikisi de çok hafif olan ipi çekerek fincana ulaşmak istiyor (Şekil 8.30). James fincana doğru 6.0 m yerdeğiştirdiğinde Ramon ne kadar ve ne yönde hareket etmiş olur?

TASARLAMA: Fincanın konumunu başlangıç noktası olarak alalım ve artı x-ekseni fincandan Ramon'a doğru olsun. Şekil 8.30 problemin çizimini gösteriyor. İp hafif olduğundan onu Denklem (8.28) ile yapacağımız kütle merkezi hesaplarına dahil etmeyeceğiz.

8.30 Bu problem için çizimimiz.



İŞLEM: Ramon ve James'in ilk x-koordinatları + 10 m ve − 10 m'dir. O halde sistemin kütle merkezinin x-koordinatı;

$$x_{km} = \frac{(90.0\ \text{kg})(-10.0\ \text{m}) + (60.0\ \text{kg})(10.0\ \text{m})}{90.0\ \text{kg} + 60.0\ \text{kg}} = -2.0\ \text{m}$$

James fincana doğru 6.0 m ilerlediğinde, onun yeni x-koordinatı −4 m'dir. Ramonun yeni x-koordinatına x_2 diyelim. Kütle merkezi hareket etmemektedir, o halde;

$$x_{km} = \frac{(90.0\ \text{kg})(-4.0) + (60.0\ \text{kg})x_2}{90.0\ \text{kg} + 60.0\ \text{kg}} = -2.0\ \text{m}$$

$$x_2 = 1.0\text{m}$$

James artı x-yönünde 6.0 m hareket etmiştir ama hâlâ fincanın 4.0 m uzağındadır, Ramon ise eksi x-yönünde 9.0 m hareket etmiştir ve fincandan 1.0 m uzaklıktadır.

DEĞERLENDİRME: Her ikisinin yerdeğiştirmesinin birbirlerine oranı (6.0 m)(9.0 m) = 2/3, kütlelerinin oranının tersine eşittir. Neden böyle olduğunu anlayabiliyor musunuz? İki adam harekete devam ettiklerinde (yüzey sürtünmesiz olduğundan ipi çekmeseler bile harekete devam edecekler!) Ramon fincana önce ulaşacak. Bu sonuç her ikisinin ipi ne kadar sert çektiklerinden tamamen bağımsızdır. İpin kuvvetli çekilmesi sadece Ramon'un fincana bir an önce ulaşmasına yol açar.

Kütle Merkezi

Dış Kuvvetler ve Kütle Merkezinin Hareketi

Dış kuvvetlerin toplamı sıfır değilse parçacıkların toplamından oluşan sistemin momentumu korunmaz ve kütle merkezinin hızı değişir. O halde, kütle merkezinin hareketi ile sistemi etkileyen dış kuvvetler arasındaki ilişkiye bakalım.

Denklem (8.31) ve (8.32) kütle merkezinin hızını sistemi meydana getiren parçacıkların hızı cinsinden ifade etmektedir. Bu ifadelerin zamana göre türevini alarak ivmelerin de aynı şekilde ilişkilendiğini görebiliriz. $\vec{a}_{km} = d\vec{v}_{km}/dt$ kütle merkezinin ivmesi olsun. Buradan şu ilişkiyi kurarız;

$$M\vec{a}_{km} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots \qquad (8.33)$$

Burada $m_1\vec{a}_1$ birinci parçacığı etkileyen toplam kuvvetin vektörüne eşittir ve bütün parçacıklar için ifadeyi devam ettirelim. Neticede Denklem (8.33)'ün sağ tarafı tüm parçacıkları etkileyen tüm kuvvetlerin vektör toplamı ($\Sigma\vec{F}$)'e eşit olur. Kısım 8.2'de yaptığımız gibi her kuvveti iç ve dış kuvvetler olarak ayırabiliriz. O halde, parçacıkları etkileyen bütün kuvvetlerin toplamı;

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_{iç} + \Sigma\vec{F}_{dış} = M\vec{a}_{km}$$

İç kuvvetler Newton'un üçüncü yasasına göre kuvvet-çiftleri olarak birbirlerini götürdükleri için $\Sigma\vec{F}_{iç} = 0$'dır, geriye sadece dış kuvvetler kalır;

$$\Sigma\vec{F}_{dış} = M\vec{a}_{km} \quad \text{(cisim veya parçacık topluluğu)} \qquad (8.34)$$

Bir cisim veya parçacıklar topluluğu dış kuvvetlerin etkisinde kaldığında, kütle merkezi, sanki tüm kütle bu noktada yoğunlaşmış ve sistem üstündeki bütün dış kuvvetlerin toplamı olan net kuvvet bu kütle merkezi noktasına tatbik edilmiş gibi hareket eder.

Kütle Merkezi

Parçacıklar topluluğu sisteminin hareketini tanımlamanın daha anlaşılır bir yolu vardır. $\vec{a}_{km} = d\vec{v}_{km}/dt$ eşitliğini kullanılarak Denklem (8.33)'ü tekrar yazabiliriz;

$$M\vec{a}_{km} = M\frac{d\vec{v}_{km}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{km})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.35}$$

Sistemin toplam kütlesi M sabit olduğundan, M'yi türevin içine alabiliriz. Denklem (8.35)'i Denklem (8.34)'ün içine koyduğumuzda;

$$\Sigma\vec{F}_{dış} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \text{(hacimli cisimler veya parçacık sistemleri)} \tag{8.36}$$

Bu denklem, Denklem (8.4)'e benzer görünüyor. Aralarındaki fark Denklem (8.4)'ün tek bir noktasal parçacığı tanımlarken Denklem (8.36)'nın hacimli bir cisim gibi parçacıklar topluluğu sistemini tanımlamasıdır. Sistemi meydana getiren parçacıklar arasında etkileşme her parçacığın tek tek momentumunu değiştirebilir, fakat sitemin toplam momentumu $\vec{P}$ sadece sistem dışından etki eden dış kuvvetlerin etkisiyle değişebilir.

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN
TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ