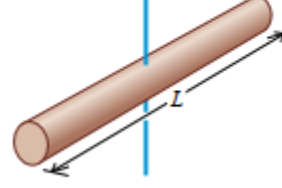




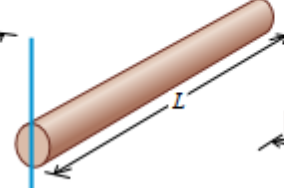
(a) Uzun, ince çubuk, eksen merkezde

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



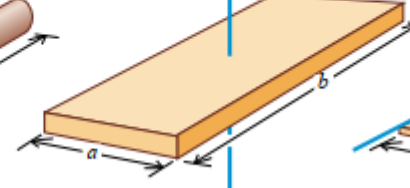
(b) Uzun, ince çubuk, eksen bir uçta

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



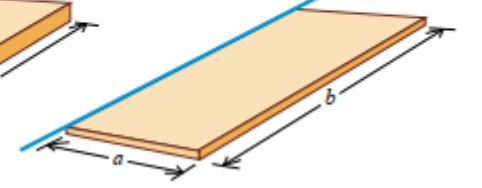
(c) Dikdörtgen plaka, eksen merkezde

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



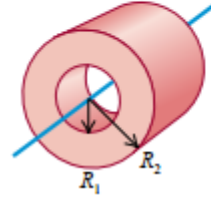
(d) İnce dikdörtgen plaka, eksen kenar doğrultusunda

$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$



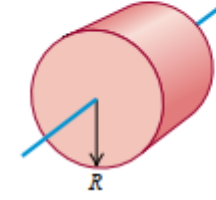
(e) Delik silindir

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



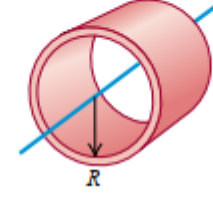
(f) Dolu silindir

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



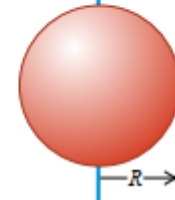
(g) İnce çeperli delik silindir

$$I = MR^2$$



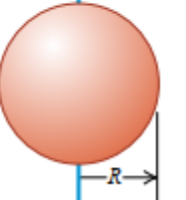
(h) Dolu küre

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



(i) İnce çeperli boş küre

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



FİZİK-I DERSİ

BÖLÜM 10: KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ

Ders kaynakları:

- 1. YOUNG ve FREEDMAN, 12 Baskı, Türkçesi**
- 2. Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar)**

ÖĞRENİM KONULARI

- Bir katı cismin dönme hareketi açısal koordinat, açısal hız ve açısal ivme cinsinden nasıl tanımlanır.
- Açısal ivme sabit olduğunda katı bir cismin dönme hareketi nasıl incelenir.
- Katı bir cismin dönme hareketi ile üzerindeki bir noktanın doğrusal hızı ve doğrusal ivmesi arasındaki ilişki nasıl kurulur.
- Katı bir cismin dönme eksenine göre eylemsizlik momenti nedir ve dönme kinetik enerjisi ile ilişkisi nasıl kurulur.
- Çeşitli katı cisimlerin eylemsizlik momenti nasıl hesaplanır.

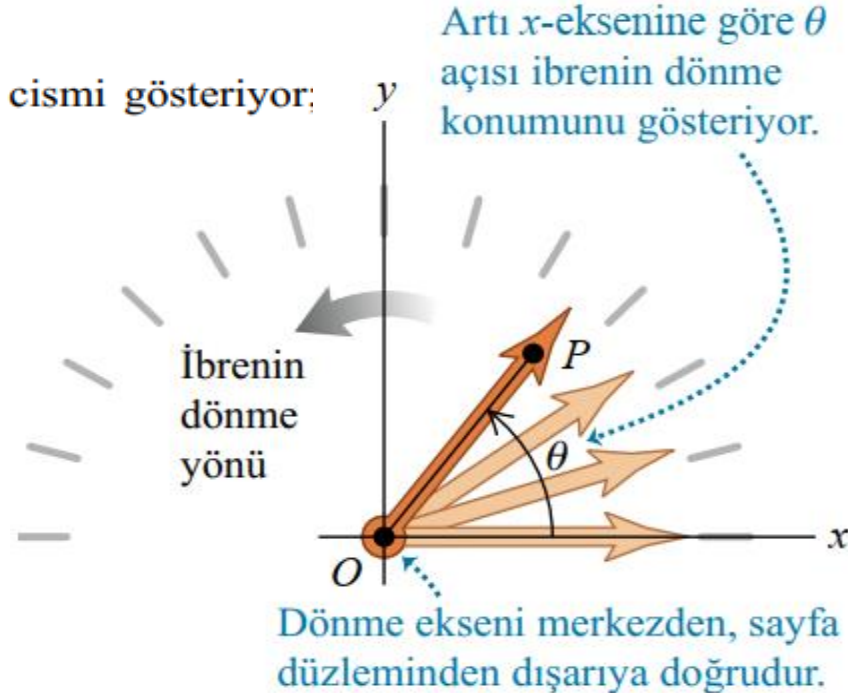
Gerçek dünyadaki cisimler çok karmaşık yapılara sahiptir ve üzerlerine etkiyen kuvvetler genişleterek, burkarak, sıkıştırarak veya sündürerek onların şeklini değiştirebilir. Bu tür şekil değişikliklerini başlangıçta ihmal ederek, bir cismin kesin olarak belirlenmiş ve değişmeyen şekil ve ölçüye sahip olduğunu varsayacağız. Böyle bir yapıya sahip ideal modele **katı cisim** diyoruz.

Açısal Hız ve İvme

Dönme hareketini incelemek için, öncelikle herhangi bir eylemsiz referans sisteminde durağan olan ve bu referans sistemine göre yönü değişmeyen sabit bir eksen etrafında dönen bir katı cismi düşünelim. Dönen bu katı cisim, bir motorun ucu veya bir atlıkarınca olabilir.

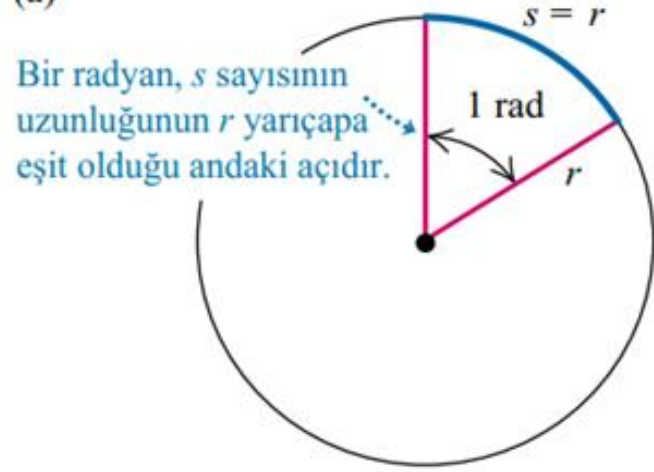
Şekil 9.1 sabit bir eksen etrafında dönen bir katı cismi gösteriyor;

9.1 Hız göstergesinin ibresi (bir katı cisim örneği) sabit eksen etrafında saat yönünün tersine dönmektedir.

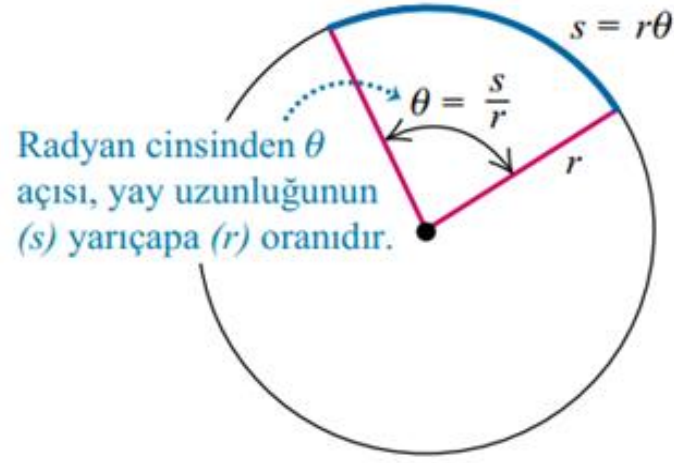


9.2 Radyan cinsinden açı ölçüleri.

(a)



(b)



Dönme hareketini tanımlarken en kestirme yol θ açısını derece yerine **radyan** olarak ölçmektir. Şekil 9.2a'da görüldüğü gibi, bir radyan (1 rad) dairenin üzerinde yay boyunca dairenin yarıçapı r kadar alınan yolun daire merkeziyle yaptığı açıdır. Şekil 9.2b'de yarıçapı r olan bir daire üzerinde yarıçap kadar alınan s eğrisel yolunun yaptığı θ açısı görülüyor. θ açısının radyan cinsinden değeri s/r dir:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{veya} \quad s = r\theta \quad (9.1)$$

Bir açı radyan cinsinden iki uzunluğun oranıdır, bu nedenle boyutsuz bir sayıdan ibarettir. Eğer $s = 3.0$ m ve $r = 2.0$ m ise, $\theta = 1.5$ 'dir, bu oranı derece veya devir cinsinden ölçülen açıdan ayırt etmek için çoğu kez 1.5 rad olarak yazarız.

Bir dairenin çevresi (yani, dairenin yay uzunluğu) 2π çarpı yarıçaptır, o halde 360° 'lik tam bir devirde 2π (yaklaşık 6.283) radyan vardır. Bu nedenle,

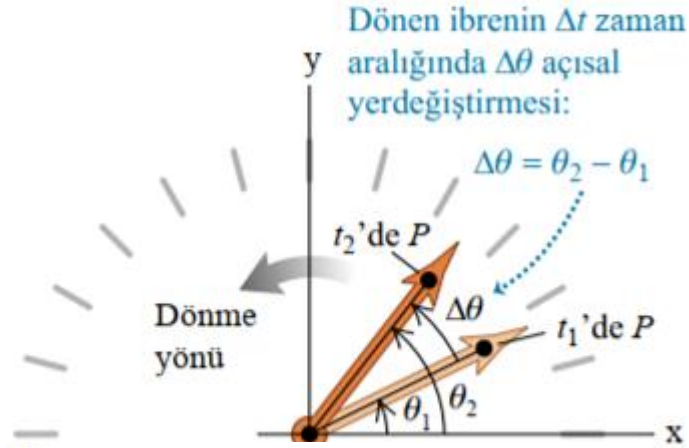
$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

Benzer şekilde, $180^\circ = \pi$ rad, $90^\circ = \pi/2$ rad olarak bulunur. Şayet θ açısını derece cinsinden ölçmekte ısrar etseydik, Denklem (9.1)'deki $s = r\theta$ ifadesinin sağ tarafına $(2\pi/360)$ eklemek zorunda kalacaktık. Açıları radyan cinsinden ölçmekle eğri boyunca açı ve uzaklık arasındaki bağıntıyı mümkün olduğunca basit şekilde ele almış oluyoruz.

Açısal Hız

9.3 (a) Dönen bir cismin açısal yerdeğiştirmesi $\Delta\theta$. (b) Dönen katı cismin her parçası aynı $\Delta\theta/\Delta t$ açısal hızına sahiptir.

(a)



(b)



Şekil 9.3a’da dönen katı cisim üzerindeki OP referans çizgisi, artı x -ekseni ile t_1 anında θ_1 açısı yapmıştır. Sonraki t_2 anında açıdaki değişim θ_2 olmuştur. Katı cismin $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığındaki **ortalama açısal hızı** $\omega_{\text{ort-z}}$ ’i, **açısal yerdeğiştirme** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ’nin zaman aralığı $\Delta t = t_2 - t_1$ ’re oranı olarak tanımlıyoruz:

$$\omega_{\text{ort-z}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (9.2)$$

Denklem (9.2)’deki z -alt indisi Şekil 9.3a’daki cismin, diyagram düzlemine dik olan z -ekseni etrafında döndüğünü belirtmektedir. **Anlık açısal hız** ω_z ise, Δt sıfıra giderken $\omega_{\text{ort-z}}$ ortalama hızını limiti, yani θ ’nın t ’ye göre türevi olarak tanımlanır:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{açısal hız tanımı}) \quad (9.3)$$

Basit olarak “açısal hız” deyince, ortalama açısal hız değil, anlık açısal hızı kast ettiğimizi belirtelim.

Açısal hız ω_z , katı cismin dönme yönüne bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir (Şekil 9.4). Sıkça kullanacağımız “açısal sürat ω ” açısal hızın büyüklüğüdür. Doğrusal sürat (v) gibi, açısal sürat (ω) da hiçbir zaman negatif değildir.

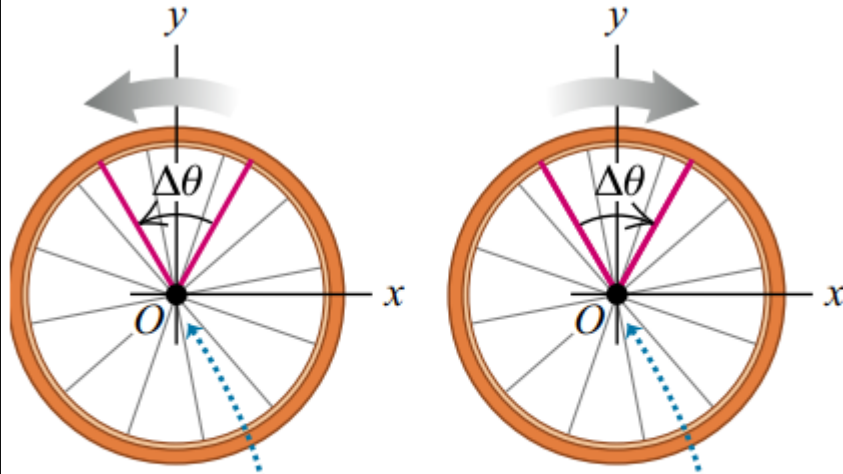
9.4 Bir katı cismin ortalama açısal hızı (burada gösterilen) ve anlık açısal hızı negatif ya da pozitif olabilir.

Saat yönünün tersine dönme pozitif:

$$\Delta\theta > 0, \text{ yani } \omega_{\text{ort-z}} = \Delta\theta / \Delta t > 0$$

Saat yönünde dönme negatif:

$$\Delta\theta < 0, \text{ yani } \omega_{\text{ort-z}} = \Delta\theta / \Delta t < 0$$



Dönme eksenini (z-ekseni) merkezden geçer ve kitabın sayfasına dik doğrultudadır.

UYARI **Açısal hız ve doğrusal hız** Açısal hız ω_z ve doğrusal hız v_x (Bkz. Kısım 2.2) arasındaki farkı çok iyi kavramamız gerekir. Bir cisim v_x hıza sahipse, cisim bir bütün olarak x -ekseni boyunca hareket etmektedir. Bunun aksine, eğer bir cisim ω_z açısal hıza sahipse, z -ekseni etrafında dönmektedir. Bu ifade katı cismin z -ekseni boyunca hareket ettiği anlamına gelmez. ■

☆ *Dönen katı cismin her parçası herhangi zamanda aynı açısal hıza sahiptir.* Katı cisim θ açısının büyümesi yönünde dönüyorsa açısal hız pozitif, θ açısının küçülen yönünde dönüyorsa negatiftir.

Eğer θ açısı radyan cinsinden ölçülüyorsa, açısal hızın birimi saniye başına radyan'dır (rad/s). Açısal hız, devir/dakika (rpm) gibi diğer birimler cinsinden de ifade edilir. 1 dev = 2π rad/s olduğundan kullanışlı iki dönüşüm;

$$1 \text{ dev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{veya} \quad 1 \text{ dev/dak} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

1 rad/s yaklaşık 10 rpm demektir.

Örnek 9.1

Açısal hızın hesaplanması

Örnek bir araba motorunun volanı denenmektedir. Volanın θ açısal konumu

$$\theta = (2.0 \text{ rad/s}^3)t^3$$

olarak verilmiştir. Volanın çapı 0.36 m olduğuna göre; (a) θ açısının $t_1 = 2.0$ ve $t_2 = 5.0$ anındaki değerini radyan ve derece cinsinden bulunuz. (b) Volanın dış kenarında bulunan bir parçacığın verilen zaman aralığında gittiği mesafeyi bulunuz. (c) Ortalama açısal hızın değerini $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında rad/s ve dev/dak olarak bulunuz. (d) Anlık açısal hızın $t = t_2 = 5.0$ s. anındaki değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Açısal konumun t_1 ve t_2 zamanlarındaki θ_1 ve θ_2 açısal değerlerini, t_1 ve t_2 arasındaki $\Delta\theta$ açısal yerdeğişimini, t_1 ve t_2 zaman aralığında gidilen yol ve ortalama açısal hızı ve son olarak t_2 anındaki anlık açısal hızı bulmamız gerekiyor.

TASARLAMA: Açısal konum θ zamanın fonksiyonu olarak verildiğinden ilk hedef değişkenler θ_1 ve θ_2 kolayca bulunabilir; $\Delta\theta$ açısal yerdeğişimi θ_1 ve θ_2 arasındaki farka eşittir. Bulunan $\Delta\theta$ yardımıyla Denklem (9.1) ve (9.2) kullanılarak sırayla gidilen mesafe ve ortalama açısal hız bulunur. Anlık açısal hızı bulmak için Denklem (9.3)'te olduğunu gibi θ 'nın zamana göre türevi alınır.

İŞLEM: (a) Zamanın t değerlerini denklemde yerine koyarsak;

$$\theta_1 = (2.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^3 = 16 \text{ rad}$$

$$= (16 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 920^\circ$$

$$\theta_2 = (2.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^3 = 250 \text{ rad}$$

$$= (250 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 14\,000^\circ$$

(b) Volan $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250 \text{ rad} - 16 \text{ rad} = 234 \text{ rad}$. açısal yerdeğişimi kadar dönmektedir. Yarıçap r çapın yarısıdır, yani 0.18 m'dir. Gidilen açısal yol Denklem (9.2) kullanılarak,

$$s = r\theta = (0.18 \text{ m})(234 \text{ rad}) = 42 \text{ m}$$

Denklem (9.1)'nin kullanılabilmesi için açının radyan cinsinden tanımlanması gereklidir. θ açısı gerçekten boyutsuz bir sayı olduğundan radyanı eğrisel s yolu ifadesinde kullanmayacağız; s metre cinsinden ölçülen bir uzaklıktır ve r ile aynı birime sahiptir.

(c) Denklem (9.2)'den;

$$\omega_{\text{ort-z}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250 \text{ rad} - 16 \text{ rad}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 78 \text{ rad/s}$$

$$= \left(78 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ dev}}{2\pi \text{ rad}}\right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ dak}}\right) = 740 \text{ dev/dak}$$

(d) Denklem (9.3) kullanılırsa;

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2.0 \text{ rad/s}^3)t^3] = (2.0 \text{ rad/s}^3)(3t^2) \\ = (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2$$

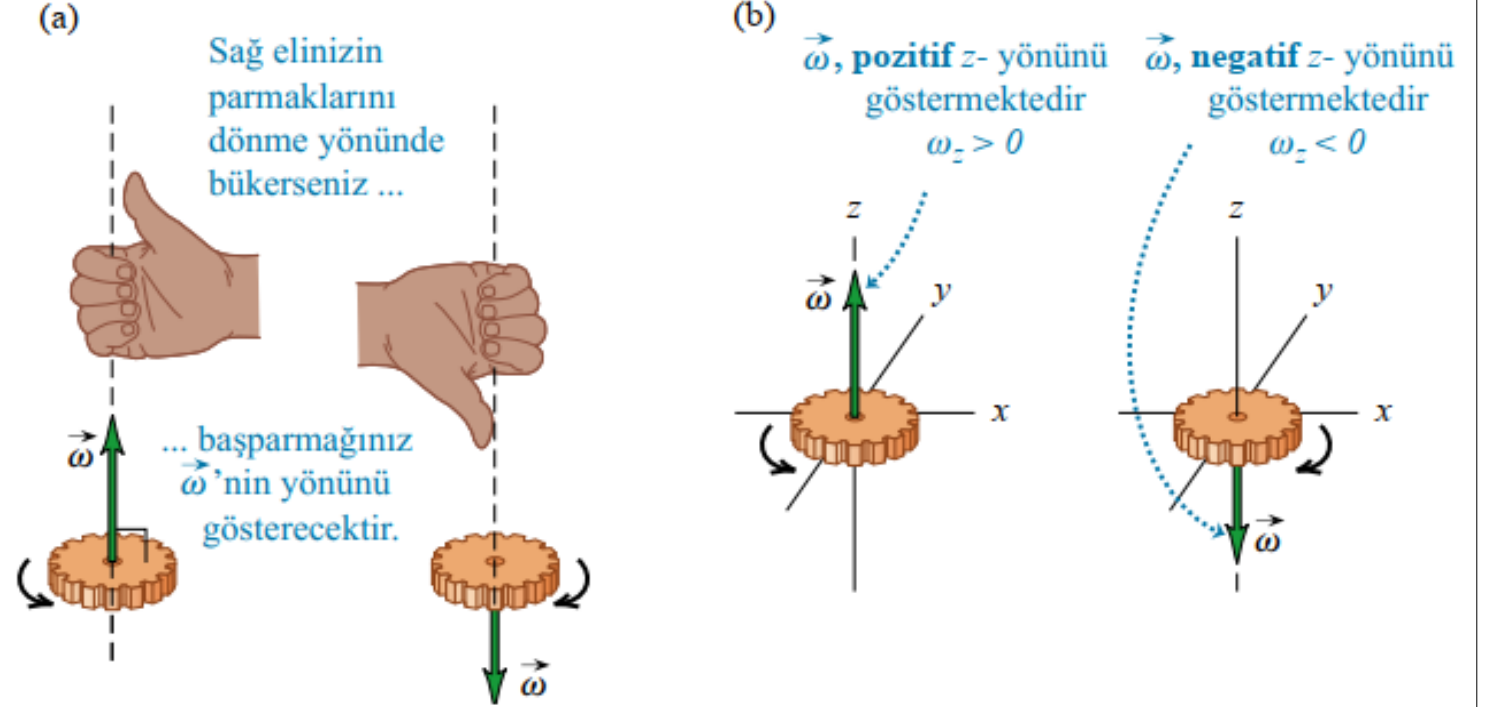
$t = 5.0 \text{ s}$ 'de

$$\omega_z = (6.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^2 = 150 \text{ rad/s}$$

DEĞERLENDİRME: (d) şıkkındaki cevabımız ω_z açısal hızın t^2 ile doğru orantılı olduğunu ve dolayısıyla zamanla arttığını gösteriyor. Sayısal değerler bu sonuçla uyumludur: $t = 5.0 \text{ s}$ 'deki 150 rad/s anlık açısal hızı $\Delta t = t_2 - t_1 = 3 \text{ s}$ zaman aralığındaki 78 rad/s ortalama açısal hızından büyüktür.

Vektör Olarak Açısal Hız

9.5 (a) Açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ 'nin yönünü bulmak için sağ el kuralı kullanılır. Dönme yönünün ters çevrilmesi $\vec{\omega}$ 'nin yönünü ters çevirir. (b) ω_z 'nin işareti z -ekseni doğrultusundaki dönme içindir.



Şekil 9.5'te görüldüğü gibi, $\vec{\omega}$ açısal hız vektörünün yönü vektör çarpımını tanımlamak için kullandığımız sağ el kuralı ile verilir. Eğer dönme z -eksenine göre ise, $\vec{\omega}$ açısal hız vektörünün sadece z -bileşeni vardır. $\vec{\omega}$ pozitif z -ekseni doğrultusunda ise bu bileşen pozitif ve aksi durumda ise negatiftir.

Açısal İvme

Katı cismin açısal hızı değiştiğinde *açısal ivme* kazanmış olur. Bisiklet tekerinin daha hızlı dönmesi için pedalına daha fazla güçle bastığınızda veya tekerleri durdurmak için freni kullandığınızda, tekerleğe açısal ivme vermiş olursunuz. Otomobil motorunun manivela şaftı gibi fırladak biçiminde dönen bir makinenin dönme hızını değiştirdiğimizde o cisme açısal ivme kazandırırız.

Şayet t_1 ve t_2 anlarındaki açısal hızlar ω_{1z} ve ω_{2z} ise, $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığındaki **ortalama açısal ivme** $\alpha_{\text{ort-z}}$ açısal hız değişimi bölü Δt olarak tanımlanır (Şekil 9.6);

$$\alpha_{\text{ort-z}} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \quad (9.4)$$

Anlık açısal ivme α_z , $\alpha_{\text{ort-z}}$ 'nın $\Delta t \rightarrow 0$ durumunda limit halidir

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\text{açısal ivmenin tanımı}) \quad (9.5)$$

Genelde açısal ivmenin birimi rad/s^2 'dir. Bu andan itibaren “açısal ivme” terimini ortalama açısal ivme değil, anlık açısal ivme yerine kullanacağız.

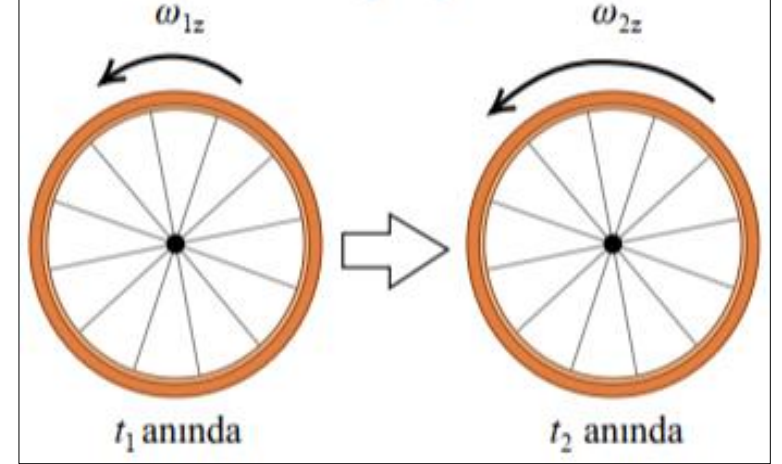
Açısal hız $\omega_z = d\theta/dt$ olduğundan, açısal ivmeyi açısal koordinatın zamana göre ikinci türevi olarak da ifade edebiliriz:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.6)$$

9.6 Dönen bir katı cismin ortalama açısal ivmesinin hesaplanması.

Ortalama açısal ivme, açısal hızdaki değişimin zaman aralığına bölünmesidir.

$$\alpha_{\text{ort-z}} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$



θ açısal konumu, ω_z açısal hızı ve α_z açısal ivmeyi tanımlar.

Örnek 9.2 Açısal ivmenin hesaplanması

Örnek 9.1’de bir araba motorunun volanının herhangi bir t anındaki anlık açısal hızı ω_z olarak

$$\omega_z = (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2$$

olarak bulunmuştu. (a) Volanın $t_1 = 2.0 \text{ s}$ ve $t_2 = 5.0 \text{ s}$. arasındaki ortalama açısal ivme $\alpha_{\text{ort-z}}$ ’yi bulunuz. (b) Volanın $t_2 = 5.0 \text{ s}$. anındaki anlık açısal ivme α_z ’i bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Bu örnek ortalama açısal ivmenin $\alpha_{\text{ort-z}}$ ve anlık açısal ivmenin α_z tanımlarını kullanmaktadır.

TASARLAMA: Denklem (9.4) ve Denklem (9.5) kullanarak, volanın t_1 ve t_2 arasındaki $\alpha_{\text{ort-z}}$ ortalama ivmesini ve $t = t_2$ anındaki α_z anlık açısal ivmesini bulabiliriz.

İŞLEM: (a) Açısal hızın t_1 ve t_2 anlarındaki değerleri

$$\omega_{1z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^2 = 24 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{2z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^2 = 150 \text{ rad/s}$$

Ortalama açısal ivmenin değeri Denklem (9.4)’den;

$$\alpha_{\text{ort-z}} = \frac{150 \text{ rad/s} - 24 \text{ rad/s}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 42 \text{ rad/s}^2$$

(b) Herhangi bir t anındaki α_z anlık açısal ivmesi Denklem (9.5)’ten;

$$\begin{aligned}\alpha_z &= \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6.0 \text{ rad/s}^3)(t^2)] = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2t) \\ &= (12 \text{ rad/s}^3)t\end{aligned}$$

olarak bulunur. α_z ’nin $t = 5 \text{ s}$ ’deki değeri,

$$\alpha_z = (12 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s}) = 60 \text{ rad/s}^2$$

DEĞERLENDİRME: Bu durumda açısal ivmenin sabit olmadığı dikkatinizi çekmiştir. Açısal ivme α_z daima pozitif olduğundan, açısal hız ω_z daima artar. Ayrıca, α_z açısal ivmesi zamanla arttığından, açısal hızın artış oranı da artmaktadır.

Vektör Olarak Açısal İvme

Açısal hız için yaptığımız gibi, bir açısal ivme vektörü ($\vec{\alpha}$) tanımlamak da yararlı olacak. Matematiksel olarak $\vec{\alpha}$, açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ 'nın zamana göre türevidir. Cisim sabit bir z -ekseni etrafında dönüyorsa $\vec{\alpha}$ 'nın sadece z -bileşeni vardır; α_z niceliği tam olarak bu bileşendir. Bu durumda, şayet dönme süratleniyorsa $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ aynı yönde, dönme yavaşlıyorsa $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ zıt yöndedir (Şekil 9.7).

Sabit Açısal İvmeli Dönme

Bir katı cismin $t = 0$ anındaki açısal hızı ω_{0z} ve herhangi diğer t anındaki açısal hızı ω_z olsun. Cismin α_z açısal ivmesi sabit ve herhangi bir zaman aralığında ortalama değerine eşittir. Denklem (9.4)'ün kullanılması ile 0 ile t zaman aralığında

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \text{ veya } \omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (\text{sadece sabit açısal ivme için}) \quad (9.7)$$

Denklem (9.7)'deki $\alpha_z t$ çarpımı ω_z açısal hızın $t = 0$ ve sonraki t zamanı arasındaki toplam değişimini ifade etmektedir; herhangi bir t anındaki ω_z açısal hızı başlangıç ω_{0z} hızı ve $\alpha_z t$ değişiminin toplamına eşittir.

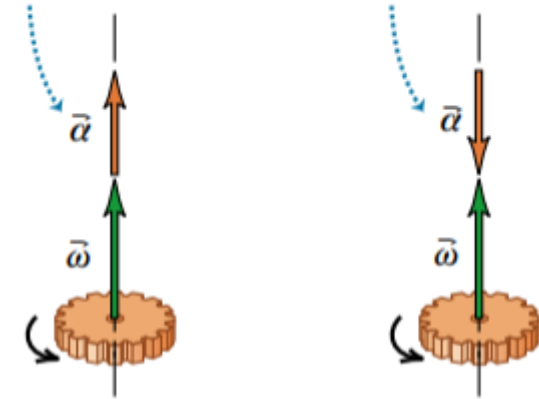
Açısal ivme sabit olduğunda, açısal hız düzgün oranda değişir, bu nedenle 0 ile t zaman aralığındaki ortalama değeri başlangıç ve bitiş değerlerinin ortalamasına eşittir:

Ayrıca, $\alpha_{\text{ort-z}}$ ortalama açısal hızın, toplam açısal yerdeğişiminin $(\theta - \theta_0)$ zaman aralığına $(t - 0)$ bölünmesi olduğunu biliyoruz;

9.7 Dönme eksenini sabit olduğunda, açısal ivme ve açısal hız vektörleri bu eksen doğrultusundadır.

$\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ aynı yönde:
Dönme süratlenir.

$\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ zıt yönde:
Dönme yavaşlar



$$\omega_{\text{ort-z}} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \quad (9.8)$$

$$\omega_{\text{ort-z}} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \quad (9.9)$$

Denklem (9.8) ve (9.9) eşitlenip sonucun t ile çarparsak;

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad (\text{sadece sabit açısal ivme için}) \quad (9.10)$$

Denklem (9.7) ve (9.10) birleştirilirse θ ile t arasında ω_z açısal hızını içermeyen bir bağıntıyı bulmak mümkündür;

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \quad \text{veya}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (\text{sadece sabit açısal ivme için}) \quad (9.11)$$

Bunun anlamı şudur; $t = 0$ başlangıç anında katı cisim θ_0 açısal konumunda ve açısal hızı ω_{0z} ise, herhangi bir t anındaki açısal konumu üç terimin toplamına eşittir: başlangıç açısal konumu θ_0 artı sabit açısal ivme durumundaki $\omega_{0z}t$ dönmesi artı açısal hızın değişmesinden kaynaklanan $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ ilave dönmesi.

Denklem (2.13)'teki doğrusal hareket nicelikleri ile dönme hareketindeki benzer nicelikler yer değiştirir;

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (\text{sadece sabit açısal ivme için}) \quad (9.12)$$

Tablo 9.1 Sabit İvmeli Doğrusal ve Açısal Hareketin Karşılaştırılması

Düzgün-Doğru Boyunca Sabit Doğrusal İvmeli Hareket	Sabit-Eksen Etrafında Sabit Açısal İvmeli Dönme
$a_x = \text{sabit}$	$\alpha_z = \text{sabit}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t$

UYARI **Sabit açısal ivme** Bütün bu sonuçların açısal ivme α_z 'nin sabit olması halinde geçerli olduğunu aklınızdan çıkarmayınız; bu denklemleri α_z 'nin sabit olmadığı durumlarda kullanmamaya dikkat edin. Tablo 9.1 sabit açısal ivme için geçerli olan Denklem (9.9), (9.10), (9.11) ve (9.12) ve bunların sabit ivmeli doğrusal hareket için karşılıkları olan denklemleri vermektedir. ■

Örnek 9.3

Sabit açısal ivmeli dönme

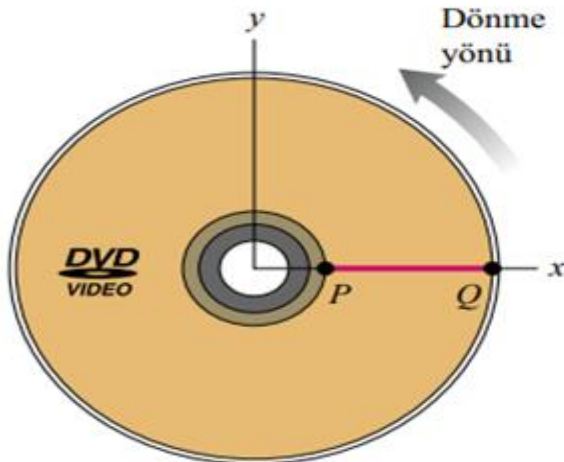
İzlemiş olduğunuz bir DVD filminin yeni bittiğini ve diskin durmak üzere olduğunu düşünelim. Diskin $t = 0$ anındaki açısal hız 27.5 rad/s ve açısal ivmesi sabit olup değeri -10.0 rad/s^2 'dir. Diskin yüzünde bir PQ çizgisi $t = 0$ anında pozitif x -ekseni üzerindedir (Şekil 9.8). (a) Disk'in $t=0.300 \text{ s}$ deki açısal hızı nedir? (b) Diskin yüzeyindeki PQ çizgisinin $t=0.300 \text{ s}$ de pozitif x -ekseni ile yaptığı açı nedir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Disk'in açısal ivmesi sabittir, o halde bu kısımda elde ettiğimiz herhangi bir denklemleri kullanabiliriz. Hedef değişkenimiz $t = 0.300 \text{ s}$ anında açısal hız ve açısal yerdeğiştirme.

TASARLAMA: Verilerimiz şunlar; ilk açısal hız $\omega_{0z} = 27.5 \text{ rad/s}$, PQ çizgisi ile pozitif x -ekseni arasındaki başlangıç açısı $\theta_0 = 0$, açısal ivme $\alpha_z = -10.0 \text{ rad/s}^2$ ve $t = 0.300 \text{ s}$ zamanı. Bu verilerle Denklem (9.7) ve (9.11) kullanarak ω_z ve θ hedef değişkenlerini kolayca bulabiliriz.

9.8 Dönmekte olan DVD üzerinde $t = 0$ anındaki PQ doğrusu.



İŞLEM: (a) Denklem (9.7)'yi kullanarak $t = 0.300 \text{ s}$ anında,

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27.5 \text{ rad/s} + (-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s}) = 24.5 \text{ rad/s}$$

(b) Denklem (9.11)'den,

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2 \\ &= 0 + (27.5 \text{ rad/s})(0.300 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s})^2 \\ &= 7.80 \text{ rad} = 7.80 \text{ rad} \left(\frac{1 \text{ dev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 1.24 \text{ dev} \end{aligned}$$

DVD tam bir devir yapmış ve ek olarak da 0.24 devir, yani ilave açı olarak $(0.24 \text{ dev})(360^\circ/\text{dev}) = 87^\circ$ yapmıştır. Bu nedenle PQ çizgisi ile pozitif x -ekseni arasındaki açı 87° 'dir.

DEĞERLENDİRME: (a) şıkkı için bulduğumuz sonuç açısal hızın azaldığını söylüyor. Beklenen de zaten budur, çünkü α_z negatiftir. (a) şıkkında ω_z açısal hızı için bulduğumuz değeri (b) şıkkındaki θ değerini doğrulamak için kullanabiliriz. Denklem (9.12)'i çözmek için yeterlidir, $\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$, θ açısı için:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z} \right) \\ &= 0 + \frac{(24.5 \text{ rad/s})^2 - (27.5 \text{ rad/s})^2}{2(-10.0 \text{ rad/s}^2)} = 7.80 \text{ rad} \end{aligned}$$

Bu da önceden bulduğumuz sonucu doğrulamaktadır.

Doğrusal ve Açısal Kinematik Bağlantısı

Dönme hareketi anlayışımızı ilerletmek için bu soruya yanıt vermek zorundayız. Dönen bir cismin kinetik enerjisini bulmak için, bir parçacığın $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjisi ifadesiyle başlamamız gerekir ve bunun için de katı cisme ait her parçacığın hızının bilmeliyiz.

Dönen Katı Cisimde Doğrusal Hız

Herhangi bir zamanda, r açısı (radyan cinsinden) ve s eğrisel uzunluğu arasında

$$s = r\theta$$

bağlantısı vardır. Herhangi bir parçacık için r 'nin sabit olduğunu göz önünde bulundurarak, bu ifadenin zamana göre türevini ve her iki tarafın da mutlak değerini alırsak;

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

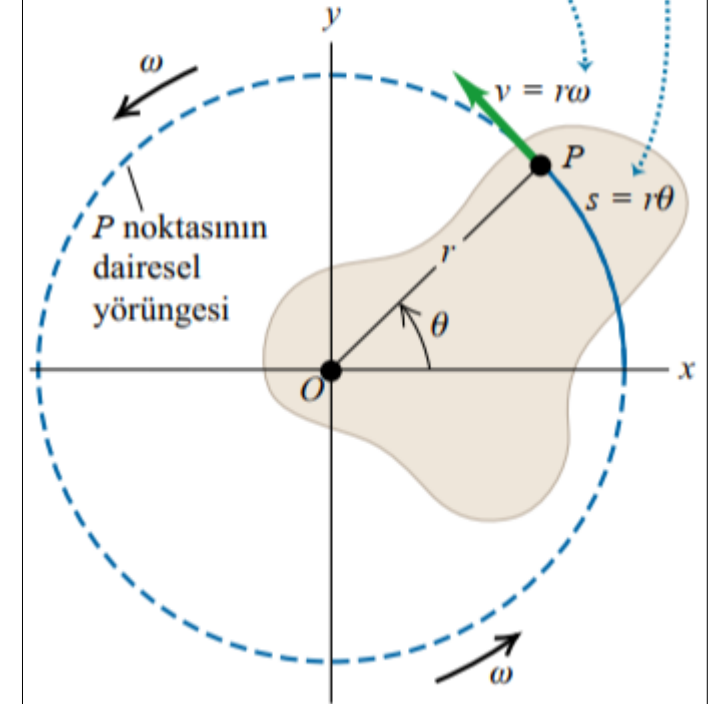
Burada $|ds/dt|$ eğrisel s yolunun değişme oranının mutlak değeridir ve parçacığın anlık doğrusal sürati v 'ye eşittir. Benzer biçimde, $|d\theta/dt|$ de açının değişme oranının mutlak değeri olup **açısal hız** ω , yani anlık açısal hızın (rad/s) büyüklüğüne eşittir. Bu nedenle,

$$v = r\omega \quad (\text{doğrusal ve açısal sürat bağlantısı}) \quad (9.13)$$

9.9 Bir katı cisim sabit O noktasından geçen ekseninde dönmektedir.

Cismin üzerindeki P noktasının hareket ettiği mesafe (θ açısı radyan cinsinden).

P noktasının doğrusal sürati (açısal sürat ω , rad/s cinsinden)



Parçacık dönme ekseninden ne kadar uzaksa, doğrusal sürati o kadar büyük olur. Doğrusal hız vektörünün yönü her noktada dairesel yörüngeye teğettir (Şekil 9.9).

UYARI Sürat ve hız arasındaki fark Denklem (9.13)'te yer aldığı gibi, doğrusal ve açısal süratler (v ve ω) ve doğrusal ve açısal hızlar (v_x ve ω_z) arasındaki farkı unutmayınız. Alt indissiz nicelikler (v ve ω) hiçbir zaman negatif değildir; $\vec{v}$ ve $\vec{\omega}$ vektörlerinin büyüklüklerini verirler ve parçacığın ne kadar hızla hareket ettiğini (v) ve katı cismin ne kadar hızla döndüğünü (ω) ifade ederler. Öte yandan, alt indisli nicelikler (v_x ve ω_z) pozitif veya negatif olabilirler ve işaretleri hareketin yönünü belirler. ■

Dönen Katı Cisimde Doğrusal İvme

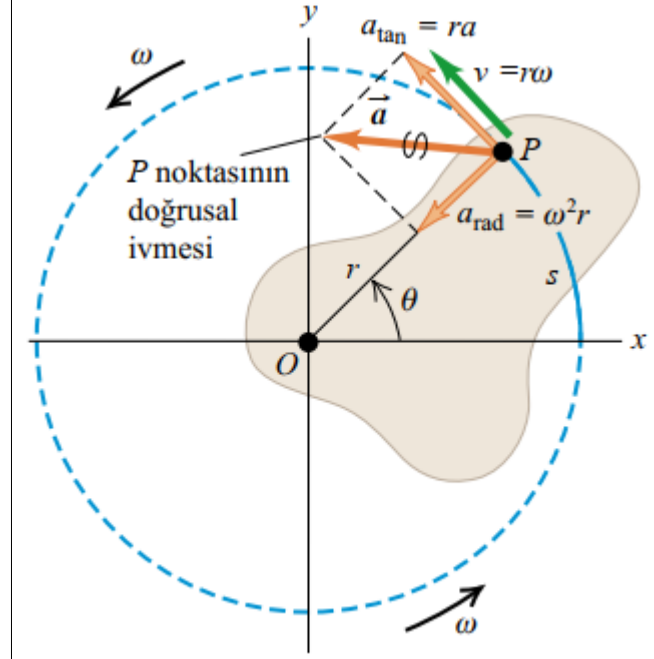
Dairesel yörüngede hareket eden bir parçacığın ivmesini, Kısım 3.4'de yaptığımız gibi, merkezci (a_{rad}) ve teğet (a_{tan}) bileşenleri cinsinden ifade edebiliriz (Şekil 9.10). Şimdi Kısım 3.4'ü hatırlamak yerinde olur. **İvmenin teğet bileşeni** (a_{tan})'ın anlık hıza paralel bileşen olduğunu, parçacığın hızının büyüklüğünü değiştirmek istediğini (örneğin süratini) ve süratin değişim oranına eşit olduğunu bulmuştuk. Denklem (9.13)'ün zamana göre türevini alırsak,

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (\text{dönen cisim üzerindeki parçacığın teğetsel ivmesi}) \quad (9.14)$$

9.10 Dönme sürati artmakta olan bir katı cisim. P noktası ivmesinin iki bileşeni vardır; dönme eksenine doğru ($\vec{v}$ hızına dik) bileşeni a_{rad} ile P noktasının dairesel yörüngesi üzerinde ($\vec{v}$ hızına paralel) bileşeni a_{tan} .

Radyal ve teğetsel ivme bileşenleri:

- $a_{rad} = \omega^2 r$, P noktasının merkezci ivmesidir.
- $a_{tan} = r\alpha$, P 'nin dönmesi hızlanıyor demektir (cisim açısal ivmeye sahip).



Parçacığın ivmesinin bileşeni dönme eksenine doğrudur ve **ivmenin merkezci bileşeni** a_{rad} ise parçacığın hızının yönündeki değişmeye bağlıdır. Kısım (3.4)'te bulduğumuz $a_{\text{rad}} = v^2/r$ bağıntısını Denklem (9.13)'ü kullanarak ω cinsinden ifade edebiliriz:

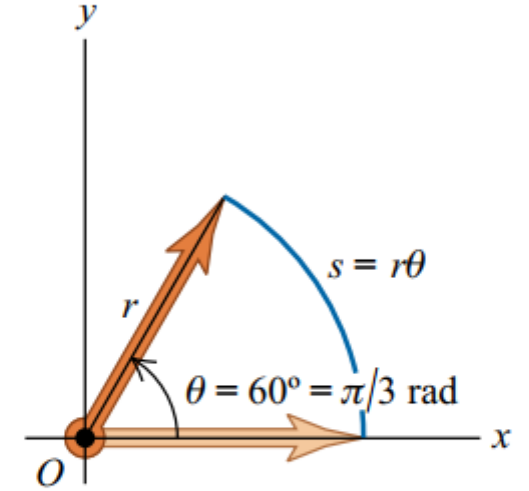
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{dönen cisim üzerindeki parçacığın merkezci ivmesi}) \quad (9.15)$$

Bu eşitlik her zaman, hatta ω ve v niceliklerinin *değişken olmaları durumunda bile* doğrudur. Merkezci ivme her zaman dönme eksenini yönündedir.

Bir parçacığın ivmesinin merkezci ve teğetsel vektör parçalarının toplamı doğrusal ivmedir (Şekil. 9.10).

UYARI Bütün denklemlerde açıları radyan olarak kullanınız Denklem (9.1) veya $s = r\theta$ ifadesinin sadece θ açısı radyan cinsinden ölçüldüğünde geçerli olduğunu aklınızdan çıkarmayınız. Bu uyarı bu ifadeden türetilen bütün denklemler ve Denklem (9.13), (9.14) ve (9.15) için de doğrudur. Bu denklemleri kullandığınızda açısal nicelikleri devir veya derece olarak değil, mutlaka radyan olarak ifade etmelisiniz. (Şekil 9.11). ■

9.11 Doğrusal ve açısal nicelikleri ilişkilendirirken her zaman radyanları kullanın.



Doğrusal niceliği açısal niceliğe ilişkilendiren tüm denklemlerde, açılar **MUTLAKA** radyan cinsinden ifade edilmelidir...

DOĞRU! $s = (\pi/3)r$

... asla derece ya da devir kullanmayın.

YANLIŞ $s = 60r$

Örnek 9.4 Bir diskin fırlatılması

Bir disk atıcısı elindeki diski yarıçapı 80.0 cm olan bir daire boyunca hareket ettiriyor. Disk atıcısı belirli bir anda 10.0 rad/s açısal hızla dönüyor ve açısal hızı 50 rad/s² oranında artıyor. Disk'in bu andaki ivmesinin teğet ve merkezci bileşenlerini ve ivmesinin büyüklüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Diski dairesel yörüngede hareket eden bir parçacık gibi tasarlırsak (Şekil 9.12a), bu kısımda geliştirdiğimiz fikirleri kullanabiliriz. .

TASARLAMA: Dairesel yörüngenin yarıçapı $r = 0.800$ m, açısal hız $\omega = 10.0$ rad/s ve açısal hızın değişme oranı $\alpha = 50.0$ rad/s²

verilmiştir (Şekil 9.12b). İlk iki hedef değişkenimiz olan ivmenin teğet ve merkezci bileşenleri ($a_{\tan}$ ve a_{rad}) Denklem (9.14) ve (4.15) kullanılarak bulunabilir. İvme vektörünün bu bileşenlerini kullanarak, Pisagor kuramı yardımıyla ivmenin büyüklüğü a (üçüncü hedef değişken) bulunabilir..

İŞLEM: Denklem (9.14) ve (9.15)'ten,

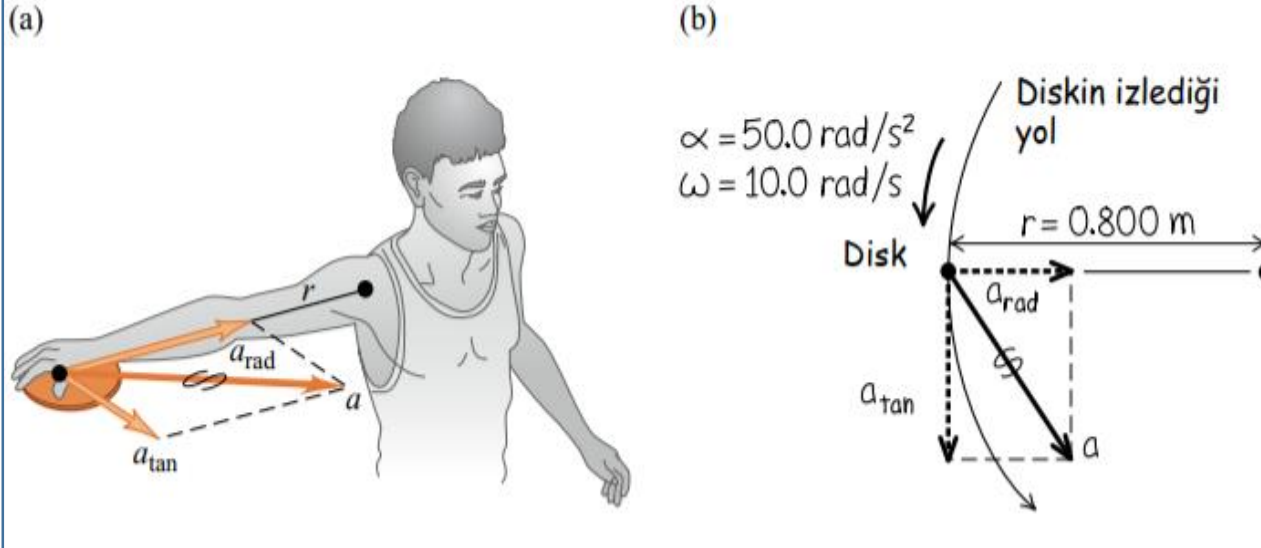
$$a_{\tan} = r\alpha = (0.800 \text{ m})(50.0 \text{ rad/s}^2) = 40.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r = (10.0 \text{ rad/s})^2 (0.800 \text{ m}) = 80.0 \text{ m/s}^2$$

İvme vektörünün büyüklüğü;

$$a = \sqrt{a_{\tan}^2 + a_{\text{rad}}^2} = 89.4 \text{ m/s}^2$$

9.12 (a) Dairesel yörüngede disk atma. (b) Diskin ivme bileşenleri çizimde gösterilmiştir.



DEĞERLENDİRME: Dikkat ederseniz $a_{\tan}$, a_{rad} ve a için “radyan” birim olarak kullanmayı bıraktık. “Radyan” boyutu olmayan bir nicelik olduğundan bunu yapabiliriz.

İvmenin büyüklüğü a , yerçekimi ivmesinin büyüklüğü g 'nin on katıdır. a aynı kalırken, açısal hızın iki kat artarak 20 rad/s olduğunda ivmenin büyüklüğünün 322 m/s²'ye çıktığını veya yaklaşık olarak 33 g olduğunu gösterebilir misiniz?

Şekil 9.14'teki iki bisiklet dişlisinin açısal hızları ve her bir dişli-deki diş sayısı arasında nasıl bir bağıntı vardır?

ÇÖZÜM

Bisikletin zinciri kaymaz veya gerilmez, bu nedenle zincir her iki dişli üzerinde aynı teğet hızla hareket eder. Denklem (9.13)'ten

$$v = r_n \omega_n = r_{arka} \omega_{arka} \quad \text{o halde} \quad \frac{\omega_{arka}}{\omega_{ön}} = \frac{r_{ön}}{r_{arka}}$$

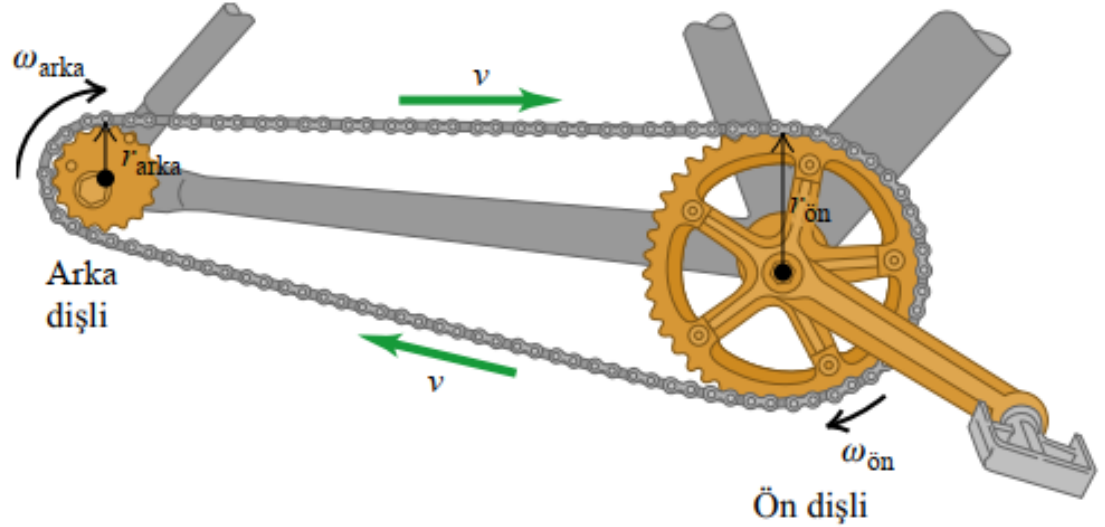
Açısal hız yarıçap ile ters orantılıdır. Bu bağıntı kaymayan bir kabloya bağlanmış makaralar için de geçerlidir. Zincirin rahat ve düzgün hareket edebilmesi için dişlilerin çevresindeki dişler arasındaki mesafenin eşit olması gerekir. $N_{ön}$ ve N_{arka} ön ve arka dişlideki diş sayısı olsun; dişliler üzerindeki dişler arası mesafenin aynı olması şartına göre;

$$\frac{2\pi r_{ön}}{N_{ön}} = \frac{2\pi r_{arka}}{N_{arka}} \quad \text{veya} \quad \frac{r_{ön}}{r_{arka}} = \frac{N_{ön}}{N_{arka}}$$

Bu eşitlikleri diğer denklemlerle birleştirince;

$$\frac{\omega_{arka}}{\omega_{ön}} = \frac{N_{ön}}{N_{arka}}$$

9.14 Bisikletin zincir ve dişlileri.



Her bir dişlinin açısal hızı diş sayısı ile ters orantılıdır. Vitesli bisikletlerde, $N_{ön}/N_{arka}$ oranı maksimum olduğunda, ön dişlide belirli bir pedal miktarı $\omega_{ön}$ ile, arka dişlide en yüksek açısal hız ω_{arka} elde edilir. Bunun anlamı ön dişlide en büyük yarıçaplı dişliyi (en büyük $N_{ön}$), arka dişlide en küçük yarıçaplı dişliyi (en küçük N_{arka}) seçmek demektir.

Dönme Hareketinde Enerji

Başlangıç olarak, katı cismin kütleleri $m_1, m_2, \dots$ ve dönme ekseninden $r_1, r_2, \dots$ uzaklıklarda bulunan çok sayıda parçacıklardan oluştuğunu düşünelim. Parçacıkları i indisi ile tanımlayalım: i 'nci parçacığın kütlesi m_i ve dönme eksenine olan uzaklığı r_i olsun. Parçacıkların aynı düzlem içinde bulunma zorunluluğu yoktur; bu nedenle r_i 'yi eksenenden i parçacığına olan dik mesafe olarak tanımlıyoruz.

Bir katı cisim sabit bir eksen etrafında döndüğünde, i 'nci parçacığın doğrusal hızı v_i Denklem (9.13)'e göre $v_i = r_i \omega$ ifadesiyle verilir; burada ω katı cismin açısal hızıdır. Farklı parçacıklar farklı r değerlerine sahiptirler, fakat hepsi için ω aynıdır (aksi halde cisim katı olamazdı). i 'nci parçacığın kinetik enerjisi;

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

olarak tanımlanabilir. Katı cismin toplam kinetik enerjisi bütün parçacıkların kinetik enerjilerinin toplamıdır;

$$K = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Ortak faktör olan $\omega^2/2$ bu ifadenin dışına alırsa,

$$K = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Parantez içindeki nicelik, her bir parçacığın kütesinin dönme eksenine olan uzaklığın karesiyle çarpımı ve bu çarpımların toplamıyla bulunmuştur, I ile gösterilir ve bu dönme eksenini için katı cismin **eylemsizlik momenti** olarak tanımlanır;

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{eylemsizlik momenti tanımı}) \quad (9.16)$$

Burada “moment”in anlamı, I ifadesinin cismin kütesinin düzlem içinde nasıl dağıldığına bağlı olduğudur; zaman için kullanılan “moment” anlamına gelmez. Dönme eksenini ve toplam kütesi verilen bir katı cisim için, cismi oluşturan parçacıkların dönme eksenine olan uzaklığı eylemsizlik momentinin büyüklüğünü belirler. Katı bir cisimde r_i mesafelerinin tamamı sabittir ve eylemsizlik momenti I cismin eksen etrafında nasıl döndüğünden bağımsızdır. Eylemsizlik momentinin SI birimi kilogram-metre karedir ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

Bir katı cismin **dönme kinetik enerjisi** K , eylemsizlik momenti I cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{bir katı cismin dönme kinetik enerjisi}) \quad (9.17)$$

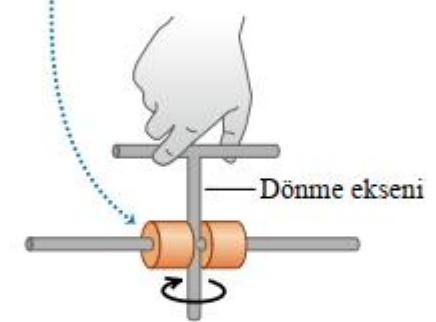
Denklem (9.17) ile verilen kinetik enerji, enerjinin yeni hali değildir, sadece dönen katı cisim oluşturan parçacıkların kinetik enerjilerin cebirsel toplamıdır. Denklem (9.17)'yi kullanmak için ω , saniyedeki devir sayısı veya derecesi değil, radyan/saniye (rad/s) olarak ölçülmeli ve K joule olarak verilmelidir. Bunun nedeni, enerji ifadesini bulurken $v_i = r_i \omega$ eşitliğini kullanmış olmamızdır.

Denklem (9.17) eylemsizlik momentinin basit bir fiziksel anlamını verir: *Eylemsizlik momenti ne kadar büyükse, ω açısal hızıyla dönen katı cismin kinetik enerjisi de o kadar büyüktür.* Bölüm 6'da, durağan bir cismi ivmelendirmek için yapılan işin o cismin kinetik enerjisine eşit olduğunu öğrendik. Bu nedenle, cismin eylemsizlik momenti ne kadar büyükse ve cisim durağan ise dönmeye başlamasını, cisim dönmekte ise dönmesinin durmasını sağlamak o kadar zordur (Şekil 9.15). Bu nedenle, I “dönme eylemsizliği” olarak da tanımlanır.

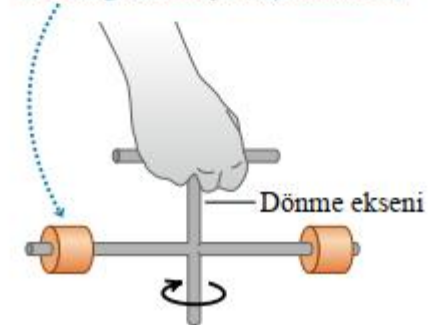
Bir sonraki örnek dönme eksenindeki değişimin I 'nin değerini nasıl etkilediğini göstermektedir.

9.15 Dikey bir eksen etrafında serbestçe dönen bir düzenek. Eylemsizlik momentini çeşitlendirmek için iki eşit kütleli silindir cisim yatay dingil üzerinde farklı konumlarda sabitlenebilir.

- Kütleler eksene yakın
- Küçük eylemsizlik momenti
- Düzeneği dönmeye başlatmak kolay



- Kütleler eksenenden uzakta
- Daha büyük eylemsizlik momenti
- Düzeneği dönmeye başlatmak zor



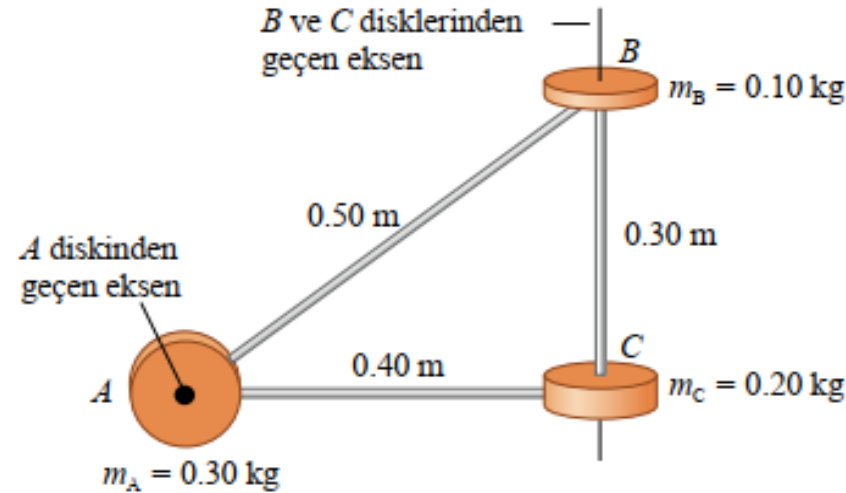
Örnek 9.7 Farklı dönme eksenleri için eylemsizlik momenti

Bir mühendis hafif ağırlıklı katı cisimlerle birbirine bağlanmış üç ağır diskten oluşan bir makine tasarlıyor (Şekil 9.16). (a) Bu katı cismin disk A 'nın merkezinden geçen bir eksene göre (diyagram düzlemine dik olan) eylemsizlik momenti nedir? (b) Bu cismin B ve C disklerinin merkezlerinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti nedir? (c) Bu katı cismin disk A 'nın merkezinden geçen eksene göre açısal hız $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$ ile döndüğünde kinetik enerjisi nedir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Diskleri kütleli parçacık ve hafif ağırlıklı ekleri kütesiz olarak düşünelim. Daha sonra, buradaki fikirleri üçlü parçacık sisteminin eylemsizlik momentinde kullanabiliriz.

9.16 Garip bir biçimde şekillendirilmiş bir makine parçası.



TASARLAMA: (a) ve (b) şıklarında her bir eksene göre eylemsizlik momentini bulmak için Denklem (9.16)'yı kullanacağız. A eksenine eylemsizlik momentini bulacağımız için, (c) şıkında istenen dönme kinetik enerjisini bulmak için Denklem (9.17)'yi kullanacağız.

İŞLEM: (a) A 'daki parçacık eksen üzerinde bulunmaktadır, eksen-den olan r uzaklığı sıfırdır. Bu nedenle, eylemsizlik momentine katkısı yoktur. Denklem (9.16)'ya göre,

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(b) B ve C parçacıkları eksen üzerinde bulunduklarından eksen-den olan uzaklık sıfırdır ($r = 0$), hiçbir eylemsizlik momentine katkıda bulunmaz. Sadece A 'nın katkısı vardır;

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(c) Denklem (9.17) den,

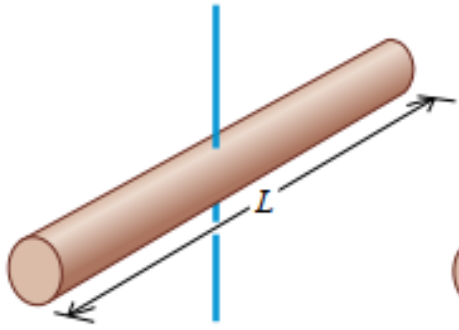
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

DEĞERLENDİRME: Elde ettiğimiz sonuçlar A 'dan geçen eksene göre olan eylemsizlik momentini B ve C 'den geçen eksene göre daha büyüktür. Dolayısıyla, bu iki eksene bakıldığında, B ve C 'den geçen eksene göre dönen makine parçaları yapmak daha kolaydır.

Tablo 9.2 Farklı Yapıya Sahip Cisimlerin Eylemsizlik Momentleri

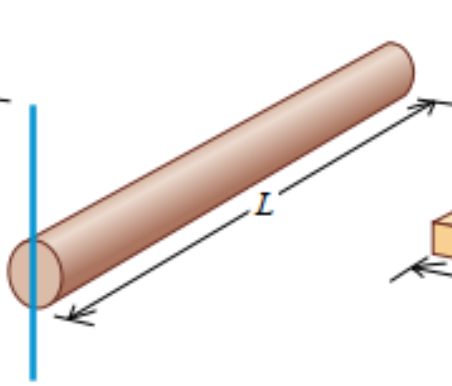
(a) Uzun, ince çubuk,
eksen merkezde

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



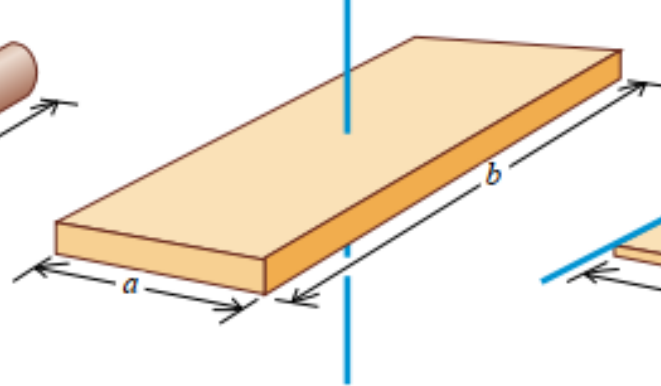
(b) Uzun, ince çubuk,
eksen bir uçta

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



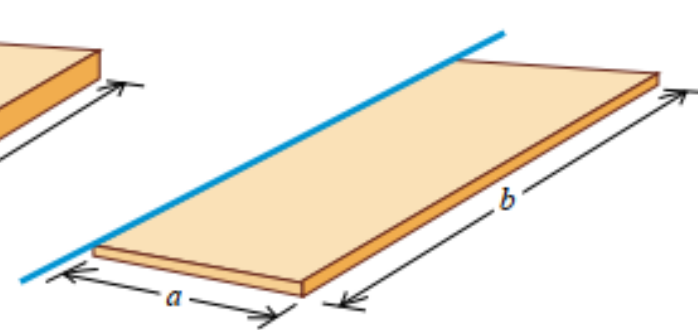
(c) Dikdörtgen plaka,
eksen merkezde

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



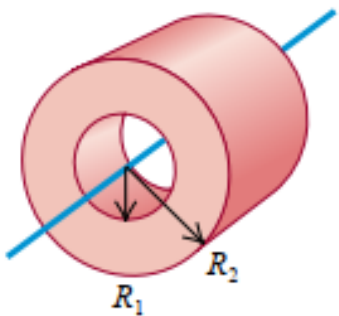
(d) İnce dikdörtgen plaka,
eksen kenar doğrultusunda

$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$



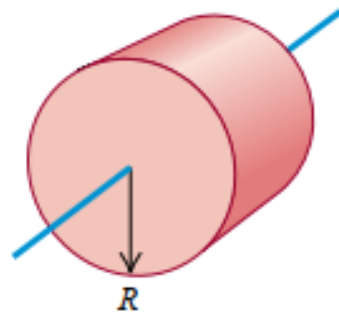
(e) Delik silindir

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



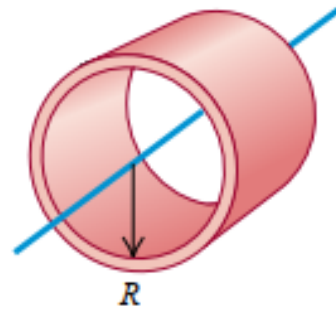
(f) Dolu silindir

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



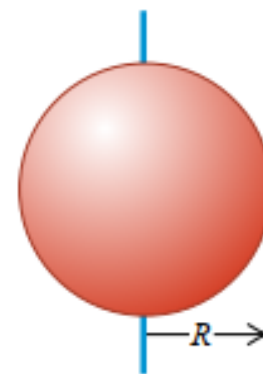
(g) İnce çeperli delik
silindir

$$I = MR^2$$



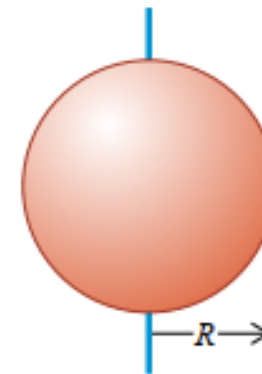
(h) Dolu küre

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



(i) İnce çeperli boş
küre

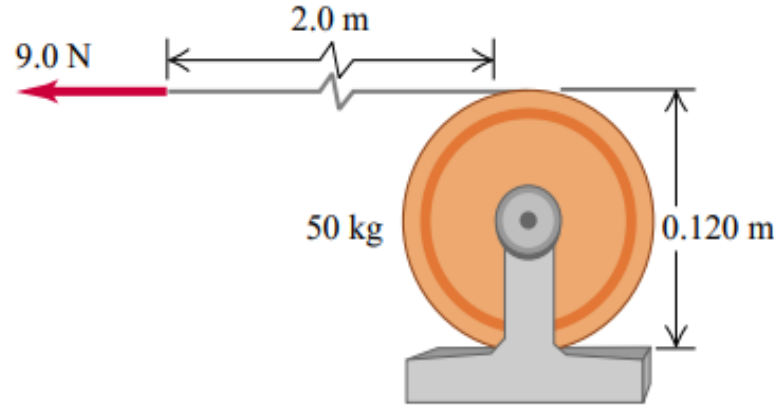
$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



Örnek 9.8 Sarımlı Çözülen Kablo I

Hafif, esnek ve gerilmeyen bir kablo bir vincin kasnağı etrafında sarılmıştır. Kasnağın kütlesi 50 kg ve çapı 0.120 m'dir, sürtünmesiz bir yatak üzerinde sabit bir yatay eksen etrafında dönmektedir (Bkz. Şekil 9.17). Kablonun serbest ucu 9.0 N değerinde sabit bir kuvvetle 2.0 m kadar çekiliyor. Kablo kaymadan açılarak silindiri döndürüyor. Silindir başlangıçta durağan ise açısal süratini ve kablunun son süratini bulunuz.

9.17 Kablo bir silindir üzerinden çözülmemektedir (yandan görünüş).



ÇÖZÜM

BELİRLEME:

Kablo ve silindir arasında sürtünme vardır ve kablo çekildiğinde silindiri döndürmektedir. Fakat kablo sıyrılmadığından, silindire göre bir kayması ve sürtünmenin yol açtığı mekanik enerji kaybı yoktur. Kablunun kütlesi ihmal edildiğinden, kablunun silindire uyguladığı kuvvet dışarıdan uygulanan F kuvvetine eşittir.

TASARLAMA: Silindirin ilk harekete başladığı noktaya nokta 1 ve kablunun 2.0 m hareket ettiği durumunu nokta 2 olarak tanımlayalım. Silindir durağan durumda harekete geçtiğinden, başlangıç kinetik enerjisi sıfırdır: $K_1 = 0$. F kuvveti nokta 1 ve nokta 2 arasında silindir üzerinde $s = 2.0$ m mesafesi boyunca iş yapar. Bunun sonucu olarak, nokta 2'deki kinetik enerji $K_2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ 'dir. Hedef değişkenlerimizden birisi ω ve diğeri kablunun nokta 2'deki süratidir (silindirin bu noktadaki teğet sürati v 'ye eşittir.) Denklem (9.13)'ü kullanarak, v ve ω bulunabilir.

İŞLEM: Silindir üzerinde yapılan iş $W_{\text{diğer}} = F_s = (9.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 18 \text{ J}$. Tablo 2'den eylemsizlik momenti;

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} (50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})^2 = 0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Burada R yarıçapı silindirin çapının yarısıdır. $K_1 + U_1 + W_{\text{diğer}} = K_2 + U_2$ eşitliğinden;

$$0 + 0 + W_{\text{diğer}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{\text{diğer}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18 \text{ J})}{0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} = 20 \text{ rad/s}$$

Silindirin son teğet hızı ve dolayısıyla kablunun son sürati

$$v = R\omega = (0.060 \text{ m})(20 \text{ rad/s}) = 1.2 \text{ m/s}$$

Örnek 9.9 Sarımlı çözümlen Kablo II

Hafif ve esnek bir kabloyu M kütleli ve R yarıçaplı bir silindir üzerine saralım. Silindir ihmal edilebilir bir sürtünme ile kararlı yatay eksen etrafında dönmektedir. Kablo serbest ucunu m kütleli bir bloğa bağlayıp yerden h yüksekliğinden sıfır başlangıç hızıyla serbest bırakıyoruz. Blok düşerken, kablo gerilmeden veya kaymadan açılarak silindiri döndürüyor. Aşağı doğru düşen kütlenin süratini ve blok yere değdiği anda silindirin açısal süratini bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Örnek 9.8’de olduğu gibi, kablo sıyrılmıyor, dolayısıyla sürtünme iş yapmaz. Kablo net bir iş yapmıyor; kuvvet ve yerdeğiştirme kablunun yukarı ucunda aynı yönde, aşağı ucunda ise farklı yöndedir. O halde, kablunun her iki ucunun yaptığı toplam iş sıfırdır. Sadece yerçekimi iş yaptığından mekanik enerji korunur.

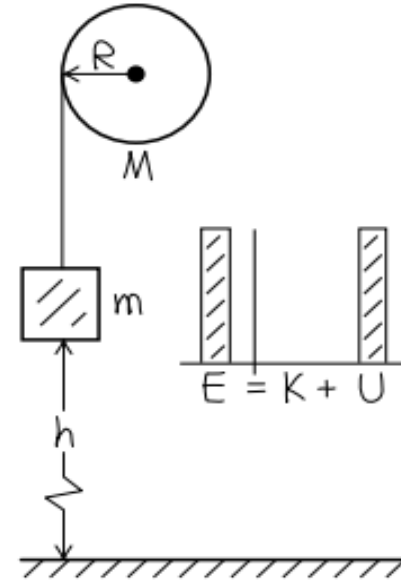
TASARLAMA: Şekil 9.18a bloğun aşağı düşmeden önceki durumu gösteriyor. Bu noktada sistemin kinetik enerjisi yoktur, yani $K_1 = 0$. Blok yer seviyesine indiğinde, potansiyel enerjiyi sıfır alıyoruz; buradan $U_1 = mgh$ ve $U_2 = 0$. Dönen silindirin için yerçekimi potansiyel enerjisini ihmal edebiliriz, çünkü yüksekliği değişmiyor.

Blok yere değmeden hemen önce (Şekil 9.18b), blok ve silindirin kinetik enerjileri vardır. Bu andaki toplam kinetik enerji K_2 ;

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

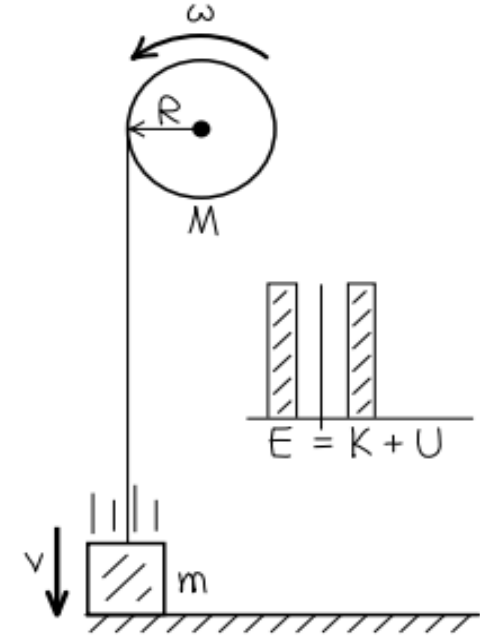
9.18 Bu problem için çizimimiz.

(a)



Silindir ve blok hareketsiz

(b)



Blok yere çarpmak üzere

Tablo 9.2’den silindirin eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ ’dir. Ayrıca, düşen bloğun sürati silindirin dış yüzeyindeki teğet sürate eşit olduğundan, v ve ω arasında $v = R\omega$ bağıntısı vardır. Bu bağıntılar v ve ω hedef değişkenlerini bulmak için kullanacağız (Şekil 9.18b).

İŞLEM: K_1 , U_1 , K_2 , U_2 ifadelerini ve $\omega = v/R$ bağıntısını enerji korunum denkleminde $(K_1 + U_1 = K_2 + U_2)$ kullanırız. Daha sonra v için çözeriz;

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Silindirin son açısal sürati $\omega = v/R$ 'dir.

DEĞERLENDİRME: Bazı özel durumları inceleyelim. Silindirin M kütlesi bloğun m kütlesinden çok büyük olduğu durumda tahmin ettiğimiz gibi kablonun son hızı v küçüktür. M kütlesi m 'den çok küçük olduğu durumda ise, kablonun son hızı v yaklaşık olarak $\sqrt{2gh}$ 'a eşittir, bu başlangıç h yüksekliğinden aşağı doğru serbest olarak düşen bir cismin süratidir. Kablonun v hızı silindirin yarıçapından bağımsızdır.

Paralel Eksen Teoremi

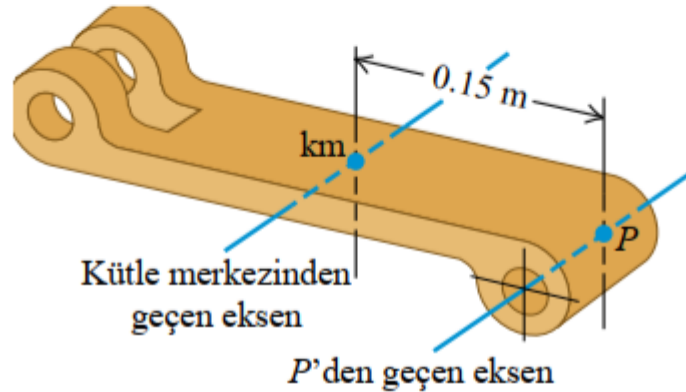
Kütlesi M olan ve dönme eksenini kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti I_{km} ile, bu ekseninden d kadar uzakta ve ona paralel herhangi bir dönme eksenine göre eylemsizlik momenti I_p arasında basit bir bağıntı vardır. Bu bağıntıya **paralel-eksen teoremi** denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$I_p = I_{km} + Md^2 \quad (\text{paralel-eksen teoremi}) \quad (9.19)$$

Örnek 9.10 Paralel eksen teoreminin kullanılışı

Bir mekanik bağlantı parçasının (Şekil 9.21) kütlesi 3.60 kg'dır. Kütle merkezinden 0.15 m uzakta olan bir P noktasından geçen eksene göre eylemsizlik momenti $I_p = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ olarak hesaplanmıştır. Bu cismin kütle merkezinden geçen paralel eksene göre olan eylemsizlik momenti nedir?

9.21 I_{km} 'nin ölçülmesinden hesaplanan I_p .



ÇÖZÜM

BELİRLEME: Paralel eksen teoremi paralel iki eksene göre eylemsizlik momentleri I_{km} ve I_p arasında bir bağıntıyı kurmayı sağlar.

TASARLAMA: Denklem (9.19)'u kullanarak hedef değişken I_{km} bulunabilir.

İŞLEM: Denklem (9.19) I_{km} için yeniden düzenlenir ve verilen değerler yerine konursa,

$$I_{km} = I_p - Md^2 = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - (3.6 \text{ kg})(0.15 \text{ m})^2 = 0.051 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

DEĞERLENDİRME: Bulduğumuz sonuç I_{km} 'nin değerinin I_p 'den küçük olduğunu gösteriyor. Bu beklediğimiz bir durumdur; bir katı cismin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti herhangi bir paralel eksene göre olandan daha küçüktür.

Eylemsizlik Momentinin Hesaplanması

Bir kütleyi çok küçük dm dilimlerine böldüğümüzü düşünelim ve herhangi bir dilim içindeki bütün noktalar dönme ekseninden aynı dik mesafede olsun. Bu mesafeye gene r diyelim. Böylece, bir katı cismin herhangi bir dönme eksenine göre eylemsizlik momenti:

$$I = \int r^2 dm \quad (9.20)$$

İntegrali hesaplamak için, r ve dm aynı integral değişkeni cinsinden tanımlanmalıdır. Katı cisim, Tablo 9.2 (a) ve (b)'de verilen düzgün bir çubuk gibi, etkin olarak bir boyutlu ise çubuk boyunca x -koordinatını kullanarak dm kütle elemanını dx uzunluğu cinsinden ifade edebiliriz. Üç boyutlu katı cisimlerde genelde dm kütlesini, söz konusu kütle diliminin dV hacmi ve katı cismin ρ kütle yoğunluğu cinsinden ifade etmek daha kolaydır. Katı cismin birim hacimdeki yoğunluğu, $\rho = dm/dV$ olduğundan Denklem (9.20) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$I = \int r^2 \rho dV \quad dV = dx dy dz \quad (\text{Hacim elemanı})$$

dV 'yi seçerken, içindeki bütün noktaların dönme ekseninden yaklaşık olarak aynı mesafede olmasına dikkat edilmelidir. İntegral sınırları katı cismin geometrik şekline ve boyutlarına bağlıdır.

Örnek 9.11

Düzgün ve ince çubuk ve uzunluğuna dik dönme eksen

Şekil 9.23 kütlesi M ve uzunluğu L olan düzgün bir çubuğu gösteriyor. Bu çubuk bir bando şefinin havada çevirdiği asa olabilir. Bu çubuğun eylemsizlik momentini bir ucundan h kadar mesafede olan O noktasından geçen dönme eksenine göre hesaplayınız.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Çubuk sürekli bir kütle dağılımına sahiptir; bu nedenle, eylemsizlik momentini bulmak için integral hesabı yapmamız gereklidir. Çubuk üzerinde kütlesi dm , uzunluğu dx ve O noktasından x uzaklığında bir kütle dilimi tanımlayalım..

TASARLAMA: Bir kütle diliminin dm kütlesinin çubuğun toplam M kütlesine oranı, dx uzunluğunun toplam L uzunluğunun oranına eşittir:

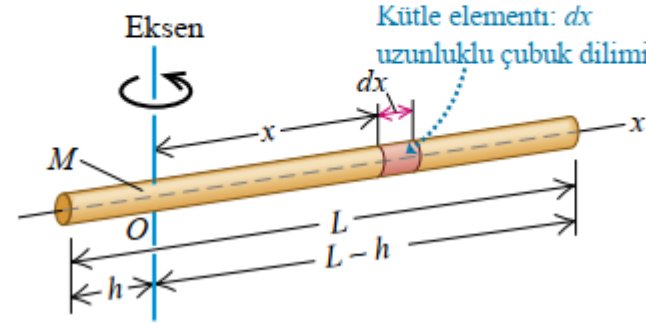
$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \quad \text{o halde} \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

Denklem (9.20)'de r yerine x koyarak (Bkz. Şekil 9.23) eylemsizlik momentini hesaplayabiliriz.

İŞLEM: Şekil 9.23 integral sınırlarının x üzerinden $-h$ ve $(L - h)$ olduğunu göstermektedir. O halde,

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-h}^{L-h} x^2 dx \\ &= \left[\frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3} M (L^2 - 3Lh + 3h^2) \end{aligned}$$

9.23 İnce çubuğun O 'dan geçen eksene göre eylemsizlik momentinin bulunması.



DEĞERLENDİRME: Bu genel ifadeden, çubuğun üzerindeki herhangi bir noktadan geçen bir eksenine göre eylemsizlik momentini bulabiliriz. Örneğin, dönme eksenini sol uçta ise, $h = 0$ ve

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Dönme eksenini sağ uçta ise, $h = L$ ve gene aynı sonucu buluruz;

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Dönme eksenini merkezden geçiyorsa, bando asası için en uygun yer, $h = L/2$, ve

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Bu sonuçlar Tablo 2'de verilen ifadelerle tutarlıdır.

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN
TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ