Belirsiz İntegral (İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali)

26 Aralık 2021 Pazar 10:13

İrrasyonel Fonksiyonl...

İRRASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Bu integralin hesabı a,b,c sayılarına göre değişir. Eğer $b^2-4a.c>0, a<0$ ise karekökün içi k bir sabit u bir fonksiyon olmak üzere k^2-u^2 haline dönüştürülür.

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{k}+c \text{ eşitliğinden faydalanılır.}}$$

Eğer $a>0$ ise karekökün içi u^2+p veya u^2-p (p sabit) şeklinde yazılarak

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm p}} = \ln(u+\sqrt{u^2 \pm p})+c}$$

** Çözüldü ✓

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = ?$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = ?$

$\Downarrow$ $4 > 0$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \mp p}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \mp p}\right) + c$$

$$4x^2+4x+3 = (2x+1)^2 + 2$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2+2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((2x+1) + \sqrt{(2x+1)^2+2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((2x+1) + \sqrt{4x^2+4x+3}\right) + c$$

$2x+1 = u$

$2\,dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$

2) $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integralinin çözümü için paydanın türevi paya benzetilir.

3) $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Bu tip integrallerde $\frac{1}{px+q}=t$ dönüşümü yapılarak ilk verilen integral tipindeki integraller elde edilir.

ÖRNEK: $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3}} = ?$

$\frac{1}{x-1} = t$, $x-1 = \frac{1}{t}$, $x = \frac{1}{t}+1 = \frac{t+1}{t}$

$dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+3}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{4t^2+2t+1}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{dt}{\cancel{t^2}}}{\frac{1}{\cancel{t}}\cdot\frac{\sqrt{4t^2+2t+1}}{\cancel{t}}}$$

$\frac{t^2+2t+1}{t^2}+3$

$\frac{4t^2+2t+1}{t^2}$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2+2t+1}}$$

$\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$2t+\frac{1}{2} = u$

$2dt = du$

$dt = \frac{du}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\left(2t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4t^2+2t+1}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+1}\right)+C$$

4) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Bu integralde $P_n(x)$ n. dereceden bir polinomdur. $Q_{n-1}(x)$, (n-1). dereceden bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bir reel sayı olmak üzere

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$$ **

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$$ **

yazılır. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınır ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse $Q_{n-1}(x)$ in katsayıları ve λ bulunur. Geriye eşitliğin sağ tarafındaki **1)** tipindeki integralin hesaplanması kalır.

ÖRNEK $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = (ax+b)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$ (Türev alınırsa)

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = a.\sqrt{1-x^2} + (ax+b).\frac{1}{2}.(1-x^2)^{-1/2}.(-2x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{a.\sqrt{1-x^2}}{1} + (ax+b).\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(\sqrt{1-x^2})$

$$x^2 = a(1-x^2) + (ax+b)(-x) + \lambda$$

$$x^2 = a - ax^2 - ax^2 - bx + \lambda$$

$-2a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$

$b = 0$

$\lambda + a = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C \quad //$$

5) $\int \frac{dx}{(x-p)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ Bu tip integrallerde $\frac{1}{x-p}=t$ dönüşümü yapılarak **(4)** tipindeki integrallere ulaşılır.

ÖRNEK: $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-2}}=?$

$\frac{1}{x-1}=t \quad , \quad x-1=\frac{1}{t} \quad , \quad dx=-\frac{dt}{t^2} \quad , \quad x=\frac{t+1}{t}$

$$=\int \frac{-\frac{dt}{\cancel{t^2}}}{\frac{1}{\cancel{t^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+2\left(\frac{t+1}{t}\right)-2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{t^2+4t+1}{t^2}}} = -\int \frac{t+2-2}{\sqrt{t^2+4t+1}}\,dt$$

$$=\frac{t^2+2t+1}{t^2}+\frac{2t+2}{t}-2$$

$(1) \quad (t) \quad (t^2)$

$$=\frac{t^2+2t+1+\cancel{2t^2}+2t-\cancel{2t^2}}{t^2}$$

$$=\frac{t^2+4t+1}{t^2}$$

$t^2+4t+1=u^2$

$(2t+4)dt=2u\,du$

$(t+2)dt=u\,du$

$$=-\int \frac{(t+2)}{\sqrt{t^2+4t+1}}\,dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$(t+2)^2-3$

$$-\int \frac{u\,du}{u}=-u$$

$$=-\sqrt{t^2+4t+1}+2\ln\left(t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right)+c$$

$$=-\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+\frac{4}{x-1}+1}+2\ln\left(\frac{1}{x-1}+2+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}+1}\right)+c$$

6) $\int x^r (a+bx^p)^q\, dx \qquad a,b\in\mathbb{R}$

$a,b\in\mathbb{R};\ p,q,r\in\mathbb{Q}$ olmak üzere bu tipteki integrallere Binom integralleri adı verilir. Bu integraller p,q,r rasyonel sayılarının durumlarına göre farklı değişken dönüştürmeleri ile hesaplanabilir.

* * **a)** q tamsayı ise r ile p'nin paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere $\boxed{x=t^k}$ değişken dönüşümü yapılarak sonuca ulaşılır.

* * **b)** q tam sayı değil fakat $\frac{r+1}{p}$ tam sayı ise q'nun paydası n olmak üzere $\boxed{a+b.x^p=t^n}$ dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

c)q ve $\frac{r+1}{p}$ tamsayı değil fakat $\frac{r+1}{p}=q$ tamsayı ise q'nun paydası n olmak üzere

$a.x^{-p}+b=t^{n}$ dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

ÖRNEK $\int \sqrt[3]{x}(1+2\sqrt{x})^{2}\,dx=?$

$$=\int x^{\frac{1}{3}}\left(1+2x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}dx$$

$(2,3)$ okek $=6,$

$x=t^{6} \Rightarrow x^{\frac{1}{6}}=t$

$dx=6t^{5}dt$

$$=\int (t^{6})^{\frac{1}{3}}\left(1+2\,(t^{6})^{\frac{1}{2}}\right)^{2}.6t^{5}dt$$

$$=\int t^{2}.(1+2t^{3})^{2}.6.t^{5}dt$$

$$=6\int t^{7}\left(1+4t^{3}+4t^{6}\right)dt$$

$$=6\int (t^{7}+4t^{10}+4t^{13})dt$$

$$=6\left(\frac{t^{8}}{8}+\frac{4t^{11}}{11}+\frac{4t^{14}}{14}\right)+C=\frac{3}{4}.x^{\frac{4}{3}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$ //

ÖRNEK $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = ?$

$$= \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$, \; r=-\frac{2}{3}, \quad p=\frac{1}{3}, \quad q=\frac{1}{2}$

$$\frac{r+1}{p} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \in \mathbb{Z}$$

$1+x^{\frac{1}{3}} = t^2$

$\frac{1}{3}x^{-2/3}dx = 2t\,dt$

$x^{-2/3}dx = 6t\,dt$

$$= \int \left(t^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 6t\,dt = 6\int t^2\,dt = 6\left(\frac{t^3}{3}\right)+c = 2t^3+c$$

$$= 2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+c$$