Belirsiz İntegral (Trigonometrik İntegraller)

12 Aralık 2021 Pazar 20:21

Belirsiz İnegral...

Trigonometrik İntegraller

1. $\int \sin ax.\sin bx.dx$, $\int \sin ax.\cos bx.dx$, $\int \cos ax.\cos bx.dx$

Bu tip integralleri çözmek için,

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$\sin ax.\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$

$\sin ax.\cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b$

$\cos ax.\cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$

$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

bağıntılarından yararlanılarak sonuca gidilir.

ÖRNEK $\int \sin 3x \cos 4x dx = ?$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin(-x)]dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx = ?$ Bu tip integraller m ve n sayılarının durumuna göre farklı yollarla hesaplanır.

a. m tek ise $\cos x = t$

n tek ise $\sin x = t$ dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

ÖRNEK $\int \cos^4 x \sin^3 x dx = ?$

$$= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x dx$$

$$= \int \cos^4 x (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$

$\cos x = u$, $-\sin x dx = du$

$\cos x = u \,,\quad -\sin x\,dx = du$

$$= -\int u^4(1-u^2)\,du = -\int (u^4 - u^6)\,du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

ÖRNEK $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = ?$

$$= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x\, dx$$

$$= \int \sin^4 x \,(\cos^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int \sin^4 x \,(1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$\sin x = u \,,\quad \cos x\,dx = du$

$$= \int u^4 (1-u^2)^2\, du$$

$$= \int u^4 (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= \int (u^8 - 2u^6 + u^4)\, du$$

$$= \frac{u^9}{9} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

b) m ve n sayılarının her ikisi de çift ise;

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

ÖRNEK $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = ?$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - 2\cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx$$

$$\int (1-\cos 2x)\, dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right] + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\, dx$$

$$= \int \cos 2x\, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$$

$\sin 2x = t$

$2\cos 2x dx = dt$

$\cos 2x dx = \frac{dt}{2}$

$\frac{1}{2}\int t^2 dt$

$= \frac{1}{6}t^3$

$= \frac{1}{6}\sin^3 2x$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C$$

3. $\int \tan^m x \sec^n x dx = ?$

Bu integralde m ve n sayılarının tek veya çift oluşuna göre farklı yollardan hesaplanır.

a. n çift ise $\tan x = t$ ve;

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$
$(\tan x)' = \sec^2 x$ bağıntılarından faydalanılır.

ÖRNEK $\int \tan^6 x \sec^4 x dx = ?$

$$= \int \tan^6 x . \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^6 x \, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$\tan x = u$, $\sec^2 x dx = du$

$$= \int u^6 (1 + u^2) du = \int (u^6 + u^8) du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

b. m tek ise $\sec x = t$ dönüşümü yapılır.

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
$(\sec x)' = \sec x . \tan x$

ÖRNEK $\int \tan^5 x \sec^3 x dx = ?$

$(\tan^2 x)^2$

$$= \int \tan^4 x . \sec^2 x . \sec x . \tan x dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x . \tan x dx$$

$\sec x = u$, $\sec x \tan x dx = du$

$$= \int (u^2 - 1)^2 . u^2 du$$

$$= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^2 du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du = \frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

c. m çift n tek ise $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ bağıntısı yardımıyla integral sadece $\sec x$ in kuvvetlerinin toplamı şekline getirilebilir. Bu nedenle $\sec x$ in tek kuvvetlerinin hesaplanışı aşağıdaki gibidir.

ÖRNEK $\int \sec x dx = ?$

$$= \int \frac{\sec x\,(\sec x + tg x)}{\sec x + tg x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\, tg x}{\sec x + tg x}\,dx$$

$\sec x + tg x = u$

$(\sec x\, tg x + \sec^2 x)\,dx = du$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$= \ln(\sec x + tg x) + c$$

$\int \tan x\, dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t}$$

$\cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$= -\ln t$

$= -\ln(\cos x) + c$

4. $\int \cot^m x \csc^n x dx$ Bu tip integraller daha önce ele aldığımız $\int \tan^m x \sec^n x dx$ integrallerinde izlenen yolla hesaplanır.

ÖRNEK $\int \cot^3 x \csc^4 x dx = ?$

5. $R(\sin x, \cos x)$ tipindeki integraller bir fonksiyonun pay ve paydasındaki değişkenleri $\sin x$ ve $\cos x$ olan rasyonel fonksiyonu temsil eder. Bu fonksiyonların integrallerinin çözümünde;

a. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ oluyorsa $\cos x = t$ dönüşümü yapılır.

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ oluyorsa $\sin x = t$ dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

ÖRNEK $\int \cos^3 x \tan^5 x dx = ?$

$(\sin^2 x)^2$

$$= \int \cos^3 x \cdot \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \sin x dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x} \cdot \sin x dx$$

$\cos x = u$, $-\sin x dx = du$

$\sin x dx = -du$

$$= -\int \frac{(1-u^2)^2}{u^2} du$$

$$u^2$$

$$= -\int \frac{1-2u^2+u^4}{u^2}\,du$$

$$= -\int\left(\frac{1}{u^2}-2+u^2\right)du$$

$$= -\left(-\frac{1}{u}-2u+\frac{u^3}{3}\right)+c$$

$$= \sec x + 2\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C \;//$$

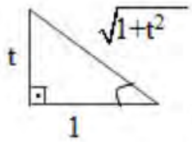
b. $\sin x$ ve $\cos x$ işaret değiştirdiğinde integrant işaret değiştirmiyorsa, yani

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

oluyorsa $\boxed{\tan x = t}$ dönüşümü yapılarak sonuca gidilir.

$$\boxed{\sin x,\ \cos x,\quad \tan\frac{x}{2}=t}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$\tan x = t \Rightarrow \arctan t = x$$

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t$$

$$x = 2\arctan t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^4 x} = ?$

$\tan x = t$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} = \int \frac{\frac{dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{t^2}{\cancel{1+t^2}}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2}}$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2}\,dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^2}+2+t^2\right)dt$$

$$= -\frac{1}{t}+2t+\frac{t^3}{3}+C$$

$$= -\frac{1}{\tan x}+2\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C$$

$$= -\frac{}{t} \quad ' \quad 3$$

$$= -\cot x + 2\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C \quad //$$