

## Fonksiyonlar (Tekrar ve Sorular)

21 Ekim 2021 Perşembe 17:10



Fonksiyonlar

# Fonksiyonlar

## Fonksiyonlar

Bir  $D$  kümesinden bir  $Y$  kümesine bir fonksiyon  $D$  deki her  $x$  elemanını  $Y$  den tek bir  $f(x)$  elemanına karşılık getiren kuraldır.

$$\xrightarrow[\text{(tanım)}]{\text{girdi}} f \xrightarrow[\text{(değer)}]{\text{çıktı}} f(x)$$

| <u>fonksiyon</u>   | <u>tanım aralığı</u>        | <u>değer kümesi</u>         |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $y = x^2$          | $(-\infty, \infty)$         | $[0, \infty)$               |
| $y = \frac{4}{x}$  | $(-\infty, \infty) - \{0\}$ | $(-\infty, \infty) - \{0\}$ |
| $y = \sqrt{3x}$    | $[0, \infty)$               | $[0, \infty)$               |
| $y = \sqrt{4-x}$   | $(-\infty, 4)$              | $[0, \infty)$               |
| $y = \sqrt{4-x^2}$ | $[-2, 2]$                   | $[0, 2]$                    |

### Fonksiyonların Grafikleri

Tanım kümesi  $D$  olan bir fonksiyon  $f$  ise grafiği kartezyen düzlemde koordinatları  $f$  için tanım değer çiftleri olan noktalardan oluşur. Grafiğin küme notasyonu

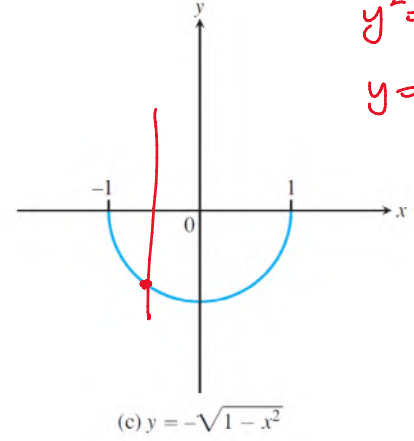
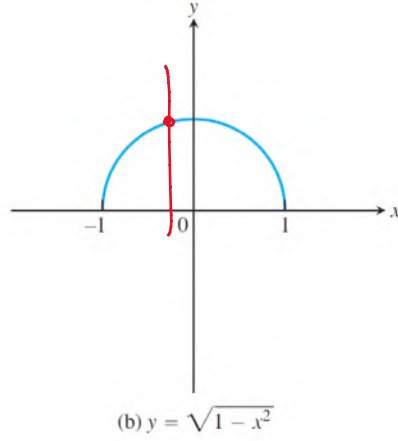
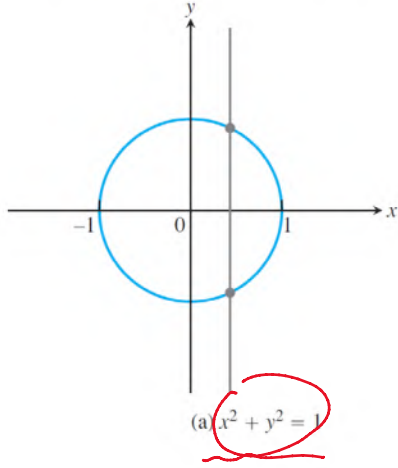
$$\{(x, f(x) \mid x \in D)\}$$

**Örnek:**  $[-2, 2]$  aralığında  $y = x^3$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| -2  | -8  |
| -1  | -1  |
| 0   | 0   |
| 1   | 1   |
| 2   | 8   |

### Dikey Doğru Testi

Çizdiğimiz her eğri ,bir fonksiyonun grafiği değildir.bir  $f$  fonksiyonu tanım aralığıdaki her  $x$  için tek bir  $f(x)$  değerinden başkasını alamaz.Dolayısıyla hiçbir dik doğru bir fonksiyonun grafiğinin bir kereden fazla kesemez.

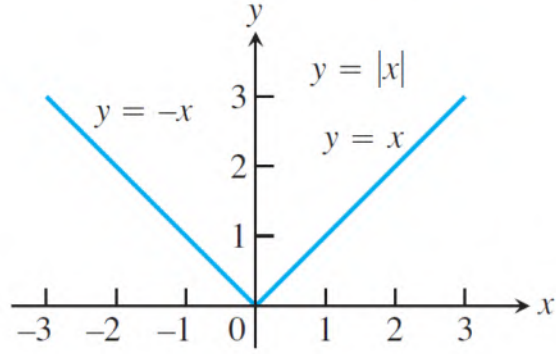


$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \\y^2 &= 1 - x^2 \\y &= \pm \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

### Parçalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tanım aralığı farklı bölgelerin değişik formüllerle tanımlanabilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



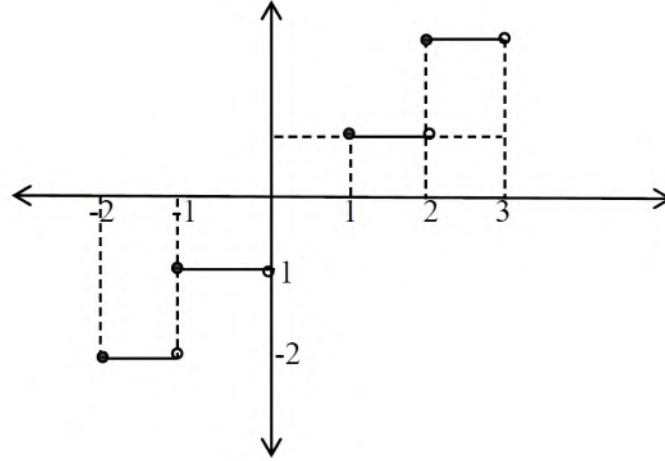
**Örnek:**

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 6, & x > 1 \end{cases}$$

### En Büyük Tamsayı (Tam değ r) fonksiyon)

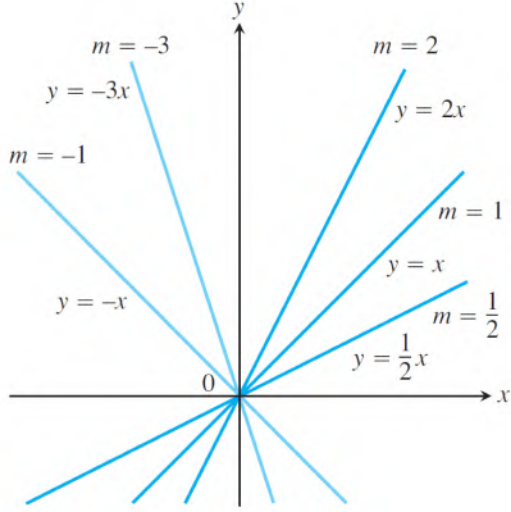
Her hangi bir  $x$  sayısındaki değeri  $x$  den küçük veya  $x$  'e eşit en b   k tamsayı olan fonksiyona en b   k tamsayı fonksiyonu veya tam değ r fonsiyon denir.  $[x]$  veya  $\llbracket x \rrbracket$

$$\begin{aligned}\llbracket 2 \rrbracket &= 2 & \llbracket 2,9 \rrbracket &= 2 \\ \llbracket 2,4 \rrbracket &= 2 & \llbracket -0,6 \rrbracket &= -1\end{aligned}$$

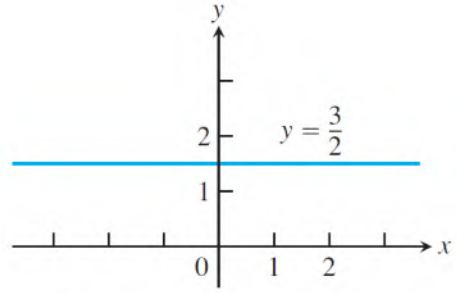


### Lineer Fonksiyonları:

$m$  ve  $b$  sabitler olmak üzere  $f(x)=mx+b$  şeklindeki fonksiyonlara lineer fonksiyonlar denir.  $b=0$  olması durumunda eğimi  $m$  olan  $y=mx$  doğru denkleminde ulaşılır.



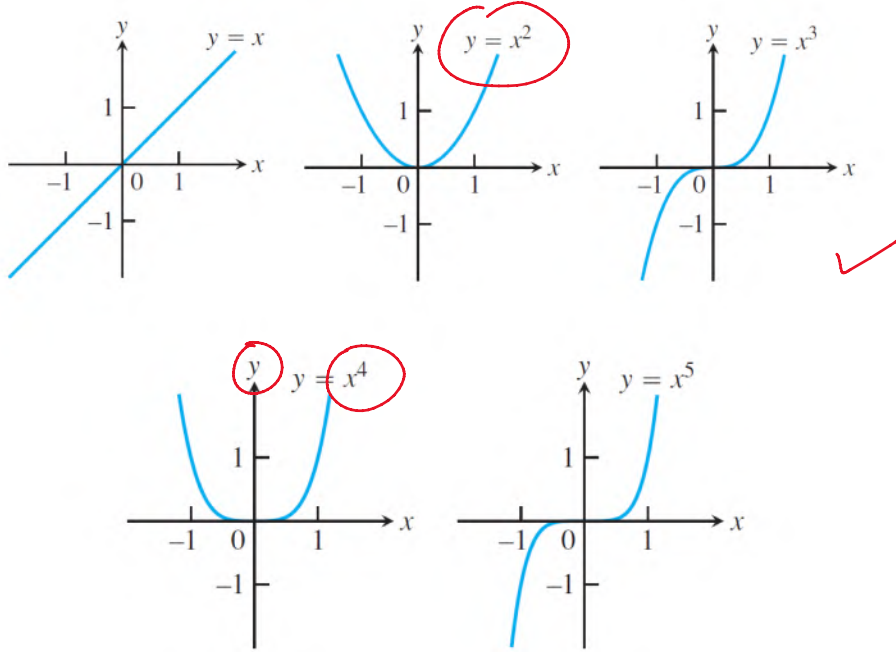
$y = mx$  doğrularının eğimleri  $m$  dir ve hepsi orijinden geçerler.



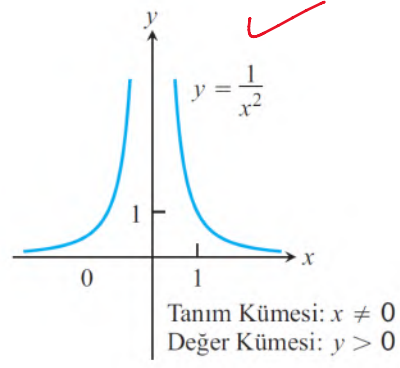
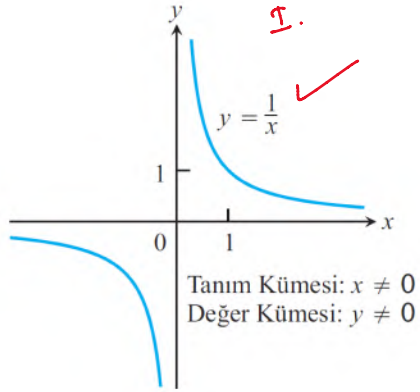
Bir sabit fonksiyonun eğimi  $m = 0$  dir.

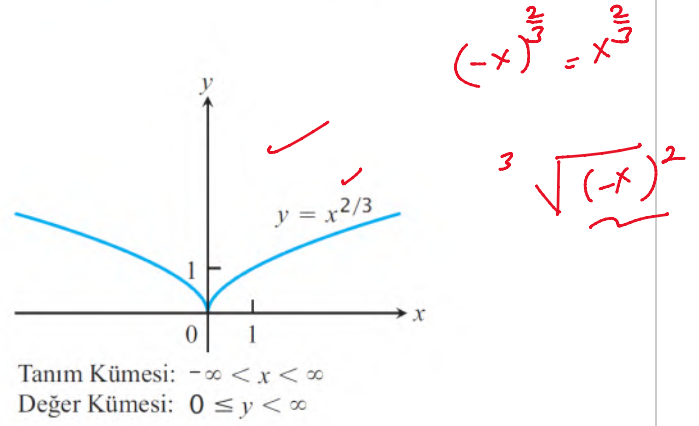
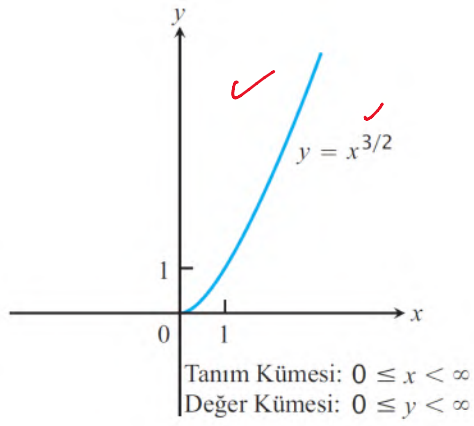
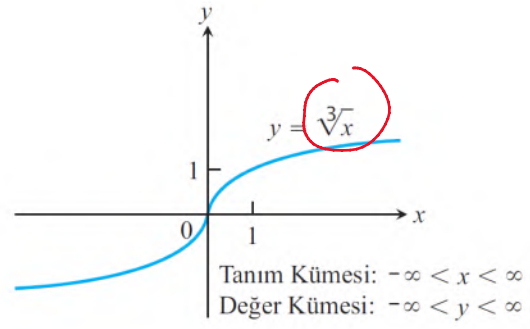
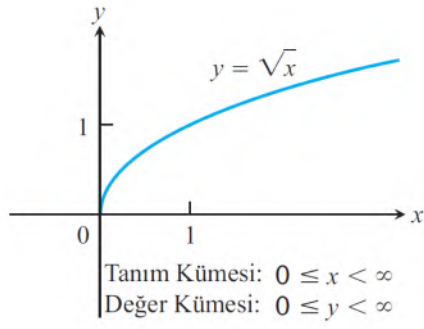
## Kuvvet Fonksiyonları

$n$  sabit bir sayı olmak üzere  $f(x) = x^n$  şeklindeki fonksiyona kuvvet fonksiyon denir.



$x=0$   
düzyer eksenit

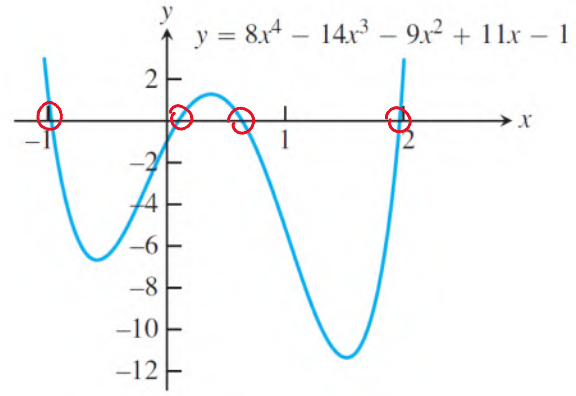
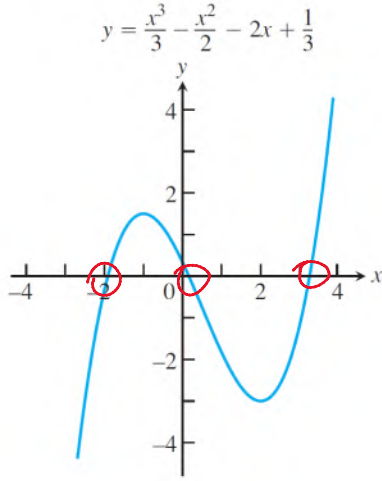




## Polinomlar

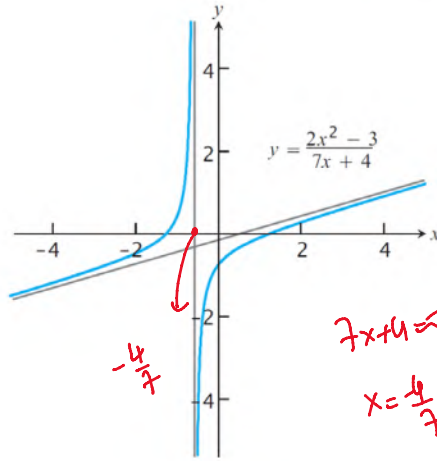
$n_1$  negatif olmayan bir tamsayı  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  realsayılar olmak üzere;

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ifadesine polinom denir. Bütün polinomların tanım kümesi  $(-\infty, \infty)$  aralığıdır.  $a_n \neq 0, n > 0$  iken  $n$ 'ye polinomun derecesi denir. 2.dereceden polinomların özellikleri olarak quadratik polinomlar, 3. dereceden polinomların özellikleri kübik polinomlar denir.



**Rasyonel Fonksiyonlar:** Bir rasyonel fonksiyon 2 polinomun bölümü veya oranıdır.  $p$  ve  $q$

polinomlar olmak üzere;  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow q(x) \neq 0$

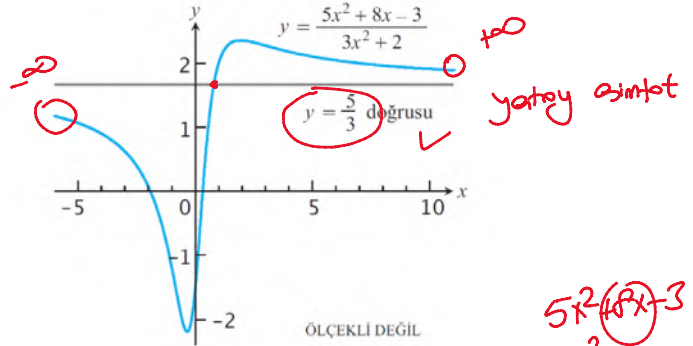


$$7x + 4 = \infty$$

$$x = -\frac{4}{7}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3 \overline{) 7x + 4} \\ \underline{2x} \phantom{+ 4} \\ \phantom{2x} + 4 \end{array}$$

egik asimtot



$$\begin{array}{r} 5x^2 + 8x - 3 \overline{) 3x^2 + 2} \\ \underline{5x^2} \phantom{+ 8x - 3} \\ \phantom{5x^2} + 8x - 3 \end{array}$$

$\frac{5}{3}$  ya

**Cebirsel fonksiyonlar:**

Bir cebirsel fonksiyon cebirsel işlemler kullanılarak polinomlardan elde edilen bir fonksiyondur. Rasyonel fonksiyonlar cebirsel fonksiyonların özel bir halidir.

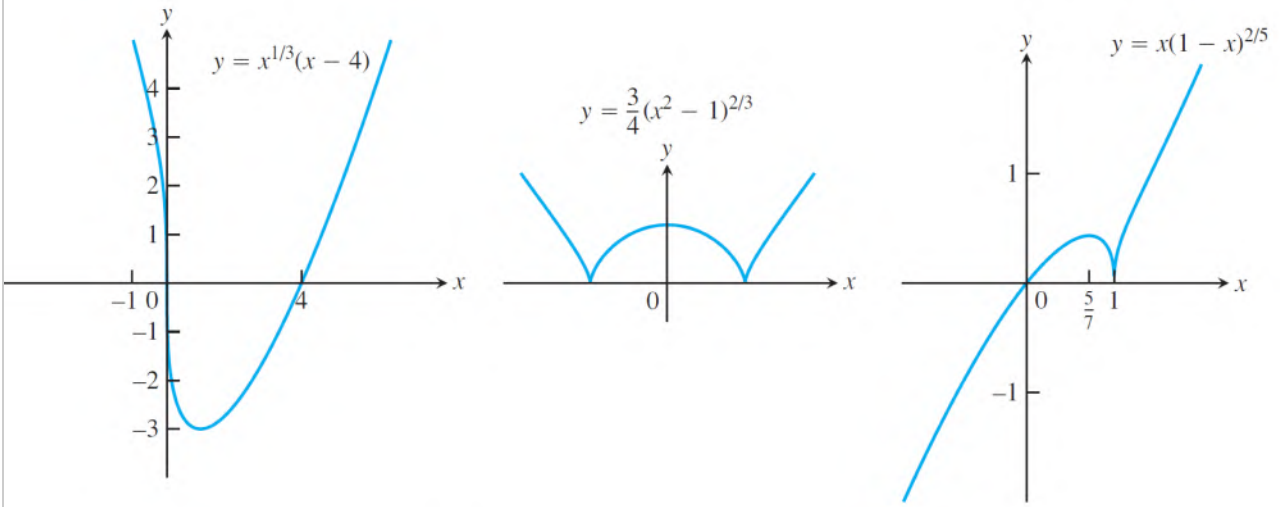
**Trigonometrik fonksiyonlar:** Periyodik olma özelliği bulunduran sin ve cos benzeri fonksiyonlardır.

**Üstel fonksiyonlar:** Taban  $a > 0$  pozitif bir sabit ve  $a \neq 1$  olmak üzere  $f(x) = a^x$  şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir. Bütün üstel fonksiyonların tanım kümeleri  $(-\infty, \infty)$  aralığı değer kümeleri ise  $(0, \infty)$  aralığıdır. Dolayısıyla bir üstel fonksiyon hiçbir zaman 0 değerini almaz.

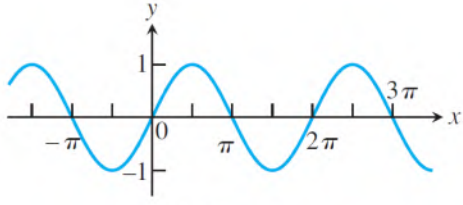
**Logaritmik fonksiyon:**

$a \neq 1$  pozitif bir sabit olmak üzere  $f(x) = \log_a x$  şeklindeki fonksiyonlardır. Üstel fonksiyonların tersi fonksiyonlardır.

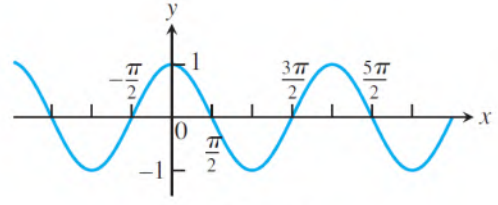
**Transandant fonksiyonlar:** Cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve hiperbolik fonksiyonlar bu şekilde fonksiyonlardır.



Üç cebirsel fonksiyon grafiği.

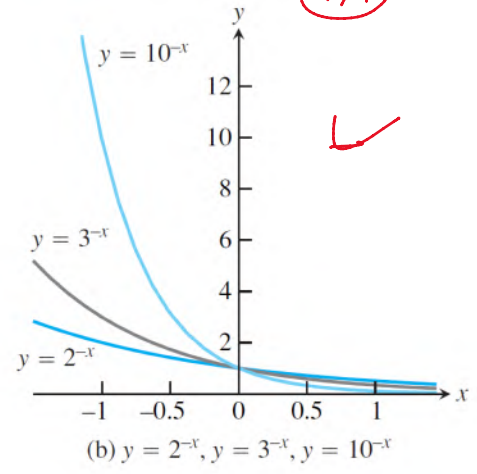
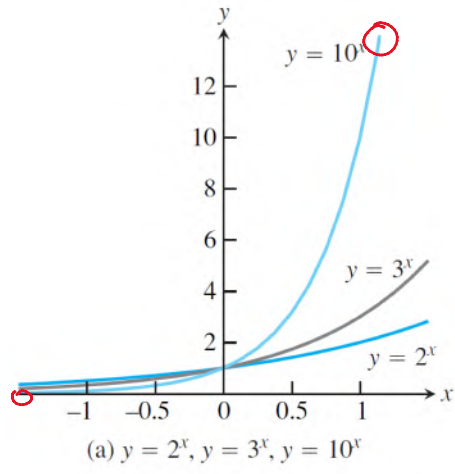


(a)  $f(x) = \sin x$

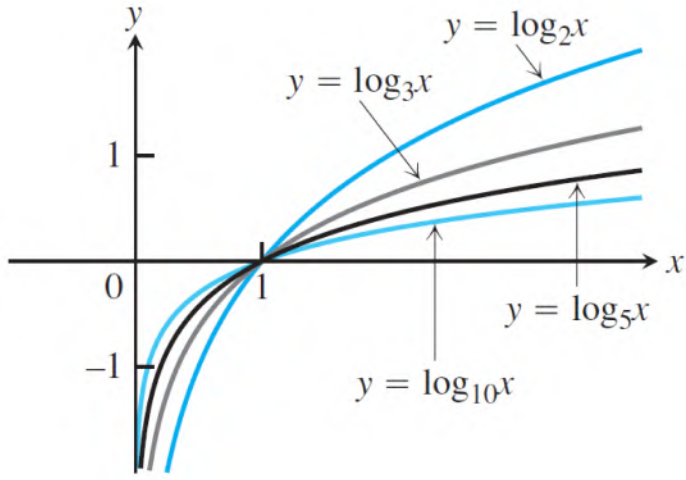


(b)  $f(x) = \cos x$

Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının grafikleri.



Üstel fonksiyonlarının grafikleri.



Dört logaritmik fonksiyon grafiği.

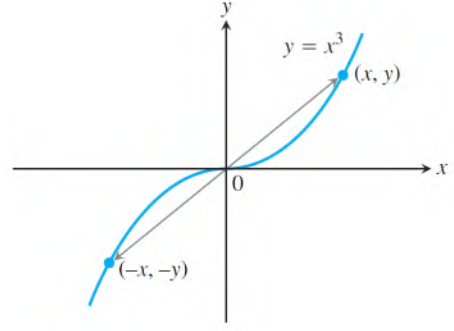
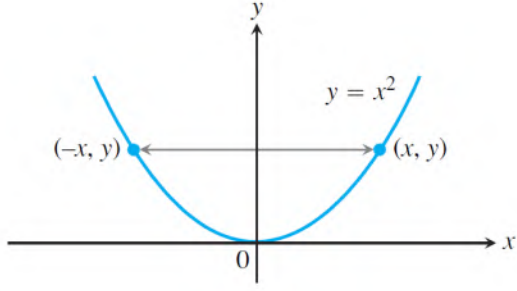
## Artan Ve Azalan Fonksiyonlar

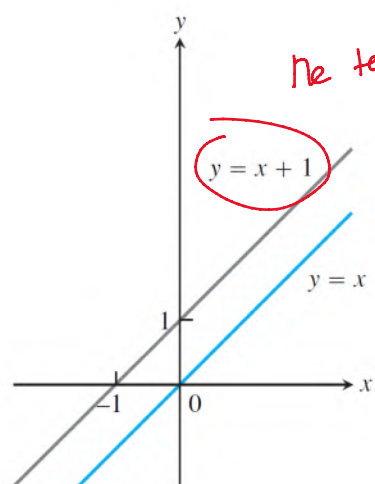
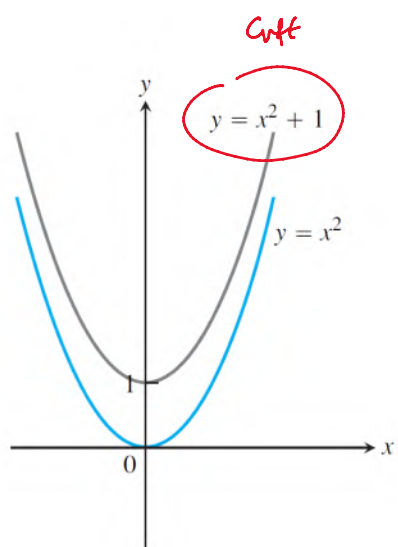
Soldan sağa doğru hareket edildiğinde bir fonksiyonun grafiği yükseliyorsa fonksiyon artan , açılıyorsa fonksiyon azalan fonksiyon diyoruz.

| <i>fonskiyon</i>      | <i>arttığı yer</i>     | <i>azaldığı yer</i>        |
|-----------------------|------------------------|----------------------------|
| $y = x^2$             | $0 \leq x < \infty$    | $-\infty < x \leq 0$       |
| $y = x^3$             | $-\infty < x < \infty$ | <i>hiçbir yer</i>          |
| ✓ $y = \frac{1}{x}$   | <i>hiçbir yer</i>      | $(\infty, \infty) - \{0\}$ |
| $y = \frac{1}{x^2}$   | $-\infty < x < 0$      | $0 < x < \infty$           |
| $y = \sqrt{x}$        | $0 \leq x < \infty$    | <i>hiçbir yer</i>          |
| $y = x^{\frac{2}{3}}$ | $0 \leq x < \infty$    | $-\infty < x \leq 0$       |

### Tek-Çift Fonksiyonlar:

$y = f(x)$  fonksiyonun tanım kümesinde her  $x$  için  $f(-x) = f(x)$  oluyorsa fonksiyona çift fonksiyon,  $f(-x) = -f(x)$  oluyorsa fonksiyona tek fonksiyondur denir. Bir çift fonksiyon grafiği  $y$  eksenine göre simetriktir. Tek fonksiyonun grafiği orjine göre simetriktir.





### Fonksiyonları Birleştirmek, Grafikleri Kaydırmak

$f$  ve  $g$  iki fonksiyon olmak üzere hem  $f$  'nin hemde  $g$  'nin tanım kümesindeki her  $x$  için  
yani  $x \in D(f) \cap D(g)$  için  $f + g, f - g, f \cdot g$  fonksiyonları

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

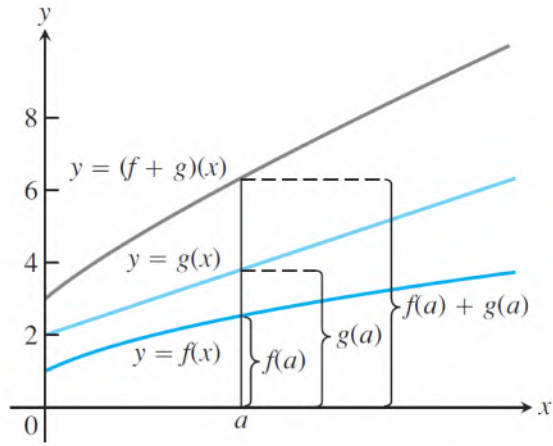
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

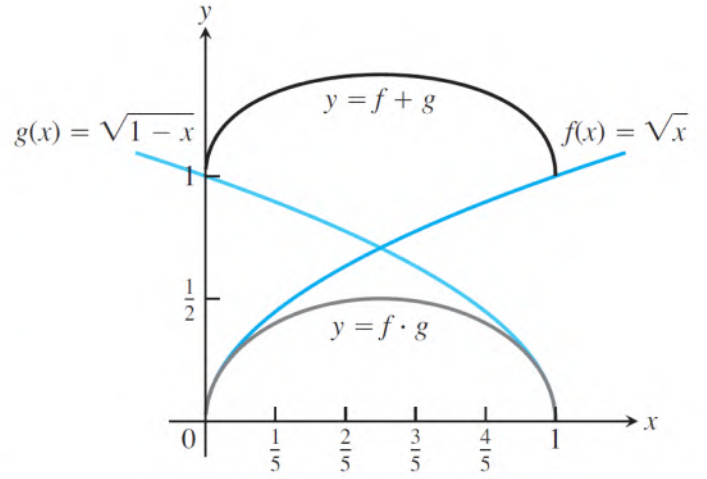
$$\text{Ayrıca } x \in D(f) \cap D(g) \quad g(x) \neq 0 \quad \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

elde edilir.

| Fonksiyon   | Formül                                                      | Tanım Kümesi                                     |
|-------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $f + g$     | $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$                        | $\checkmark [0, 1] = \underline{D(f) \cap D(g)}$ |
| $f - g$     | $(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$                        | $[0, 1]$                                         |
| $g - f$     | $(g - f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$                        | $[0, 1]$                                         |
| $f \cdot g$ | $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$                 | $[0, 1]$                                         |
| $f/g$       | $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ | $[0, 1) (x = 1 \text{ hariç})$                   |
| $g/f$       | $\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ | $(0, 1] (x = 0 \text{ hariç})$                   |



İki fonksiyonun grafik toplamı

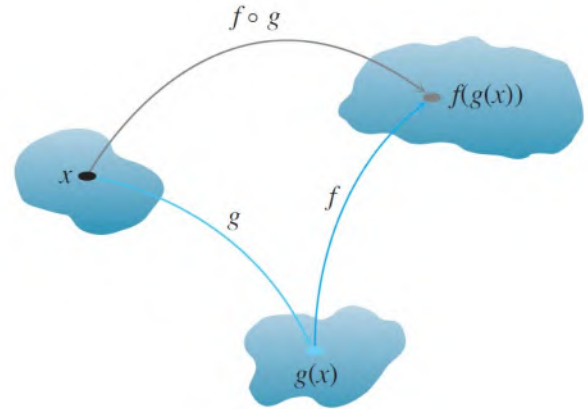
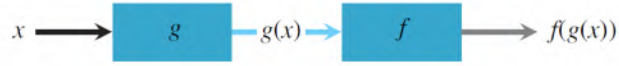


$f + g$  fonksiyonunun tanım kümesi

$f$  ve  $g$ , fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimi,  $x$ -ekseni üzerinde bu iki tanım kümesinin örtüştüğü  $[0, 1]$  aralığıdır. Bu aralık aynı zamanda  $f \cdot g$  fonksiyonunun tanım kümesidir

## Bileşke Fonksiyonlar

$f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $f \circ g$  bileşke fonksiyon  $f \circ g(x) = f(g(x))$  ile tanımlanır.  $f \circ g$  nin tanım kümesi  $g$  'nin tanım kümesindeki  $g(x)$  'in  $f$  'nin tanım kümesinde olmasını sağlayan  $x$  lerden oluşur.



**Örnek:**

$$f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+1}^3 - \sqrt{x+1}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^3 - x + 1}$$

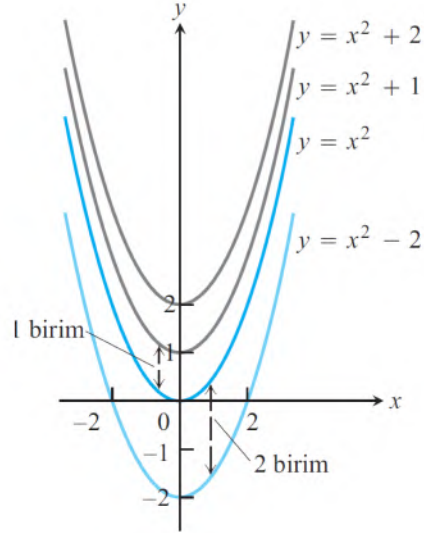
$$f \circ f(x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x)$$

$$g \circ g(x) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}$$

### Bir Fonksiyonun Grafiğini Kaydırma:

#### Dikey Kaydırma:

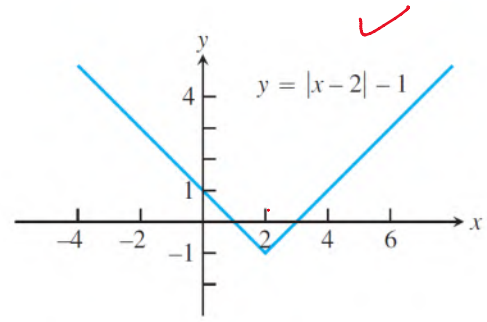
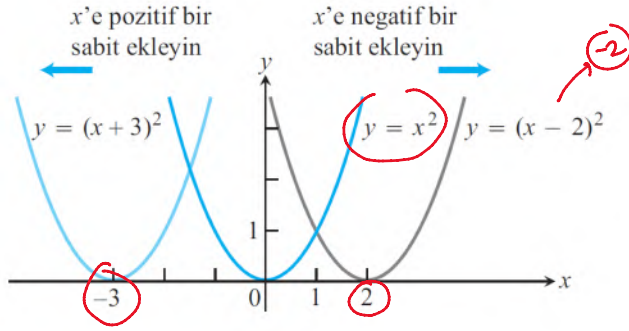
$y = f(x) + k$ ,  $k > 0$  ise fonksiyonun grafiği  $k$  birim kadar yukarı kaydırılır.  $k < 0$  ise fonksiyonun grafiği  $|k|$  birim kadar aşağı kaydırılır.



### Yatay kaydırma:

$y = f(x+h)$  fonksiyonunda  $h > 0$  ise  $f$  'nin grafiğini  $h$  birim sola kaydırılır.  $h < 0$  ise  $|h|$  birim sağa kaydırılır.

$$y = |x-2| - 1$$



### **Dikey Ve Yatay Ölçekleme , Yansıtma Formülleri**

$c > 1$  için  $y = c.f(x)$   $f$  'nin grafiği bir  $c$  çarpanı kadar dikey uzatır.

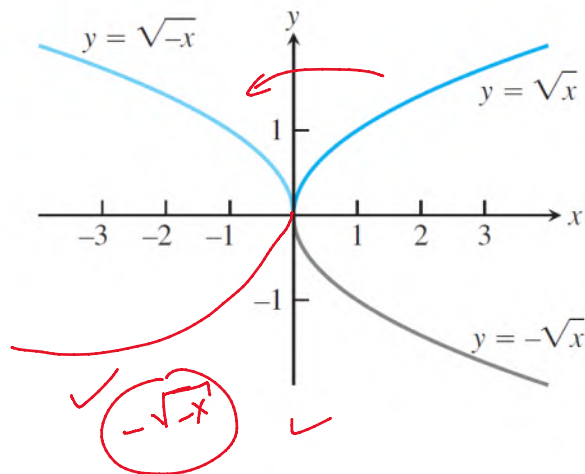
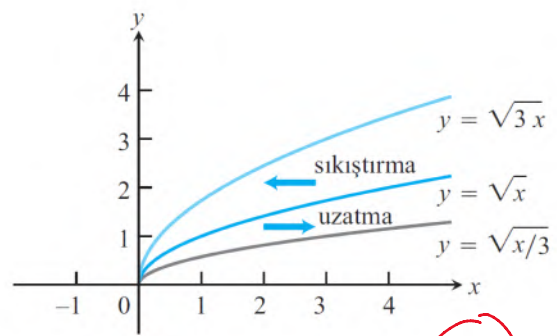
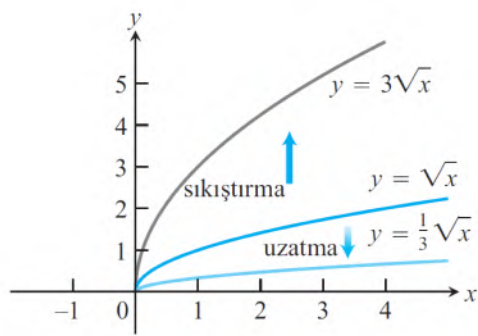
$y = \frac{1}{c}f(x)$   $f$ 'in grafiğini bir  $c$  çarpanı olarak dikey sıkıştırır.

$y = f(c.x)$   $f$ 'in grafiğini bir  $c$  çarpanı olarak yatay sıkıştırır.

$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$   $f$ 'in grafiğini bir  $c$  çarpanı olarak yatay olarak uzatır.

$c = -1$  için  $y = -f(x)$   $f$  'nin grafiğini  $x$  ekseninin diğer tarafına yansıt

$y = f(-x)$   $f$ 'in grafiğini  $y$  ekseninin diğer tarafına yansıtır.



$\sqrt{x}$

$\sqrt{-x}$

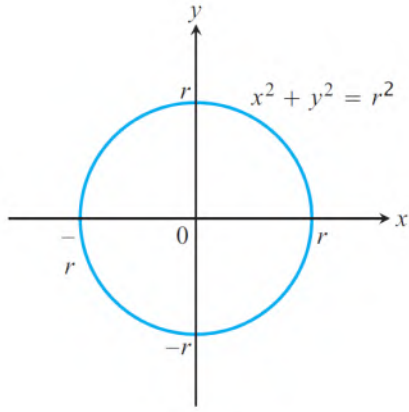
yanırtma

## Elipsler

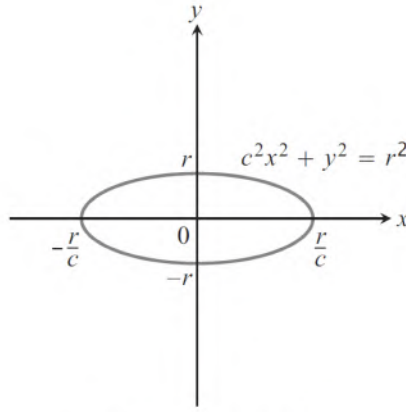
Merkezi orijinde olan  $r$  yarı çaplı bir çemberin denkleminde  $x$  yerine  $cx$  yazmakla elde edilen  $c^2x^2 + y^2 = r^2$  denkleminde elips denkleminin adı verilir

$\Rightarrow 0 < c < 1$  için çember denkleminin yatay olarak uzar.

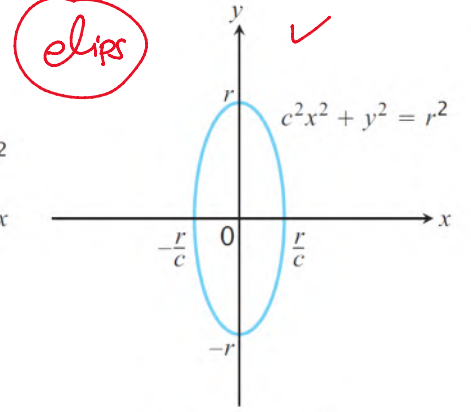
$\Rightarrow c > 1$  ise çember denkleminin yatay olarak sıkıştırılır.



(a) çember



(b) elips,  $0 < c < 1$

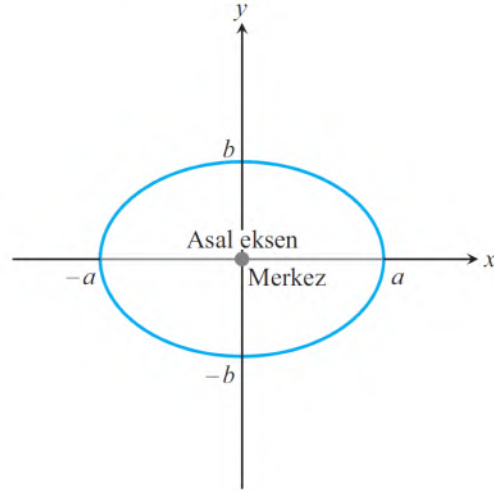


(c) elips,  $c > 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Bir elipsin uzun olan eksen daima asal eksendir.kısa olan ise daima yedek eksendir.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{merkezi orjinde olan elips denklemi.}$$

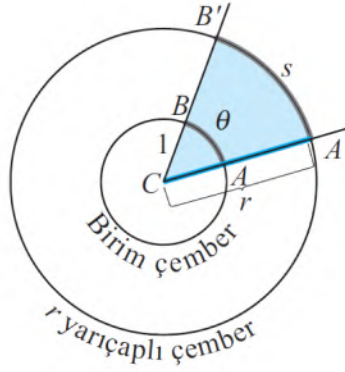


✓

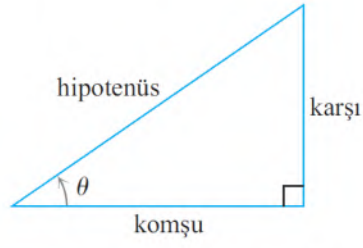
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{merkezi } (h,k) \text{ olan genel elips denklemi.}$$

### Trigonometrik Fonksiyonlar:

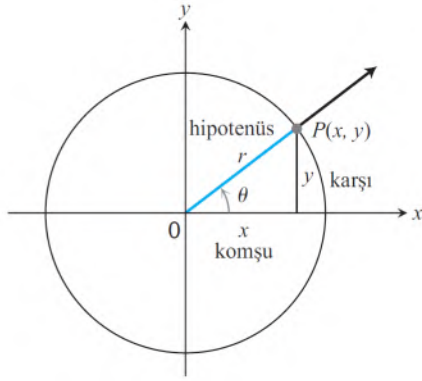
Birim çemberin merkezindeki (ACB) açısının radyan ölçüsü(ACB) açısının birim çemberden kestiği yayın uzunluğuna eşittir.Bu açıya karşılık açıyı radyan olarak ölçüldüğünde  $r$  yarı çaplı bir çemberden kesilen yay uzunluğunun  $S = r.\theta$  olduğu gösterilebilir.



$\pi.radyan = 180^\circ$   $[x, y]$  düzlemindeki bir açının köşesi orjindeyse ve başlangıç ışını pozitif  $x$  eksenini üzerindeyse açı standart konumdadır.pozitif  $x$  ekseninden saat yönünün tersine doğru ölçülen açılar pozitif, saat yönüne doğru ölçülen açılar negatiftir.



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} & \csc \theta &= \frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}} & \sec \theta &= \frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} & \cot \theta &= \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}\end{aligned}$$



**sinüs:**  $\sin \theta = \frac{y}{r}$

**kosekant:**  $\csc \theta = \frac{r}{y}$

**cosinüs:**  $\cos \theta = \frac{x}{r}$

**sekant:**  $\sec \theta = \frac{r}{x}$

**tanjant:**  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

**kotanjant:**  $\cot \theta = \frac{x}{y}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

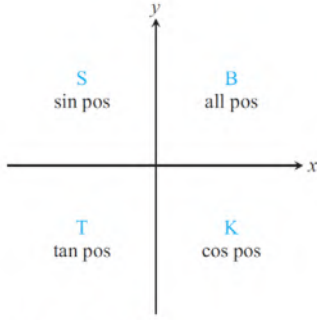
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

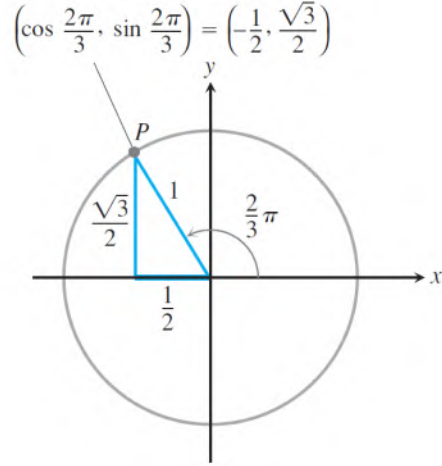
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$x = 0$  ise  $\tan \theta$  ve  $\sec \theta$  tanımlı değildir. Yani  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$  açı değerleri tanımsızlardır.

Aynı şekilde  $\cot \theta$  ve  $\cos \theta$ ,  $y = 0$  olan  $\theta$  değerleri için  $\theta = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$  tanımsızdır. Temel trigonometrik fonksiyonların ne zaman pozitif ne zaman negatif olduklarını bulmanın bir yolu BSTK kuralı.



BSTK kuralı, “**B**ütün **S**ınıf **T**ahtaya **K**alkar” cümlesinden hatırlanabilir. Herbir bölgede hangi fonksiyonların pozitif olduğunu söyler.



## Periyodik Fonksiyon

Her  $x$  değeri için  $f(x+p) = f(x)$  olacak şekilde bir  $p$  değeri bulunabiliyorsa  $f(x)$  fonksiyonu periyodiktir. Bu şekildeki en küçük  $p$  değerine  $f$  'nin esas periyodu denir .

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

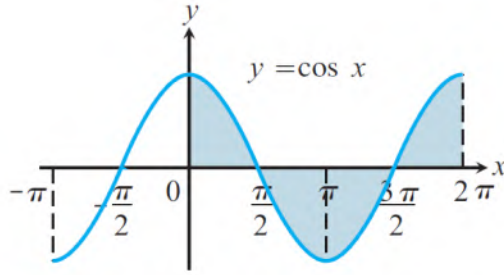
$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

$$\sec(x+2\pi) = \sec x$$

$$\csc(x+2\pi) = \csc x$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

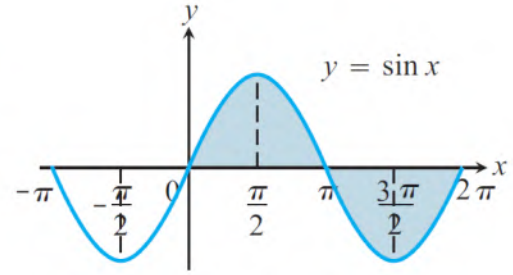
$$\cot(x+\pi) = \cot x$$



Tanım kümesi:  $-\infty < x < \infty$

Değer kümesi:  $-1 \leq y \leq 1$

Periyot:  $2\pi$

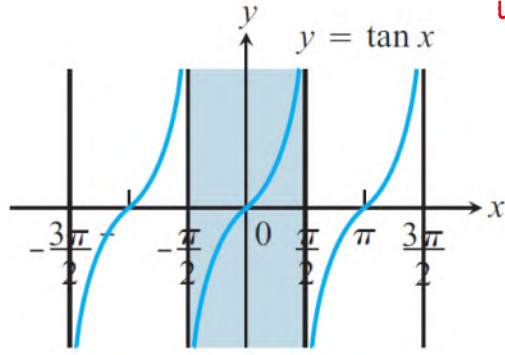


Tanım kümesi:  $-\infty < x < \infty$

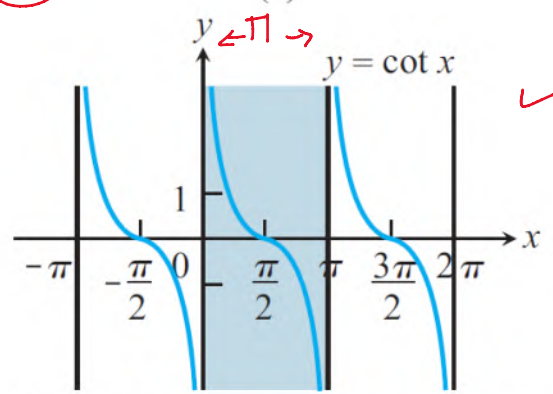
Değer kümesi:  $-1 \leq y \leq 1$

Periyot:  $2\pi$

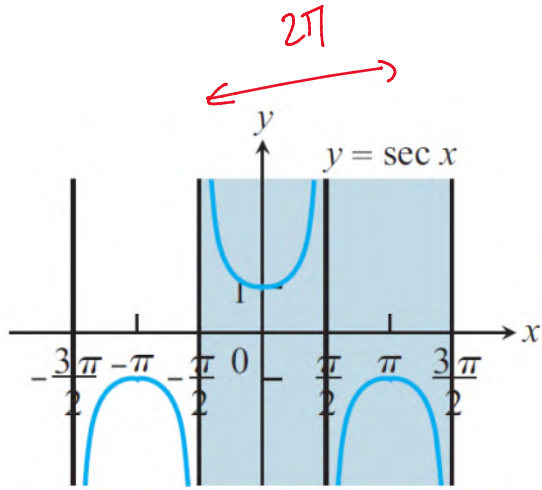
$\frac{\pi}{2}$



Tanım kümesi:  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$   
Değer kümesi:  $-\infty < y < \infty$   
Periyot:  $\pi$



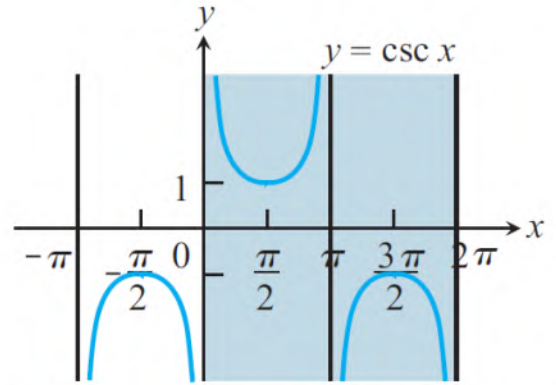
Tanım kümesi:  $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$   
Değer kümesi:  $-\infty < y < \infty$   
Periyot:  $\pi$



Tanım kümesi:  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$

Değer kümesi:  $y \leq -1$  ve  $y \geq 1$

Periyot:  $2\pi$



Tanım kümesi:  $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Değer kümesi:  $y \leq -1$  ve  $y \geq 1$

Periyot:  $2\pi$

| Çift                 | Tek                   |
|----------------------|-----------------------|
| $\cos (-x) = \cos x$ | $\sin (-x) = -\sin x$ |
| $\sec (-x) = \sec x$ | $\tan (-x) = -\tan x$ |
|                      | $\csc (-x) = -\csc x$ |
|                      | $\cot (-x) = -\cot x$ |

### Bağıntılar

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

## Toplam Formülleri

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B \quad A = B = \theta$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

## Trigonometrik Grafiklerin Dönüşümü

Kaydırma, uzatma, sıkıştırma ve yansıtma kuralları trigonometrik fonksiyonlara uygulanır. Aşağıdaki diyagram size, parametrelerin kontrolünü hatırlatacaktır.

Dikey uzatma veya sıkıştırma:  
x-ekseninin diğer tarafına  
yansıtma, negatif ise

$$y = af(b(x + c)) + d$$



Dikey kaydırma

Yatay uzatma veya sıkıştırma:  
y-ekseninin diğer tarafına yansıtma,  
negatif ise

Yatay kaydırma

Bu sunumun hazırlanmasında  
Thomas Calculus I (Onbirinci baskı) , George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass,  
Frank R. Giordano, Pearson Education Inc.  
Türkçe Çeviri: Recep Korkmaz, Beta Yayınları  
kitabından faydalanılmıştır.



Fonksiyon  
Soruları

**Örnek:**  $f(x): \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} + x + 2$  şeklinde tanımlanan fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

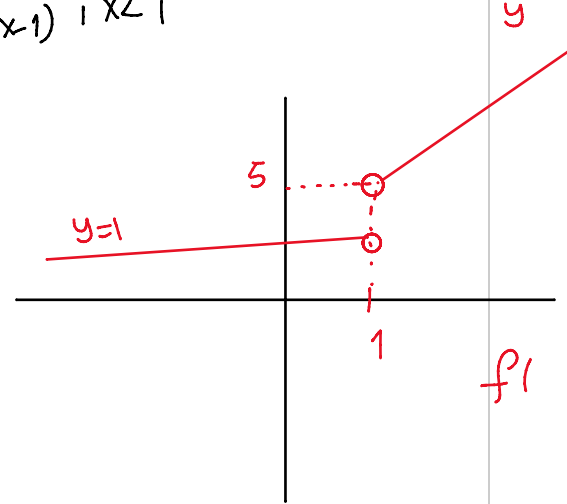
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} + x + 2$$

$$\Rightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

$$x > 1, \quad y = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + x + 2 = 2x + 3$$

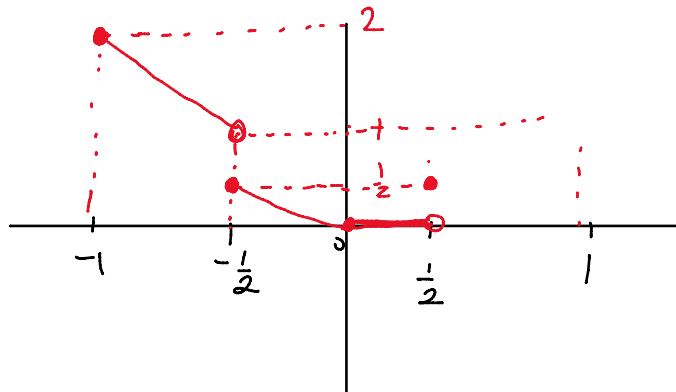
$$x < 1, \quad y = \frac{x^2 - 1}{-(x-1)} + x + 2 = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} + x + 2 = 1$$



**Örnek:**  $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = x \lfloor 2x \rfloor$  grafiğini çiziniz.

$\frac{1}{2}$  adim

$$\begin{aligned} -1 \leq x < -\frac{1}{2} & \Rightarrow -2 \leq 2x < -1, & \lfloor 2x \rfloor &= -2, & y &= -2x = \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 & \Rightarrow -1 \leq 2x < 0, & \lfloor 2x \rfloor &= -1, & y &= -x = \\ 0 \leq x < \frac{1}{2} & \Rightarrow 0 \leq 2x < 1, & \lfloor 2x \rfloor &= 0, & y &= 0 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 & \Rightarrow 1 \leq 2x < 2, & \lfloor 2x \rfloor &= 1, & y &= x \end{aligned}$$



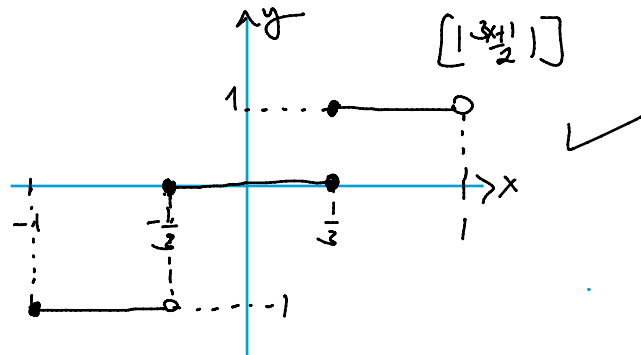
Örnek:  $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor$  grafiğini çiziniz.

$$n \leq x < n+1 \\ \underline{\underline{\lfloor x \rfloor = n}}$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow -3 \leq 3x < -1 \Rightarrow -2 \leq 3x+1 < 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{3x+1}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor = -1$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow -1 \leq 3x < 1, 0 \leq 3x+1 < 2, 0 \leq \frac{3x+1}{2} < 1, \left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

$$\frac{1}{3} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 3x < 3, 2 \leq 3x+1 < 4, 1 \leq \frac{3x+1}{2} < 2, \left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor = 1$$



Örnek:  $\sin 8^\circ = a$   $\sin 24^\circ = ?$   
 $\sin x = a$ ,  $\sin 3x = ?$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x \\ &= \sin x (1 - 2\sin^2 x) + \cos x \cdot 2 \sin x \cos x \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \cdot \cos^2 x \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x \quad \rightarrow (1 - \sin^2 x)\end{aligned}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\sin 24^\circ = 3a - 4a^3$$

Örnek:  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{1}{\cos 20^\circ} = ?$

$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$

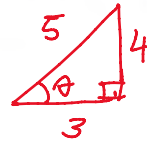
$\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ} \cdot \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{\overbrace{\sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ}^{\sin(60-20)} }{\cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}$

$\cos 20^\circ$   $\cos 60^\circ \sin 20^\circ$

$= \frac{\sin 40^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{2 \cancel{\sin 20^\circ} \cdot \cancel{\cos 20^\circ}}{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\sin 20^\circ} \cdot \cancel{\cos 20^\circ}} = 4$

**Örnek:**  $y = 3 \cos x - 4 \sin x$  fonksiyonunun alabileceği en büyük değer nedir?

$$y = 3 \left( \cos x - \frac{4}{3} \sin x \right)$$



$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$= 3 \left( \cos x - \tan \theta \cdot \sin x \right)$$

$$= 3 \left( \frac{\cos x}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin x \right)$$

$$= 3 \frac{(\cos x \cdot \cos \theta - \sin x \sin \theta)}{\cos \theta} \rightarrow \cos(x + \theta)$$

$$= \frac{3}{\cos \theta} \cos(x + \theta)$$

$$= 5 \cos(x + \theta) \leq 1$$

$$\leq 5$$

Örnek:  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$  olmak üzere

$$f(0) + f(1) = 1$$

$f($

$$2 \left\{ f(0) + f\left(\frac{1}{1997}\right) + f\left(\frac{2}{1997}\right) + \dots + f\left(\frac{1996}{1997}\right) + f(1) \right\} = ?$$

1998

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2}$$

(4<sup>1-x</sup> + 2)      (4<sup>x</sup> + 2)

$$= \frac{4^x (4^{1-x} + 2) + (4^x + 2) 4^{1-x}}{(4^x + 2)(4^{1-x} + 2)}$$

$$= \frac{4 + 2 \cdot 4^x + 4 + 2 \cdot 4^{1-x}}{4 + 2 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{1-x} + 4} = 1$$

**Örnek:**  $\sin 4x + \cos 2x = 0$  denkleminin  $[0, 2\pi]$  aralığındaki kökler toplamını bulunuz.

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

i)  $\cos 2x = 0$  Periyot

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$$

Periyot

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$k=0, x = \frac{3\pi}{4}$$

$$k=1, x = \frac{7\pi}{4}$$

$$k=2, x = \frac{11\pi}{4}$$

ii)  $2 \sin 2x + 1 = 0$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$$

$$k=0, x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = \frac{11\pi}{12}$$

$$k=1, x = \frac{19\pi}{12}$$

$$x = \frac{23\pi}{12}$$

$$k=2, x = \frac{31\pi}{12}$$

$$x = \frac{35\pi}{12}$$

$$\underline{\text{Toplam}} = 4\pi + 5\pi = \underline{9\pi}$$

Örnek:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\tan x} \left(\frac{3}{2}\right)^{\cot x} = 1$  denkleminin  $[0, 2\pi]$  aralığındaki kökler toplamını bulunuz.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\tan x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\cot x} = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\tan x - \cot x} = 1$$

$$\Rightarrow \tan x - \cot x = 0$$

$$\tan x = \cot x$$

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$k=0, \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$k=2, \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

$$k=4, \quad x = \frac{9\pi}{4}$$

$$k=1, \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

$$k=3, \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

Toplam  $4\pi$