

Limit

17 Ekim 2021 Pazar 20:01



Limit

LİMiT

GİRİŞ Limit kavramı, analizi cebir ve trigonometriden ayıran ana fikirdir. Bir eğriye teğet bulmak veya bir nesnenin hızını bulmada temeldir.

Bu bölümde önce sezgisel, sonra da matematiksel olarak limiti geliştireceğiz. Limiti bir f fonksiyonunun nasıl değiştiğini tanımlamak için kullanırız. Bazı fonksiyonlar sürekli olarak değişir; x 'teki küçük değişiklikler $f(x)$ 'te de küçük değişikliklere neden olur. Bazı fonksiyonların değerleri kesikli veya çok hızlı değişiyor olabilir. Limit kavramı bu davranışları ayırt etmek için kesin bir yol verir. Ayrıca, fonksiyon grafiklerinin teğet doğrularını bulmakta da limiti kullanırız. Bu geometrik uygulama bizi hemen bir fonksiyonun türevi kavramına götürür. Bölüm 3'te derinlemesine inceleyeceğimiz türev bir fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini belirler.

Değişim Oranları ve Limitler

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilmişse, y 'nin $[x_1, x_2]$ aralığında x 'e bağlı ortalama değişimini y 'deki değişim değeri $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 'i değişimin olduğu aralığın uzunluğu $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ 'ye bölerek hesaplarız.

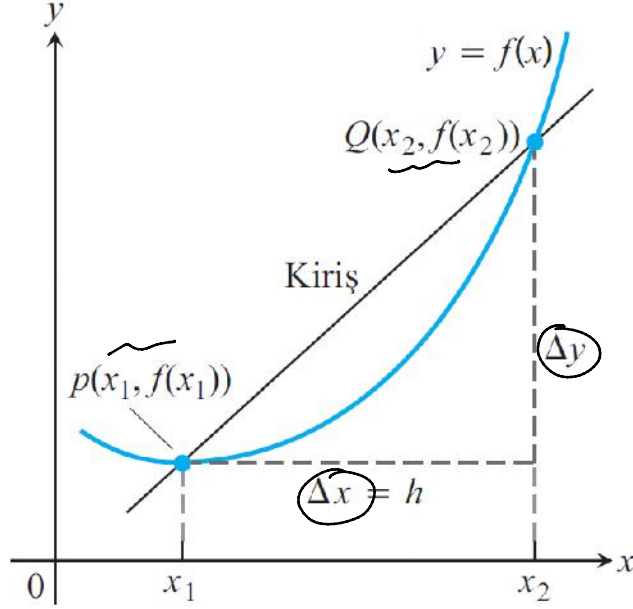
TANIM Bir Aralık Üzerinde Ortalama Değişim Oranı

$y = f(x)$ 'in $[x_1, x_2]$ aralığında x 'e bağlı ortalama değişiminin oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad (h \neq 0)$$

$x_1 \neq x_2$

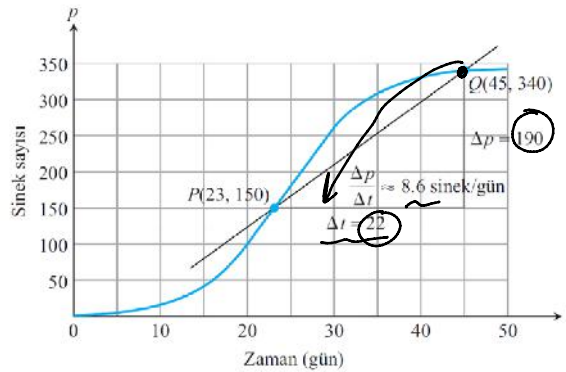
Geometrik olarak, $[x_1, x_2]$ aralığında f 'nin ortalama değişim oranı $P(x_1, f(x_1))$ ile $Q(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun eğimidir (Şekil 2.1). Geometride, bir eğrinin iki noktasını birleştiren doğruya eğrinin **kiriş** denir. Yani, f 'nin x_1 'den x_2 'ye ortalama değişim oranı PQ kirişinin eğimiyle aynıdır.



ÖRNEK Şekil 2.2, 50 günlük bir deneyde bir meyve sineği (*Drosophila*) topluluğunun nasıl büyüdüğünü göstermektedir. Sinek sayısı belirli aralıklarla sayılmış, bulunan değerler zamana karşı işaretlenmiş ve noktalar düzgün bir eğriyle birleştirilmiştir (Şekil 2.2 de mavi renkli). 23. günden 45. güne ortalama büyüme oranını bulun.

Çözüm 23. günde 150, 45. günde 340 sinek vardır. Yani, $45 - 23 = 22$ günde sinek sayısı $340 - 150 = 190$ artmıştır. Topluluęun 23. günden 45. güne kadar ortalama değişim oranı

$$\text{Ortalama değişim oranı: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ sinek/gün}$$



ŞEKİL 2.2 Kontrollü bir deneyde bir meyve sineği topluluğunun büyümesi. 22 günde ortalama değişim oranı, kirişin $\Delta p/\Delta t$ eğimidir.

Fonksiyon Değerlerinin Limitleri

$f(x)$, x_0 civarında açık bir aralıkta tanımlı olsun (x_0 'da tanımlı olmayabilir). x_0 'a yeterince yakın bütün x için $f(x)$ L değerine keyfi derecede (istediğimiz ölçüde L 'ye yakın) yaklaşıyorsa, x x_0 'a yaklaşırken, f L limitine yaklaşıyor deriz ve “ x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ 'in limiti L dir” diye okunan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

yazarız. Aslında tanım şunu söyler: x x_0 'a yakın iken (x_0 'ın her iki tarafında) $f(x)$ değerleri L sayısına yakındır.

Bu tanım gayri resmidir, çünkü keyfi derecede yakın ve yeterince yakın gibi terimler açık değildir; anlamları duruma göre değişir. Piston yapan bir işçiye göre yakın, bir inç'in bir kaç binde biri anlamına gelebilirken, uzak galaksileri inceleyen bir astronom için birkaç ışık yılı uzaklıkta anlamına gelebilir. Yine de, bu tanım belirli bazı fonksiyonların limitini bulmamızı sağlayacak kadar açıktır. Ancak limit teoremlerini ispatlamaya koyduğumuzda, Bölüm 2.3'teki daha açık tanıma gerek duyacağız.

ÖRNEK Bir Fonksiyonun Bir Nokta Civarındaki Davranışı

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$y = x + 1$$

fonksiyonu $x = 1$ civarında nasıl davranır?

Çözüm Verilen formül, $x = 1$ hariç bütün x reel sayıları için f 'yi tanımlı kılar. (0 ile bölemeyiz). Herhangi bir $x \neq 1$ değeri için, payı çarpanlarına ayırıp, ortak çarpanı sadeleştirerek formülü basitleştirebiliriz:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$

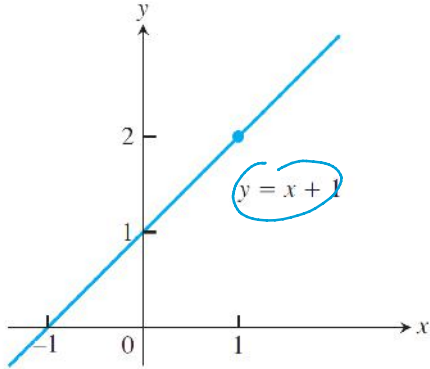
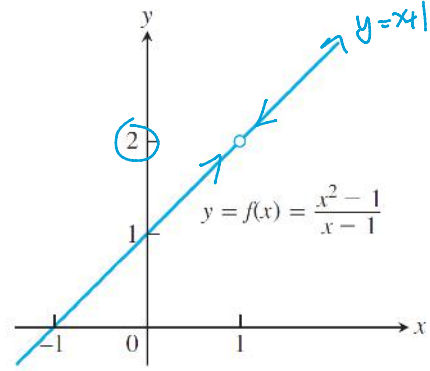
Böylece f 'nin grafiği bir noktası, yani $(1, 2)$, çıkartılmış olan $y = x + 1$ doğrusu olur. Bu çıkartılmış nokta Şekil 2.4'te bir “boşluk” olarak gösterilmektedir. $f(1)$ tanımlı olmadığı halde x 'i 1'e yeterince yakın seçerek, $f(x)$ 'in değerini 2'ye istediğimiz kadar yakın bulabileceğimiz açıktır (Tablo 2.2).

TABLO 2.2 x 1'e yaklaştıkça, $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ 2'ye o kadar yaklaşıp.

x 'in 1'in altında ve üstündeki değerleri

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$

0.9 ✓	1.9 ✓
1.1 ✓	2.1 ✓
0.99 ✓	1.99 ✓
1.01 ✓	2.01 ✓
0.999 ✓	1.999 ✓
1.001 ✓	2.001 ✓
0.999999 ✓	1.999999 ✓
1.000001 ✓	2.000001 ✓



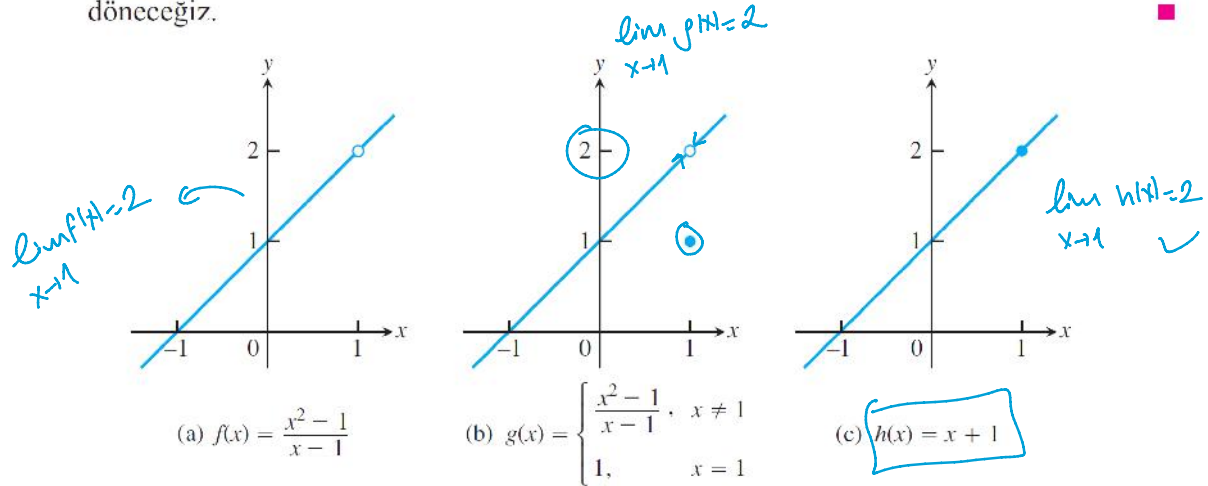
x 1'e yaklaşıpken $f(x)$ 2 limitine yaklaşıp deriz ve bunu

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

olarak yazarız.

ÖRNEK

Şekil 2.5'teki f fonksiyonu $x = 1$ 'de f tanımsız olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken limiti 2'dir. $2 \neq g(1)$ olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken, g fonksiyonunun limiti 2'dir. h fonksiyonu, $x \rightarrow 1$ iken limiti $x = 1$ 'deki değeri ne eşit olan tek fonksiyondur. h için, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ dir. Limitin ve fonksiyon değeri nin bu şekilde eşitliğı özel bir durumdur ve Bölüm 2.6'da buna döneceğiz.



ŞEKİL 2.5 x 1'e yaklaşıpken $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının hepsinin limiti 2 dir. Halbuki, $x = 1$ de yalnız $h(x)$ 'in değeri limiti ile aynıdır (Örnek 6).

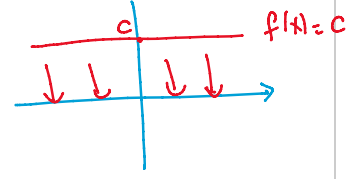
Bazen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f(x_0)$ hesaplanarak bulunabilir. Örneğin, $f(x)$, $f(x_0)$ 'ın tanımlı olduğu polinomların ve trigonometrik fonksiyonların cebirsel bir kombinasyonuysa, bu

Bazen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f(x_0)$ hesaplanarak bulunabilir. Örneğin, $f(x)$, $f(x_0)$ 'ın tanımlı olduğu polinomların ve trigonometrik fonksiyonların cebirsel bir kombinasyonuysa, bu geçerlidir (Bölüm 2.2 ve 2.6'te bunun hakkında daha çok şey söyleyeceğiz).

ÖRNEK

f birim fonksiyon $f(x) = x$ ise, x_0 'ın herhangi bir değeri için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \checkmark$$



f sabit fonksiyon $f(x) = k$ ise, (k sabit değerli fonksiyon) x_0 'ın herhangi bir değeri için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k \quad \checkmark$$

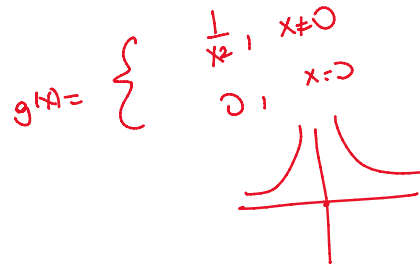
- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4 \quad \checkmark$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -13} (4) = 4 \quad \checkmark$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \quad \checkmark$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7 \quad \checkmark$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{x + 5} = \frac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\frac{2}{3} \quad \checkmark$

$x = -5$

Limitin var olmadığı birkaç durum Şekil 2.7'de gösterilmekte ve bir sonraki örnekte incelenmektedir.

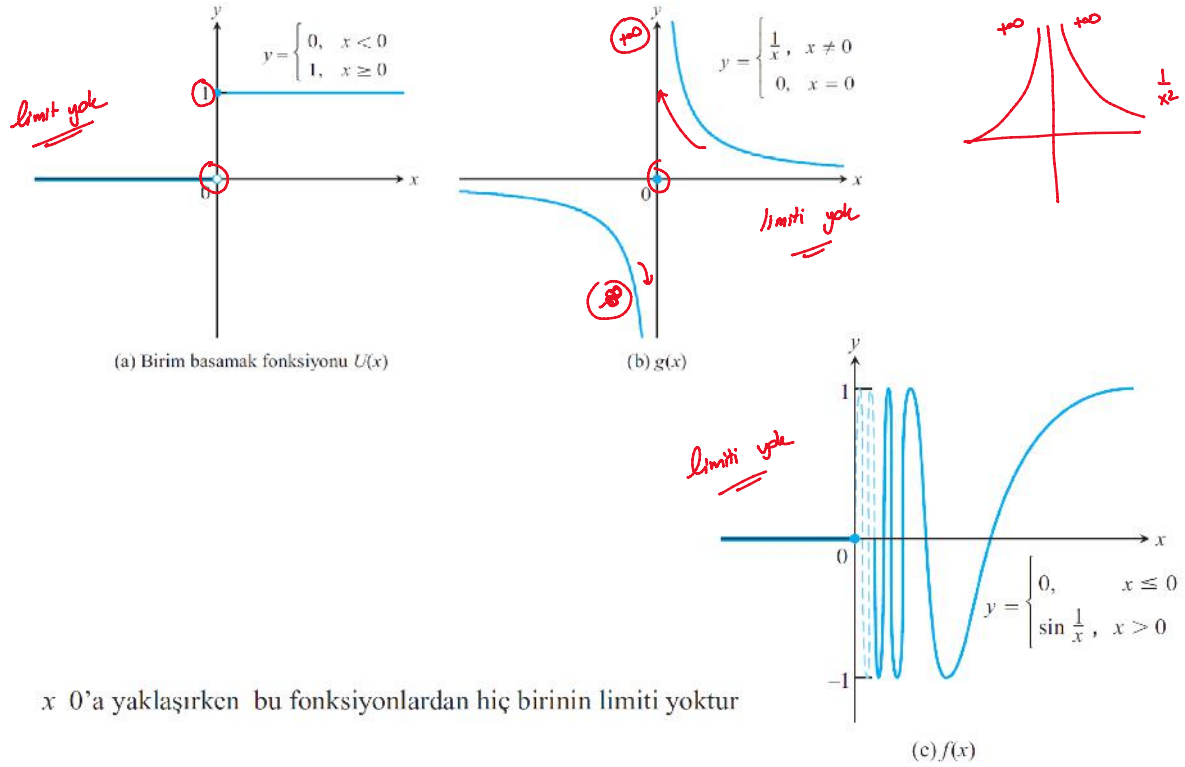
ÖRNEK $x \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonların davranışlarını inceleyin.

- (a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$
- (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$



Çözüm

- (a) Sıçrar: Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ 'in $x \rightarrow 0$ iken limiti yoktur, çünkü değerleri $x = 0$ 'da sıçrama yapar. x 'in sıfıra yakın negatif değerleri için $U(x) = 0$ 'dır. x 'in sıfıra yakın pozitif değerleri içinse $U(x) = 1$ 'dir. $x \rightarrow 0$ iken, $U(x)$ 'in yaklaştığı tek bir L değeri yoktur (Şekil 2.7a).
- (b) Çok büyür: $x \rightarrow 0$ iken $g(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü $x \rightarrow 0$ iken g 'nin değerleri mutlak değer olarak çok büyür ve herhangi bir reel sayıya yaklaşmaz (Şekil 2.7b)
- (c) Çok fazla salınır: $x \rightarrow 0$ iken $f(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü fonksiyonun değerleri 0 'ı içeren bütün açık aralıklarda -1 ile $+1$ arasında salınır. $x \rightarrow 0$ iken, değerleri herhangi bir sayının yakınında kalmaz (Şekil 2.7c).



Limitleri Hesaplamak Limit Kurallarını Kullanmak

Limit Kuralları

Aşağıdaki teorem, limitlerini bildiğimiz fonksiyonların matematiksel kombinasyonları olan fonksiyonların limitlerinin nasıl hesaplanacağını söyler.

TANIM 1 Limit Kuralları

L , M , c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

1. **Toplama Kuralı:**

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

2. **Fark Kuralı:**

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

3. **arpım Kuralı:**

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

İki fonksiyonun arpımının limiti limitlerinin arpımıdır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L$$

4. Sabitle Çarpım Kuralı:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

5. Bölüm Kuralı:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. Kuvvet Kuralı: r ve s ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı $s \neq 0$ ve $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

ÖRNEK

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)$

$$= c^3 + 4c^2 - 3$$

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty \cdot 0,$$

$$1^\infty, \infty^0,$$

(b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

$$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

TANIM 2 Polinomların Limitleri Değer Yerine Koyma İle Bulunabilir

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

olur.

TANIM 3 Bölünün Limiti Sıfır Değilse, Rasyonel Fonksiyonların Limitleri Değer Yerine Konularak Bulunabilir

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$, ise

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

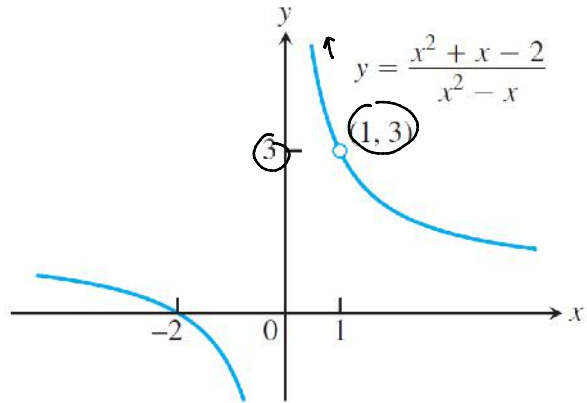
olur.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}. \quad \text{limitini hesaplayınız.}$$

$$= \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \quad (\text{belirsizlik})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3}{1} = 3$$



ÖRNEK

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} = \frac{10-10}{0} = \frac{0}{0} \text{ (belirsizlik)}$$

limitini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2+100}-100}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+100}+10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} = \frac{1}{20} // \end{aligned}$$

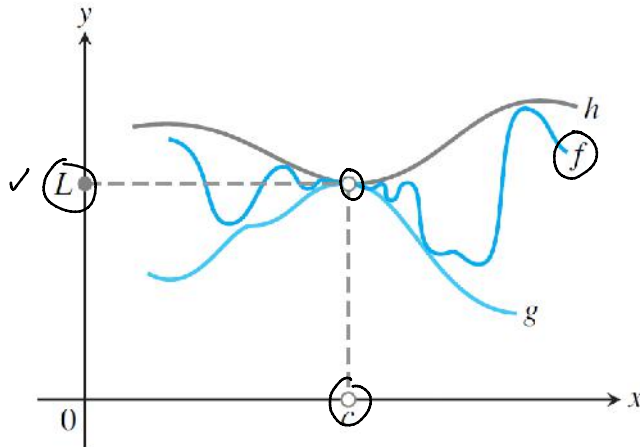
Sandviç Teoremi

, Sandviç , Sıkıştırma Teoremi

c 'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x 'ler için, belki $x = c$ hariç olabilir, $\underline{g(x)} \leq \underline{f(x)} \leq \underline{h(x)}$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L.$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\boxed{\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L}$ olur.



ÖRNEK

Her $x \neq 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

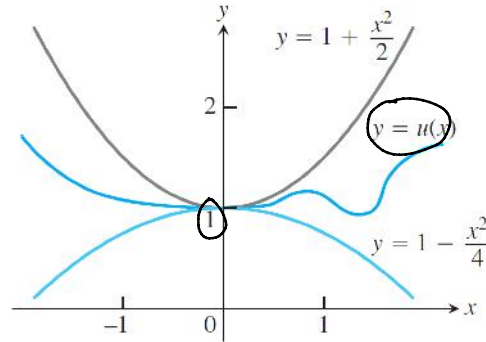
$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{x^2}{2} = 1$$

ÖRNEK

Her $x \neq 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1$$

veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ 'i bulun, u ne kadar karmaşık olursa olsun.



Bir Limitin Kesin Tanımı

TANIM Bir Fonksiyonun Limiti

ξ

$f(x)$, x_0 civarında (x_0 'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun.

Her $\epsilon \geq 0$ sayısına karşılık, $\delta(\epsilon)$

$0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bütün x 'ler için $|f(x) - L| < \epsilon$

olacak şekilde bir $\delta \geq 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

yazarız.

ÖRNEK

$$x_0 = 1, L = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2, \quad f(x) = 5x - 3$$

olduğunu gösterin.

$$|x - x_0| < \delta(\epsilon), \quad |f(x) - L| < \epsilon, \quad \delta(\epsilon) ??$$

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{5}$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5} \Rightarrow |(5x - 3) - 2| < \epsilon$$

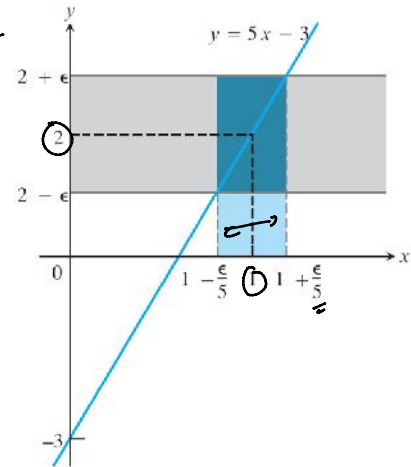
$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

$$= |(5x - 3) - 2| < \epsilon$$

$$|5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$



ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ ve } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \text{ veriliyor.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

olduğunu ispatlayın.

$$|x - c| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x - c| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon$$

$$|x - c| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon$$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - M|}_{\frac{\epsilon}{2}}$$

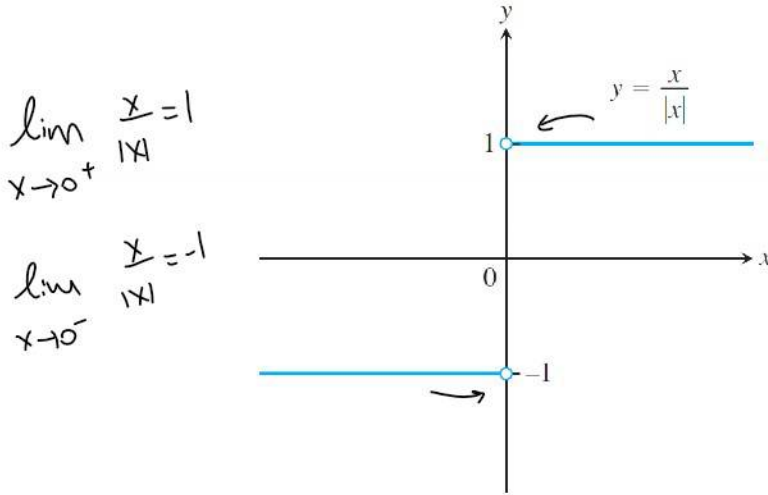
$$\leq \epsilon \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Tek Taraflı Limitler ve Sonsuzda Limitler

x c 'ye yaklaşırken bir L limitinin olabilmesi için, bir f fonksiyonunun a 'nın *iki tarafında* da tanımlı olması ve x c 'ye herhangi bir taraftan yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin de L 'ye yaklaşması gerekir. Bu yüzden, normal limitlere bazen **iki taraflı** limitler de denir.

f 'nin bir c noktasında iki-taraflı bir limitinin olmaması halinde bir tek-taraflı limiti, yani yaklaşımın sadece tek taraflı olması durumunda bir limiti bulunabilir. Yaklaşım sağdan ise limit bir **sağdan limit** dir. Soldan ise **soldan limit**.



Sezgisel olarak, $f(x)$ fonksiyonu $c < b$ olmak üzere bir (c, b) aralığında tanımlanmış ise ve x c 'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ L 'ye oldukça yaklaşıyorsa, f 'nin c 'de **sağdan** bir L limiti vardır deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

(c, b)
↓
⊗

yazarız.

" $x \rightarrow c^+$ " sembolü, sadece x 'in c 'den daha büyük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.

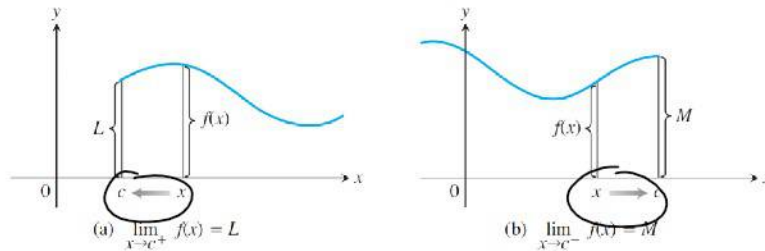
Benzer şekilde, $f(x)$ fonksiyonu $a < c$ olmak üzere bir (a, c) aralığında tanımlanmış ise ve x c 'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ M 'ye oldukça yaklaşıyorsa, f 'nin c 'de **soldan** bir M limiti vardır deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = M.$$

(a, c)
↓
⊗

yazarız.

" $x \rightarrow c^-$ " sembolü, sadece x 'in c 'den daha küçük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.



ŞEKİL 2.22 (a) x c 'ye yaklaşırken sağdan limit. (b) x c 'ye yaklaşırken soldan limit.

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun tanım aralığı $[-2, 2]$ 'dir ve grafiği Şekil 2.23'teki yarım çemberdir. Limitleri şu şekildedir:

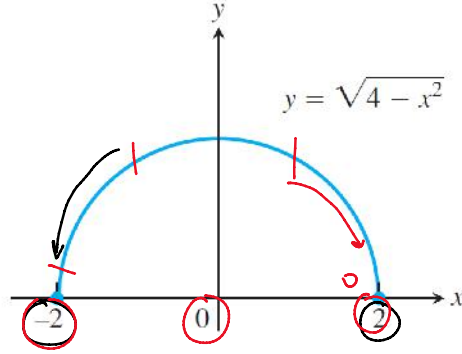
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

Fonksiyonun $x = -2$ 'de soldan bir limiti veya $x = 2$ 'de sağdan bir limiti yoktur. -2 veya 2 'de iki taraflı bir limiti bulunmamaktadır.

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$



ŞEKİL 2.23 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Örnek 1).

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \text{tanımlı değil}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \text{tanımlı değil}$$

TEOREM 6

$x \rightarrow c$ 'ye yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun, ancak ve yalnız o noktada sağdan ve soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse, bir limiti vardır

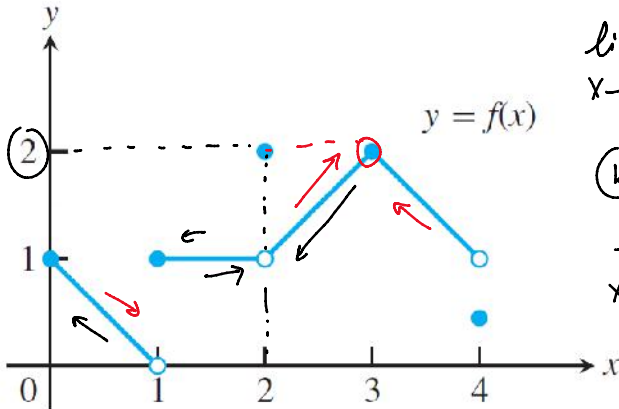
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

ÖRNEK

(a) $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{tanımlı değil} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

limit yok



(b) $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

limit yok

(c) $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \quad \left| \quad x \rightarrow 2 \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

TANIMLAR Sağdan Limit, Soldan Limit

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$ 'in x_0 'da **sağdan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (\text{Şekil 2.25'e bakın})$$

yazarız.

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

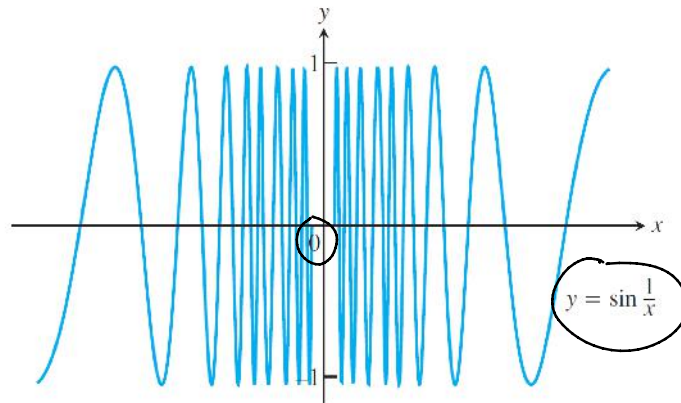
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$ 'in x_0 'da **soldan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (\text{Şekil 2.26'ya bakın})$$

yazarız.

ÖRNEK $y = \sin(1/x)$ 'in x iki taraftan da sıfıra yaklaşırken bir limitinin olmadığını gösterin

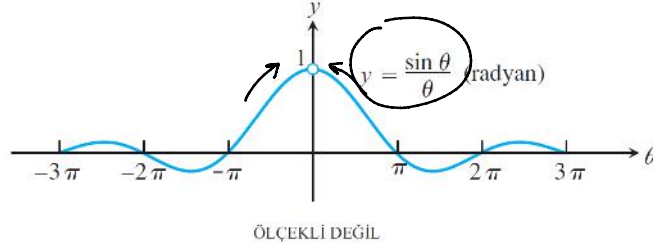
Çözüm x sıfıra yaklaşırken, çarpmaya göre tersi, $1/x$, sınırsızca büyür ve $\sin(1/x)$ 'in değerleri -1 ile 1 arasında gidip gelir. x sıfıra yaklaşırken fonksiyon değerlerinin giderek yaklaştıkları tek bir L sayısı yoktur. x 'i sadece pozitif veya negatif değerlerle de sınırlasak, bu durum geçerlidir. $x = 0$ 'da fonksiyonun sağdan veya soldan bir limiti yoktur. ■



ŞEKİL 2.28 $y = \sin(1/x)$ fonksiyonunun x sıfıra yaklaşırken sağdan veya soldan limiti yoktur (Örnek 4).

$(\sin \theta)/\theta$ İçeren Limitler

$(\sin \theta)/\theta$ hakkındaki temel gerçek şudur: radyan ölçüde $\theta \rightarrow 0$ iken limiti 1 dir. Bunu Şekil 2.29 da görebilir ve Sandöviç Teoremi yardımıyla cebirsel olarak doğrulayabiliriz. Bu limitin önemini, trigonometrik fonksiyonların anlık değişim oranlarının incelendiği Bölüm 3.4'te göreceksiniz.

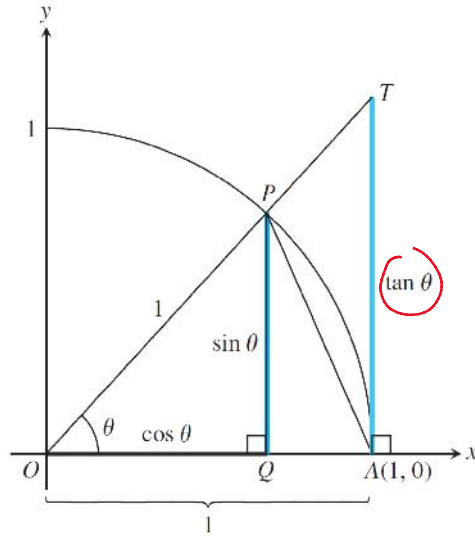


ŞEKİL 2.29 $f(\theta) = (\sin \theta)/\theta$ 'nın grafiği.

TEOREM 7

✖✖

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ radyan ölçüde}) \quad (1)$$



$$\frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A(OAP) < A(OAT) < A(OAP)$$

$$\frac{1 \cdot \sin \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{1 \cdot \tan \theta}{2}$$

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

ÖRNEK

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ve (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

ÖRNEK

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ve (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$
olduğunu gösterin.

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

(a)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos h + 1}$$

$$= 0$$

$2x = \theta$
 $x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

$$\cos h = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

II. yol
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}}{h}$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{h}{2}$$

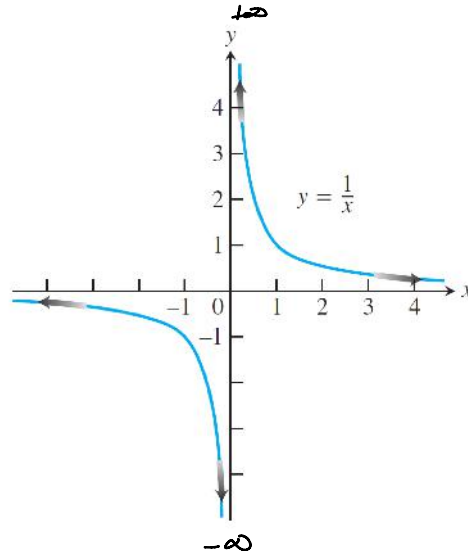
$$= 0$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizlik tipi

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$x \rightarrow \pm \infty$ iken Sonlu Limitler

Sonsuzluk için kullanılan (∞) sembolü bir reel sayı göstermez. ∞ sembolünü bir fonksiyonun tanım kümesindeki veya değer kümesindeki değerler her sonlu sınırı aştığındaki davranışını tanımlamak için kullanırız. Örneğin, $f(x) = 1/x$ fonksiyonu her $x \neq 0$ için tanımlıdır (Şekil 2.31). x pozitif olarak giderek büyürken, $1/x$ giderek küçülür. x negatif iken büyüklüğü giderek artarken, $1/x$ yine giderek küçülür. Bu gözlemleri, $x \rightarrow \pm \infty$ iken $f(x) = 1/x$ 'in limiti 0'dır veya $f(x) = 1/x$ 'in sonsuzda ve negatif sonsuzda limiti 0'dır diyerek özetleriz. Aşağıda kesin tanım verilmektedir.



TANIMLAR $x \rightarrow \infty$ veya $x \rightarrow -\infty$ iken Limitler

1. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$x > M$ eşitsizliğini sağlayan bütün x 'ler için $|f(x) - L| < \epsilon$ ✓

olacak şekilde bir M sayısı bulunabilirse x sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun **limiti** L dir deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

yazarız.

2. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$x < N$ eşitsizliğini sağlayan bütün x 'ler için $|f(x) - L| < \epsilon$

olacak şekilde bir N sayısı bulunabilirse x eksi sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun **limiti** L dir deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

yazarız.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzdaki Limitleri ✓

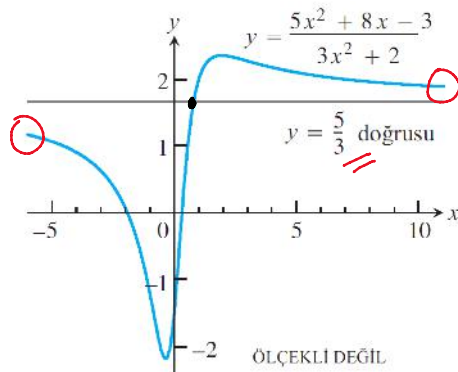
$x \rightarrow \pm \infty$ iken bir rasyonel fonksiyonun limitini belirlemek için, pay ve paydayı paydadaki en büyük x kuvvetiyle böleriz. Bundan sonra ne olacağı polinomların derecesine bağlıdır.

ÖRNEK

Pay ve payda aynı derecede

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \dots = \frac{5}{3}$$



ÖLÇEKLİ DEĞİL

ÖRNEK

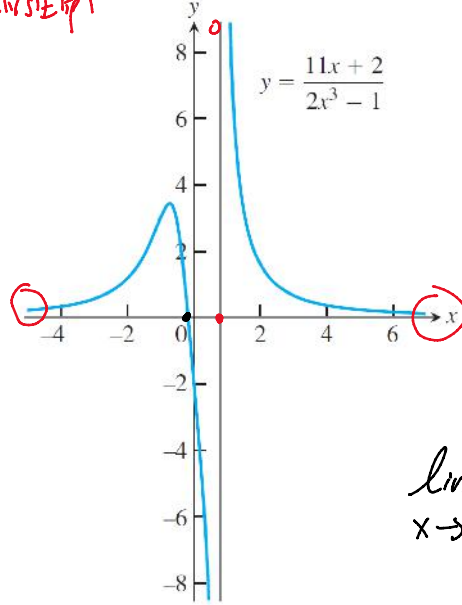
Payın derecesi paydanın derecesinden küçük

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0 \quad \checkmark$$

$\frac{-\infty}{\infty}$
 $\frac{\infty}{\infty}$
 $\frac{\infty}{\infty}$

belirsizlik



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}}$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\deg(f(x)) > \deg(g(x)) \rightarrow \infty$$

$$\deg(f(x)) < \deg(g(x)) \rightarrow 0$$

$$\deg(f(x)) = \deg(g(x))$$

en büyük dereceli katman oran

TANIM Yatay Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

ise, $y = b$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir yatay asimptotudur.

Eğik Asimptotlar

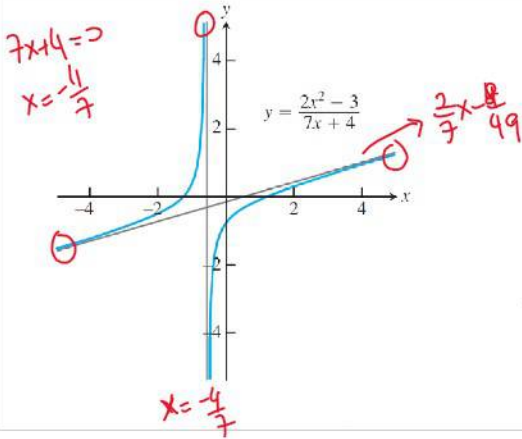
Rasyonel bir fonksiyonun **payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla** ise, grafiğinin **bir eğik asimptotu** vardır. f' 'yi bir **linear fonksiyon** ile $x \rightarrow \pm \infty$ iken sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için payı paydaya bölerek asimptot için bir denklem buluruz. İşte bir örnek.

ÖRNEK

Bir Eğik Asimptot Bulmak

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonunun eğik asimptot bulunuz.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3 \quad | \quad 7x + 4 \\ 2x^2 + \frac{8}{7}x - \frac{32}{49} \\ \hline -\frac{8}{7}x - 3 \\ -\frac{8}{7}x - \frac{32}{49} \\ \hline -\frac{117}{49} \end{array}$$

$$2x^2 - 3 = (7x + 4) \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49} \right) - \frac{117}{49}$$

$$\frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49} - \frac{117}{49(7x + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

Sonsuz Limitler ve Dikey Asimptotlar

$f(x) = 1/x$ fonksiyonuna yeniden bakalım. $x \rightarrow 0^+$ iken f 'nin değerleri, her pozitif reel sayıya ulaşarak aşacak şekilde, sınırsız artar. Yani, ne kadar büyük olursa olsun herhangi bir B pozitif reel sayısı verilmişse, f 'nin değerleri büyümeye devam eder ve B 'yi aşar (Şekil 2.37). Dolayısıyla, $x \rightarrow 0^+$ iken, f 'nin bir limiti yoktur. Buna rağmen, f 'nin davranışını $x \rightarrow 0^+$ iken $f(x) \rightarrow \infty$ 'a yaklaşıyor diyerek tanımlamak uygundur. Bunu

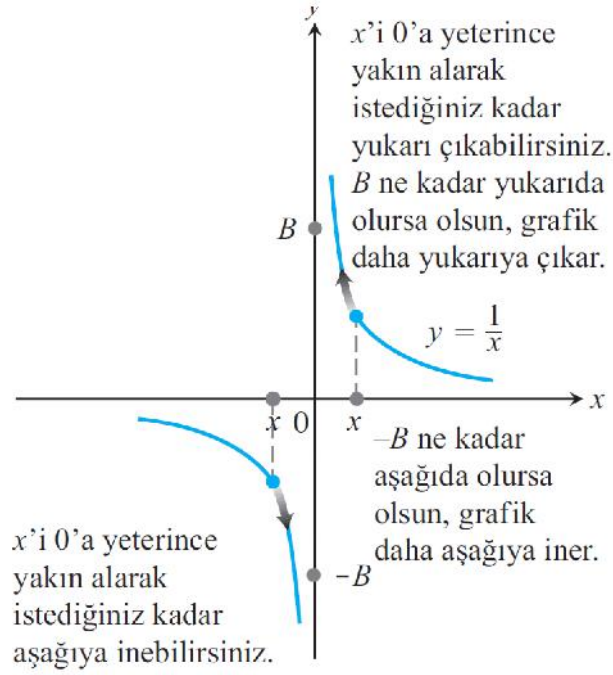
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

olarak yazarız. Bunu yazarken limitin var olduğunu söylemiyoruz. Bir ∞ reel sayısı olduğunu da söylemiyoruz, çünkü böyle bir sayı yok. Bunun yerine, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)$ 'in bulunmadığını, çünkü $x \rightarrow 0^+$ iken $1/x$ 'in pozitif yönde çok fazla arttığını söylüyoruz.

$x \rightarrow 0^-$ iken $f(x) = 1/x$ 'in değerleri negatif yönde çok fazla artar. Herhangi bir negatif $-B$ sayısı verilmişse, f 'nin değerleri eninde sonunda $-B$ 'nin altında kalır (Şekil 2.37'a bakın). Bunu

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

olarak yazarız. Yine, limitin var olduğunu veya $-\infty$ sayısına eşit olduğunu söylemiyoruz. Bir $-\infty$ reel sayısı yoktur. $x \rightarrow 0^-$ iken değerleri negatif yönde çok fazla büyüdüğü için limiti olmayan bir fonksiyonun davranışını tanımlıyoruz.



ÖRNEK

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \checkmark$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \checkmark$$

x 2 civarında olmak üzere, değerler $x > 2$ için negatiftir.

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \checkmark$$

x 2 civarında olmak üzere, $x < 2$ için değerler pozitiftir.

$$(e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ yoktur. } \checkmark$$

(c) ve (d)'ye bakın.

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

(a) ve (b) şıklarında, $x = 2$ 'de paydadaki sıfırın etkisi pay'ın da orada sıfır olması nedeniyle sadeleşir. Böylece sonlu bir limit bulunur. Aynı şey, sadeleştirmenin paydada hala bir sıfır bıraktığı (f) şıkında geçerli değildir. ■

TANIM Limit Olarak Sonsuz ve Negatif Sonsuz

$$x > M, \quad x < N$$

1. Her pozitif B reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad \underline{f(x) > B}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ sonsuza yaklaşıyor der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

yazarız.

2. Her negatif $-B$ reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad \underline{f(x) < -B}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ eksi sonsuza yaklaşıyor der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

yazarız.

Dikey Asimptotlar

$y = 1/x$ fonksiyonunun grafiğinin üstündeki bir nokta ile y -ekseni arasındaki uzaklık, nokta grafik üzerinde dikey olarak orijinden uzaklaştıkça, sıfıra yaklaşır (Şekil 2.42). Bu davranış meydana gelir çünkü

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

dir. $x = 0$ doğrusunun (y -ekseni), $y = 1/x$ 'in grafiğinin bir *dikey asimptotu* olduğunu söyleriz. Paydanın $x = 0$ da sıfır olduğuna ve fonksiyonun burada tanımlı olmadığına dikkat edin.

TANIM Dikey Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty.$$

ise, $x = a$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun bir dikey asimptotudur.

ÖRNEK Aşağıdaki eğrinin asimptotlarını bulun.

$$y = \frac{x+3}{x+2} \quad \frac{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{2}{x})} = 1$$

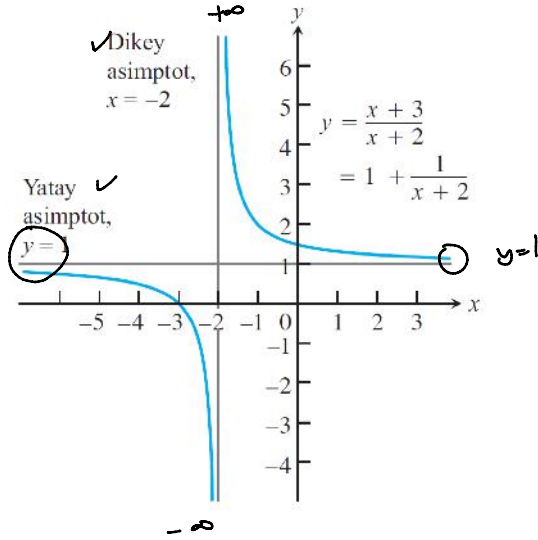
✓ $x = -2$ noktasında dikey asimptot +

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{x+2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x+2} = 1$, $y=1$ yatay asimptot

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x+2} = 1$$

$$\frac{-\infty}{-\infty} = 1 \quad \frac{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{2}{x})} = 1$$



ÖRNEK Aşağıdaki fonksiyonun asimptotlarını bulun.

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4} \rightarrow \text{dikey asimptot}$$

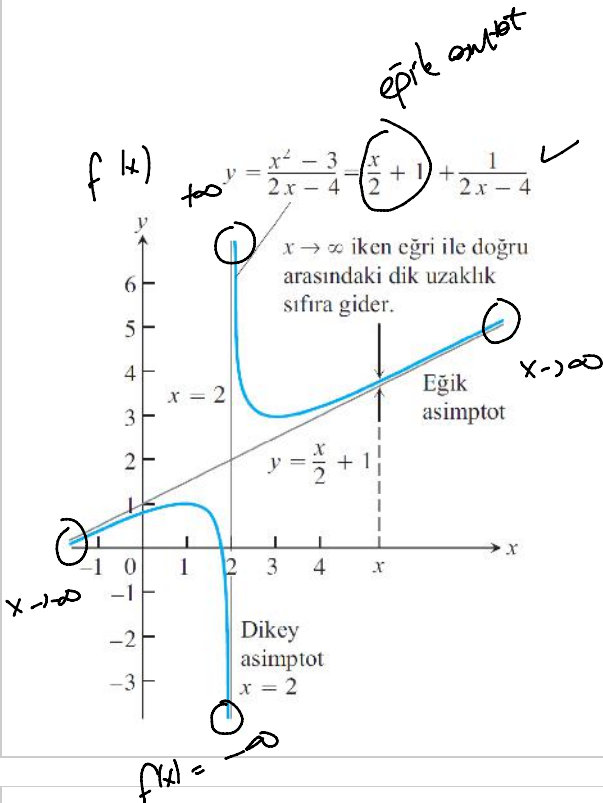
→ eğik asimptot

$2x-4 = 0 \Rightarrow x=2$ dikey asimptot

$$\begin{array}{r} x^2-3 \\ -x^2-2x \\ \hline 2x-3 \\ -2x-4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3}{2x-4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3}{2x-4} = -\infty$$



Bu sunumun hazırlanmasında
Thomas Calculus I (Onbirinci baskı) , George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel
Hass, Frank R. Giordano, Pearson Education Inc.
Türkçe Çeviri: Recep Korkmaz, Beta Yayınları
kitabından faydalanılmıştır.