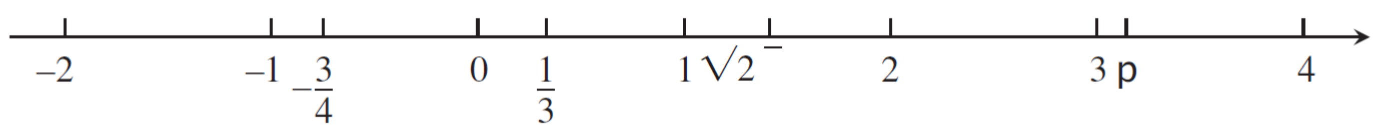
Ön Bilgiler

Reel Sayılar Ve Reel Doğru

Reel Sayılar:

Analizin büyük bir bölümü reel sayı sistemi özellikleri üzerine kurulmuştur. Reel sayılar ondalık sayı olarak ifade edilebilen sayılardır.Reel sayılar geometrik olarak reel doğru diye adlandırılan bir sayı doğrusu üzerinde gösterilir.

$-3/4=-0.75 \qquad \sqrt{2}=1,4142\ldots$



Reel sayılar sistemi özelliklerine göre üç kategoride incelenir;

a)Cebirsel: Toplama çıkarma, çarpma, bölme(0 harіç)

b)Sıralama:Herhangi a ve b sayısı için a<b veya b<a

$a \leq b \qquad b \leq a \Rightarrow a = b$

$a \leq b \qquad a \leq c \; a.c \leq b.c$

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

c)Tamlık: Tamlık özelliği ileride ele alacağımız limit konusunda ayrıntılı şekilde incelenecektir. Kabaca hiçbir boşluk kalmayacak şekilde reel sayı doğrusunu tamamlamaya yetecek kadar reel sayı bulunduğunu söyler

Eşitsizlik Kuralları

$1) a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$2) a < b \Rightarrow a - c < b - c$

$3) a < b \; ve \; c > 0 \quad ise \quad a.c < b.c$

$4) a < b \; \; ve \; c < 0 \; a.c > b.c \quad olmak \quad üzere$

$5) a > 0, \; \dfrac{1}{a} > 0$

$6) a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Reel sayılar özel olarak üç alt kümeye ayrılır;

Doğal Sayılar: 1, 2, 3, 4...

Tam Sayılar: 0, ∓ 1, ∓2…

Rasyonel Sayılar: m ve n tamsayı ve n≠0 olmak üzere m/n şeklinde gösterilen sayılara rasyonel sayı denir…

Sonlanan Rasyonel Sayılar: ¾ =0,75

Tekrarlanan Rasyonel Sayılar: 23/11= 2,0909

Rasyonel sayılar kümesi reel sayıların tüm cebirsel sıralama özelliğine sahiptir. Ancak tamlık özelliği yoktur.

Örneğin: Karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur. Rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayılar denir. Ondalık açılımlarının kesilmeyen ve tekrarlanmayan olmalarıyla belirlenir.

Π =3,14… .$\sqrt{2}$

Küme Gösterimi:Reel sayıların özel bir alt kümesini belirlemek çok kullanışlıdır.Bir küme bir nesneler topluluğudur ve bu nesneler kümenin elemanıdır.S bir küme $a \in S$ ise a S kümesinin elemanıdır

Aralıklar:İçinde en azından iki sayı varsa ve elemanlarının herhangi ikisinin arasında bulunan bütün reel sayıları içeriyorsa reel doğrunun bir alt kümesi aralık adını alır.Doğru parçalarına karşılık gelen sayı aralıklarına sonlu aralıklar ışınlara karşılık gelenlere ise sonsuz aralıklar denir. Sonlu aralıklar 2 uç noktalarını içeriyorsa kapalı tek uç noktalarını içeriyorsa yarı açık, 2 uç noktalarını içeriyorlarsa açık olarak adlandırılır. Uç noktaya sınır noktası denir. Bütün reel doğru hem açık hem kapalı sonsuz bir aralıktır.

Eşitsizliklerin Çözümü:

x in bir eşitsizliğini sağlayan aralık veya aralıkları bulma işlemine eşitsizliğin çözümü denir

Örnek:

$$\frac{-x}{9} < 3x + 5$$

$$-x < 27x + 45$$

$$0 < 28x + 45$$

$$28x > -45$$

$$x > \frac{-45}{28}$$

$$ç.k = \left(\frac{-45}{28}, \infty \right)$$

Örnek:

$$\frac{6}{x-1} > 5$$

$$6 > 5x - 5$$

$$11 > 5x$$

$$\frac{11}{5} > x \qquad x - 1 = 0 \qquad x = 1 \qquad x > 1 \qquad Ç.K = \left(1, \frac{11}{5} \right)$$

Mutlak Değer: Bir x sayısının $|x|$ ile gösterilen mutlak değeri

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Geometrik olarak x ‘in mutlak değeri reel sayı doğrusu üzerinde x’ den 0’ a olan uzaklıktır. Uzaklıklar daima pozitif veya sıfır olduklarından her x reel sayısı için. $|x| \geq 0$. $\sqrt{a}$ daima a nın negatif olmayan karekökünü belirttiği için $|x|$ başka bir tanımla $|x| = \sqrt{x^2}$

Mutlak değerin özellikleri

$$|a| = |a|$$

$$|a.b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\,(b \neq 0)$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|\,(\ddot{u}\c{c}gen\ e\c{s}itsizli\breve{g}i)$$

Aralıklar Ve Mutlak Değerler

a herhangi bir pozitif sayı ise;

$$|x| = a \Leftrightarrow x \mp a$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \qquad veya\, x < -a$$

Örnek:

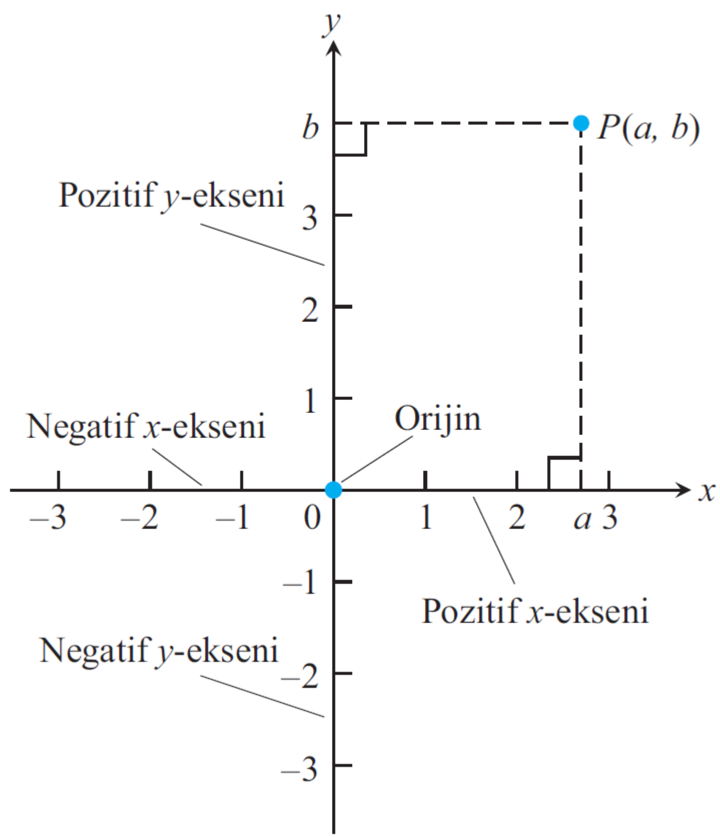
$$\left|5-\frac{2}{x}\right| \le 1$$

$$-1 \le 5-\frac{2}{x} \le 1 \qquad 4 \le \frac{2}{x} \le 6 \qquad 4x \le 2 \le 6x$$

$$2 \le 6x \quad x \ge \frac{1}{3}$$

$$4x \le 2 \quad x \le \frac{1}{2} \qquad Ç.K\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

Doğrular, Çemberler, Paraboller



Artımlar ve Doğrular: Bir parçacık düzlemde bir noktadan diğerine hareket ederken koordinatlarındaki net değişikliklere artım denir. Başlangıç noktası koordinatları bitim noktaları çıkartılarak hesaplatılırlar x x_1 den x_2 ye gider ise x teki artım. $\Delta x = x_2 - x_1$

Düzlemde $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ noktaları verilmişse

$$\Delta x = (x_2 - x_1)$$
$$\Delta y = (y_2 - y_1)$$

Artımlarına sırasıyla p_1 *ve* p_2 arasındaki ilerleme ve yükselme denir. Böyle 2 nokta daima bu noktalardan geçen tek bir doğru verirler. Düzlemde dikey olmayan herhangi bir doğrunun doğru üzerinden seçilen her $p_1(x_1, y_1)$ ve $p_2(x_2, y_2)$ noktaları için geçerli olan bir özelliktir.

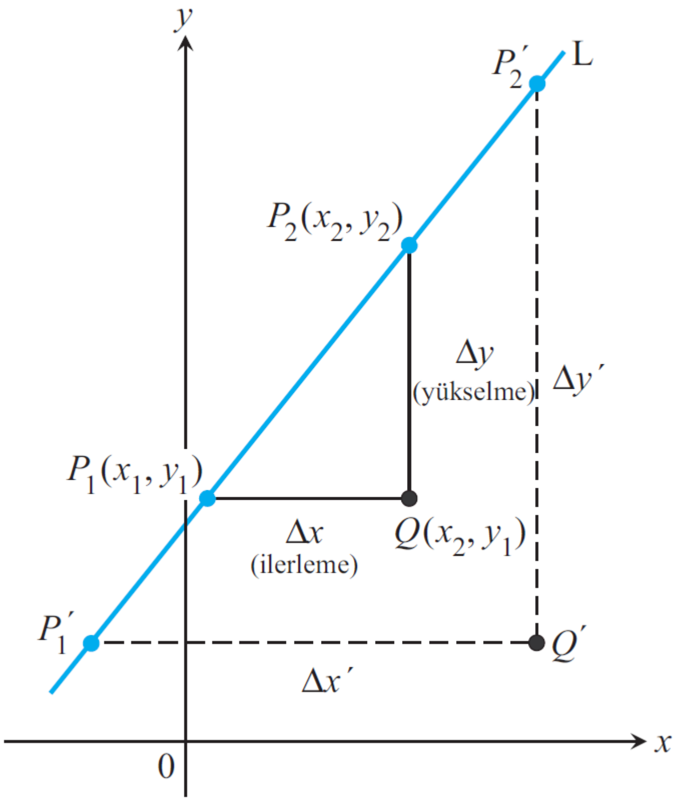
Doğrunun eğimi: $m = \dfrac{yükselme}{ilerleme} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Eğim bir doğrunun yönünü ve dikliğini belirler Eğimi pozitif olan bir doğru sağa doğru yukarı çıkar.Eğimi negatif bir doğru ise sağa aşağı iner.Dikey bir doğrunun eğimi tanımsızdır.Bir doğrunun yönü ve dikliği bir açıyla ölçülebilir. x ekseninden geçen bir doğrunun eğim açısı x ekseninden doğruyu saat yönünün tersine olan en küçük açıdır.

Eğimini ve üzerindeki $p_1(x_1, y_1)$ noktasının koordinatlarını biliyorsak dikey olmayan bir doğrunun denklemi $p(x, y)$, l doğrusu üzerindeki herhangi bir başka noktaysa bu doğrunun eğimi

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = y_1 + m(x - x_1)$$

Bu ise (x_1, y_1) noktasından geçen eğimi m olan doğrunun denklemidir.



y
x
0
L
P_2'
$P_2(x_2, y_2)$
Δy
(yükselme)
$\Delta y'$
$P_1(x_1, y_1)$
Δx
(ilerleme)
$Q(x_2, y_1)$
P_1'
Q'
$\Delta x'$

Örnek: $A(-2,3)$ $B(4,-7)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunur

$$m=\frac{-7-3}{4-(-2)}=\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3}$$

$$y-3=\frac{-5}{3}(x+2)$$

$$y=\frac{-5x}{3}-\frac{10}{3}+3$$

$$y=\frac{-5x}{3}-\frac{1}{3}$$

Dikey olmayan bir doğrunun y eksenini kestiği noktanın y koordinatına y kesim noktası denir.

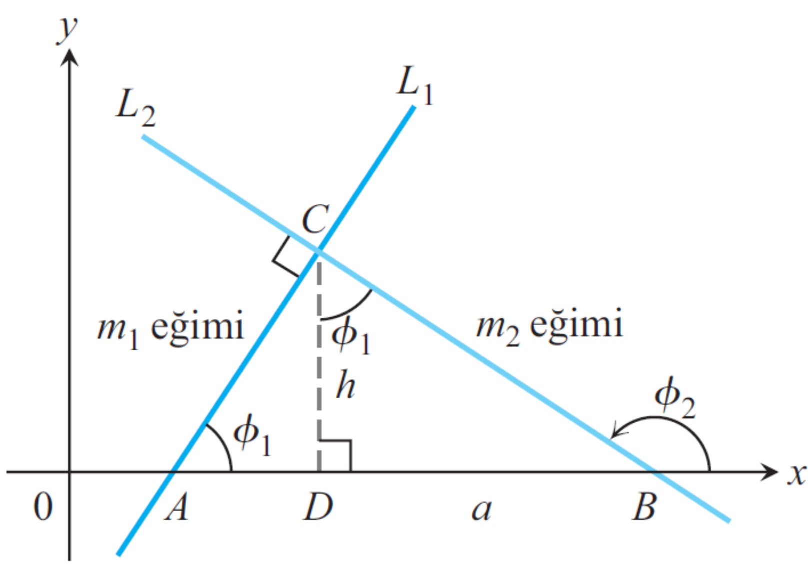
a ve b her ikiside 0 olmamak şartı ile $ax+by=c$ denklemine x ve y nin lineer denklemi denir.

Paralel ve Dik Doğrular:

Paralel doğruların eğim açıları aynıdır. l_1 ve l_2 iki doğru olmak üzere bu doğrular birbirine dik ise eğimleri arasında $m_1 m_2 = -1$ eşitliği mevcuttur.

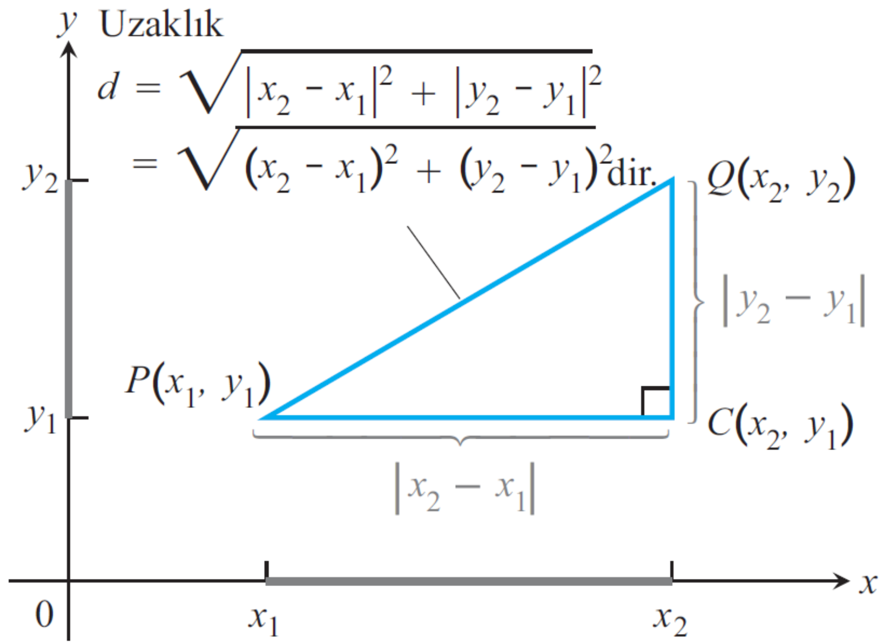
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



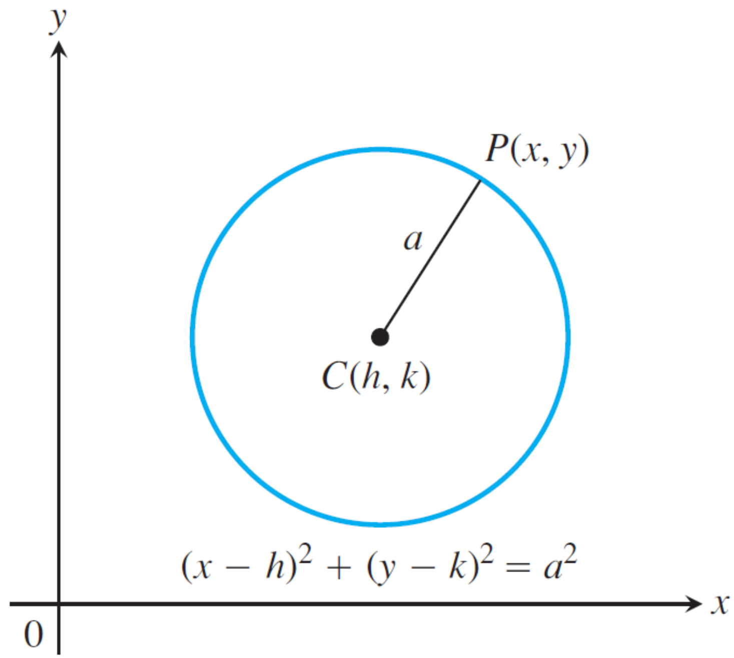
Düzlemde Uzaklık ve Çemberler

Düzlemdeki noktalar arasındaki uzaklık Pisagor formülünden gelen bir formülle hesaplanır.



$P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ arasındaki uzaklık aşağıdaki gibidir:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Tanım olarak; a yarıçaplı bir **çember**, bir $C(h, k)$ merkezine uzaklıkları a olan bütün $P(x, y)$ noktalarının kümesidir (Şekil 1.17). Uzaklık formülünden, ancak ve yalnız

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a,$$

ise, P noktası çember üzerindedir. Dolayısıyla

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

Örnek:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \quad \textit{çemberinin merkezi ve yarı çapını bulunuz ?}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 3$$

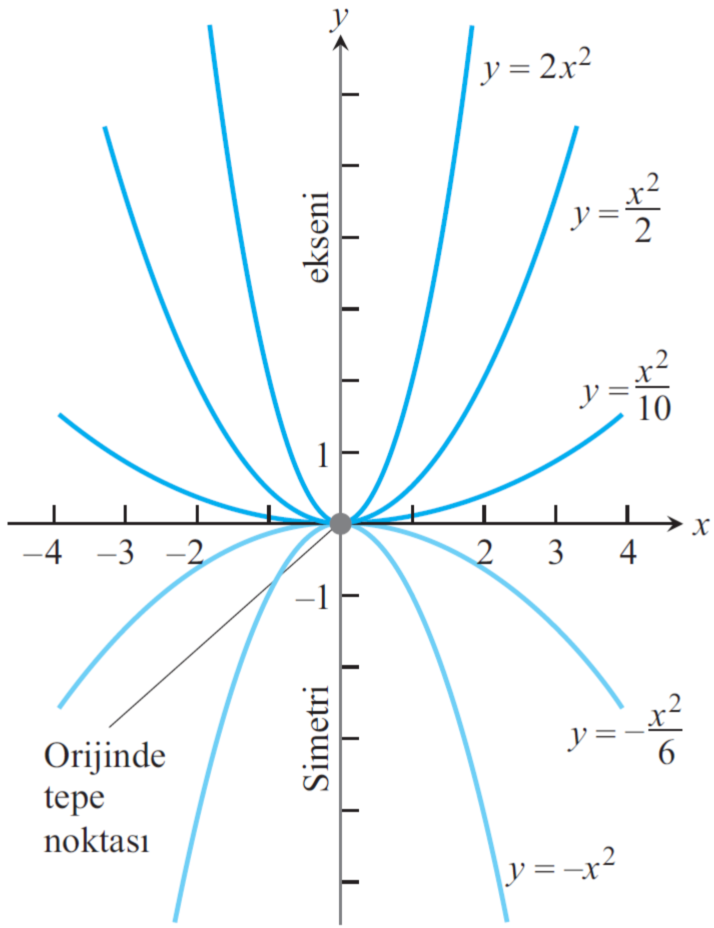
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 = r^2$$

$$r = 4 \quad h = -2 \quad k = 3$$

Paraboller:

$y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki eşitliklerin grafiklerine parabollerin grafiği denir. $y = ax^2$ şeklindeki bir denklemin grafiği ekseni(simetri ekseni) y ekseni olan bir paraboldür. Parabolün tepe noktası orjinde bulunur. $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur. $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$ parabolün ekseni $x = \dfrac{-b}{2a}$ doğrusudur. Parabolün Tepe noktası eksen ve parabolün kesiştiği noktadır.

$|a|$ sayısı büyüdükçe parabolün kolları daralır.


y
x
$y = 2x^2$
$y = \frac{x^2}{2}$
$y = \frac{x^2}{10}$
$y = -\frac{x^2}{6}$
$y = -x^2$
1
−1
−4
−3
−2
2
3
4
Simetri ekseni
Orijinde tepe noktası

Örnek:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$$

$$x = \frac{-b}{2a} = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}\cdot 1 + 1 + 4 = \frac{9}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow \; y = 4$$

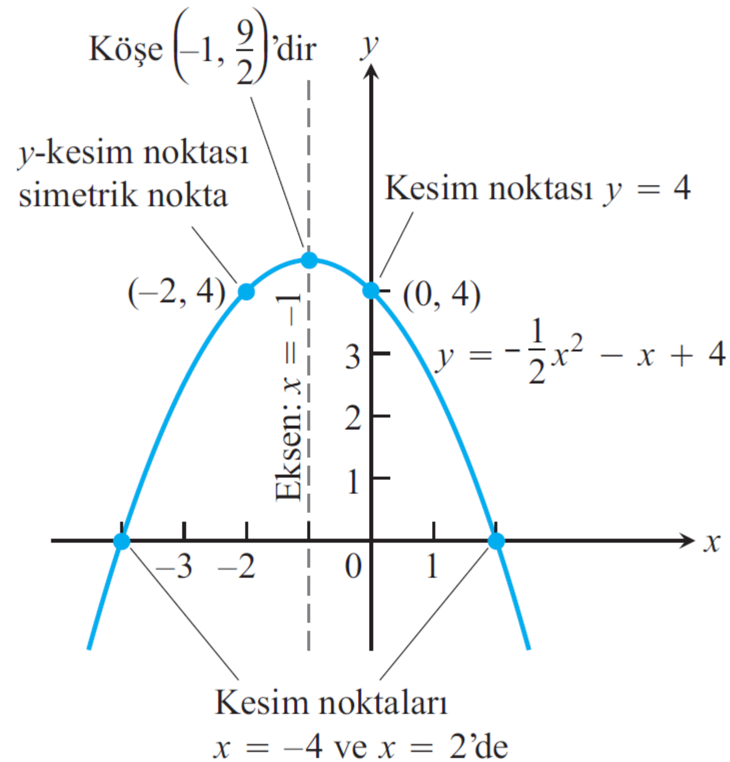
$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$

$$-x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4 \quad x = 2$$



Bu sunumun hazırlanmasında
Thomas Calculus I (Onbirinci baskı) , George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, Pearson Education Inc.
Türkçe Çeviri: Recep Korkmaz, Beta Yayınları
kitabından faydalanılmıştır.