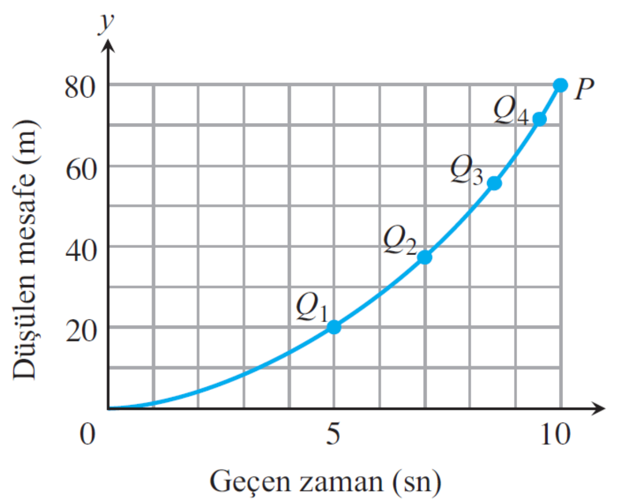
SÜREKLİLİK

Laboratuvarda üretilen veya doğadan toplanan fonksiyon değerlerini işaretlerken, işaretlenen noktaları genellikle, ölçüm yapmadığımız zamanlarda fonksiyonun değerlerinin neler olabileceğini göstermek amacıyla, kesiksiz bir eğriyle birleştiririz (Şekil 2.49). Bunu yaparken, *sürekli bir fonksiyonla*, yani değerleri verilerle sürekli olarak değişen ve aradaki değerleri almadan bir değerden diğerine atlamayan bir fonksiyonla çalıştığımızı varsayarız. Sürekli bir fonksiyonun, x bir c ye yaklaşırkenki limiti basitçe fonksiyonun c deki değeri hesaplanarak bulunabilir. (Bunun, polinomlar için doğru olduğunu Bölüm 2.2 de gördük.)

Tanım kümesi üzerinde grafiği, kalemi kaldırmadan tek bir sürekli hareketle çizilebilen herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyona bir örnektir. Bu bölümde bir fonksiyonun sürekli olmasının ne anlama geldiğini daha kesin olarak inceleyeceğiz. Ayrıca, sürekli fonksiyonların özelliklerini çalışacağız ve Bölüm 1.2 de gösterilen fonksiyon tiplerinin bir çoğunun sürekli olduklarını göreceğiz.



TANIM **Bir Noktada Sürekli**

İç nokta :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin $\boldsymbol{c}$ **iç noktasında süreklidir.**

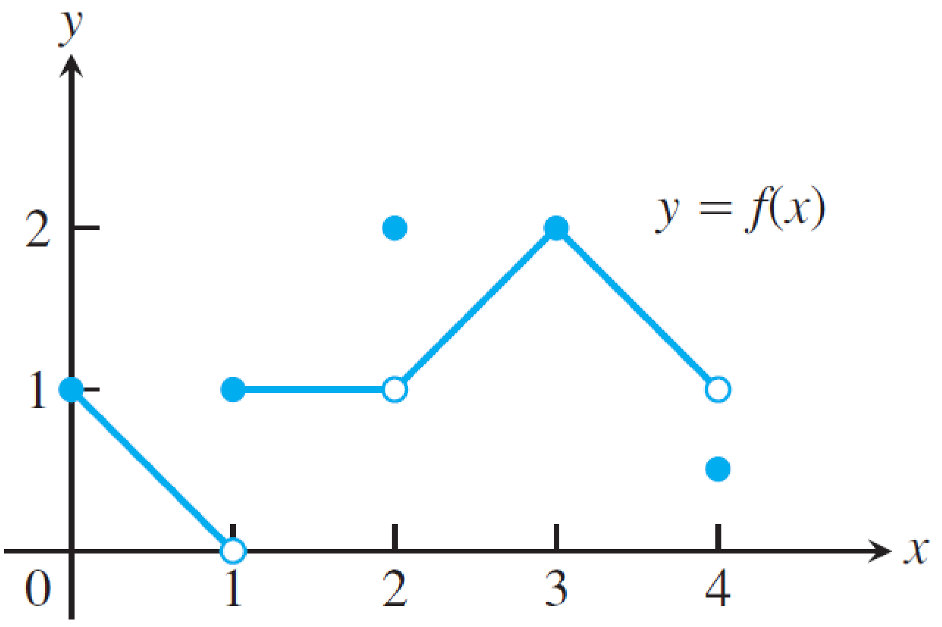
Uç nokta:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{veya} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin sırasıyla, $\boldsymbol{a}$ **sol uç noktasında süreklidir** veya $\boldsymbol{b}$ **sağ uç noktasında süreklidir.**

Bir f fonksiyonu bir c noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu c'de **süreksizdir** ve c noktası f'nin **bir süreksizlik noktasıdır** deriz. c'nin f fonksiyonunun tanım kümesinde olması gerekmediğine dikkat edin.

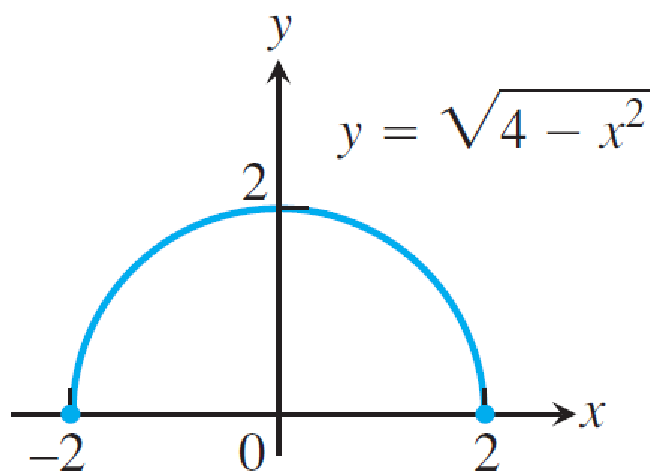
Bir f fonksiyonu için, $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon tanım aralığının $x = c$ noktasında **sağdan-sürekli**, $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon c noktasında **soldan süreklidir**. Yani bir fonksiyon, a noktasında sağdan sürekliyse, tanım kümesinin sol uç noktası a'da sürekli, b noktasında soldan sürekliyse, b sağ uç noktasında süreklidir. Tanım aralığının bir c iç noktasında sürekli olabilmesi için, c'de hem sağdan hem de soldan sürekli olması gerekir (Şekil 2.51).



ŞEKİL 2.50 Fonksiyon, [0, 4] üzerinde $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 4$ dışındaki noktalarda süreklidir (Örnek 1)

ÖRNEK 2 Tanım Kümesinin Tamamında Sürekli Bir Fonksiyon

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ tanım aralığının her noktasında süreklidir (Şekil 2.52). Bu, f'nin sağdan sürekli olduğu $x = -2$ ve soldan sürekli olduğu $x = 2$ noktalarını da içerir. ■

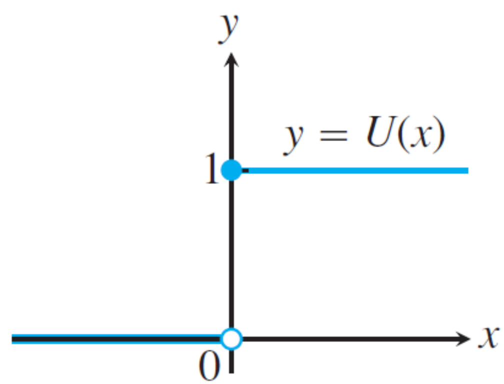


ŞEKİL 2.52 Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon (Örnek 2).

ÖRNEK 3 Birim Adım Fonksiyonunun Sıçramalı Süreksizliği Vardır

Şekil 2.53'te gösterilen $U(x)$ basamak fonksiyonu $x = 0$'da sağdan sürekli, ancak o noktada soldan sürekli veya sürekli değildir. $x = 0$'da sıçramalı süreksizliği vardır. ■

Sürekliliği bir test şeklinde özetleyebiliriz.



ŞEKİL 2.53 Orijinde sağdan sürekli fakat soldan sürekli olmayan bir fonksiyon. Burada bir sıçramalı süreksizliği vardır (Örnek 3).

Süreklilik Testi

Bir $f(x)$ fonksiyonu asağıdaki üç koşulu da sağlıyorsa, $x = c$ noktasında sürek-lidir:

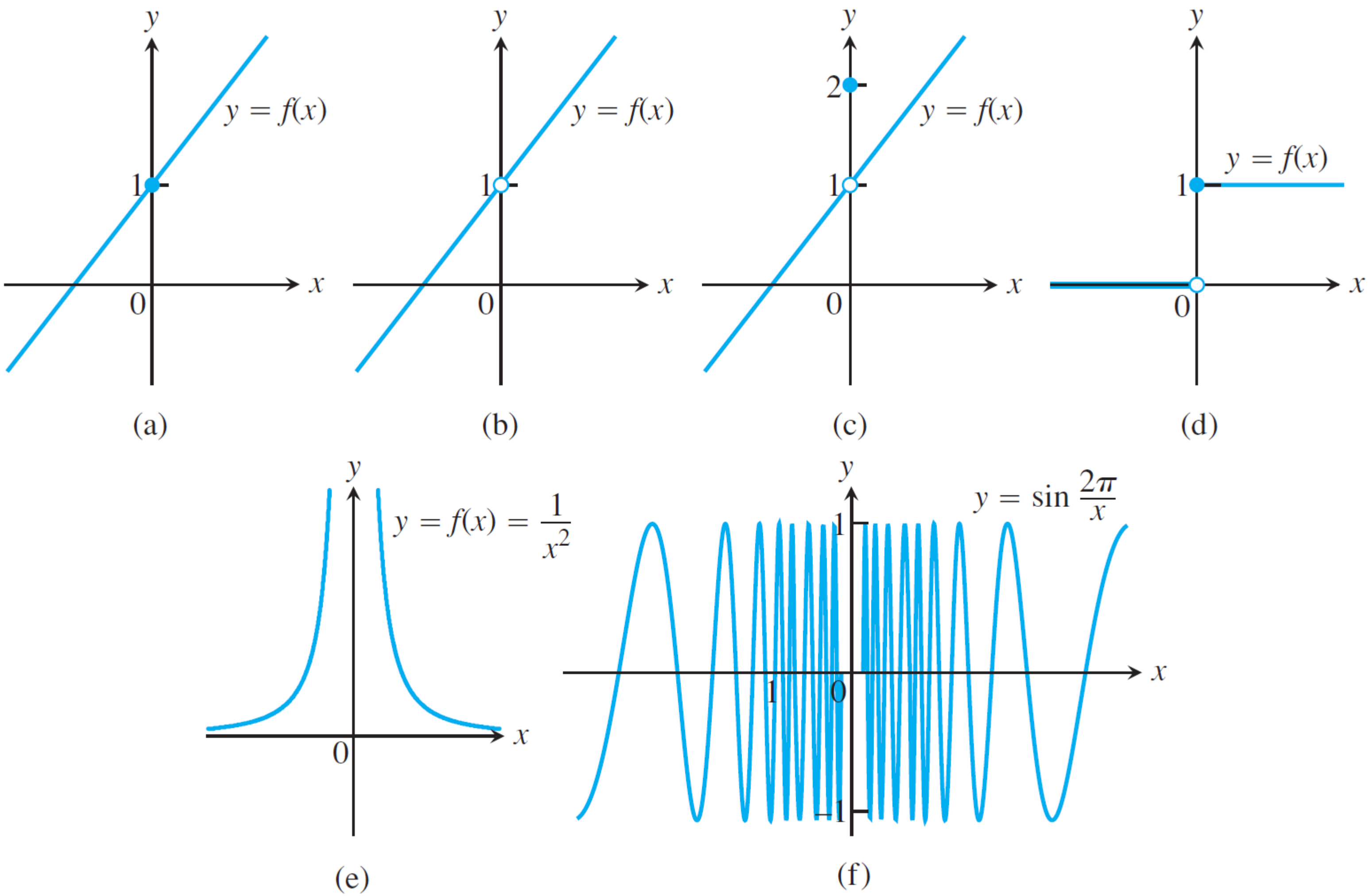
1. $f(c)$ vardır (c f'nin tanım kümesindedir)

2. $\lim_{x\to c} f(x)$ vardır ($x \to c$ iken f'nin limiti vardır)

3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (limit fonksiyon değerine eşittir)

Şekil 2.55 süreksizlik tiplerinin bir kataloğudur. Şekil 2.55a'daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir. Şekil 2.55b'deki fonksiyon için $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55c'deki fonksiyon için $f(0) = 2$ yerine $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55b ve Şekil 2.55c'deki süreksizlikler **kaldırılabilir** süreksizliklerdir. Her fonksiyonun $x \to 0$ iken bir limiti vardır ve $f(0)$'ı bu limite eşit olarak tanımlamakla süreksizliği kaldırabiliriz.

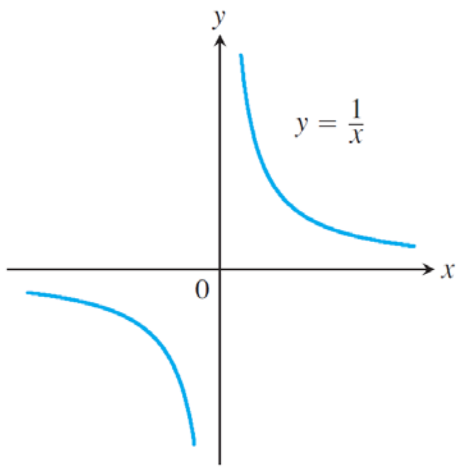
Şekil 2.55d'den f'ye kadar olan süreksizlikler daha ciddidir: $\lim_{x\to 0} f(x)$ bulunmamaktadır ve f'yi 0 da değiştirerek durumu geliştirmenin bir yolu yoktur. Şekil 2.55d deki birim adım fonksiyonunun bir **sıçramalı süreksizliği** vardır: tek taraflı limitler vardır fakat değerleri farklıdır. Şekil 2.55e'deki $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun bir **sonsuz süreksizliği** vardır. Şekil 2.55f'deki fonksiyonun bir **salınan süreksizliği** vardır: fonksiyon çok fazla salınmaktadır, dolayısıyla $x \to 0$ iken limiti yoktur.



ŞEKİL 2.55 (a) daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir; (b) den (f) ye kadar olanlar değildirler.

Sürekli Fonksiyonlar

Bir fonksiyon, ancak ve yalnız bir aralığın her noktasında sürekli ise **bu aralık üzerinde süreklidir**. Örneğin, Şekil 2.52 de çizilen yarım çember fonksiyonu, tanım kümesi olan $[-2, 2]$ aralığının her noktasında süreklidir. Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon **sürekli fonksiyondur**. Bir sürekli fonksiyon her aralıkta sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin, $y = 1/x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde sürekli değildir (Şekil 2.56), fakat $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ tanım kümesi zerinde süreklidir.



ŞEKİL 2.56 $y = 1/x$ fonksiyonu $x = 0$ dışındaki her değerde süreklidir. $x = 0$ da bir süreksizlik noktası vardır. (Örnek 5).

TEOREM 9 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

f ve g fonksiyonları $x = c$ de sürekli ise, aşağıdaki kombinasyonları da $x = c$ de süreklidir.

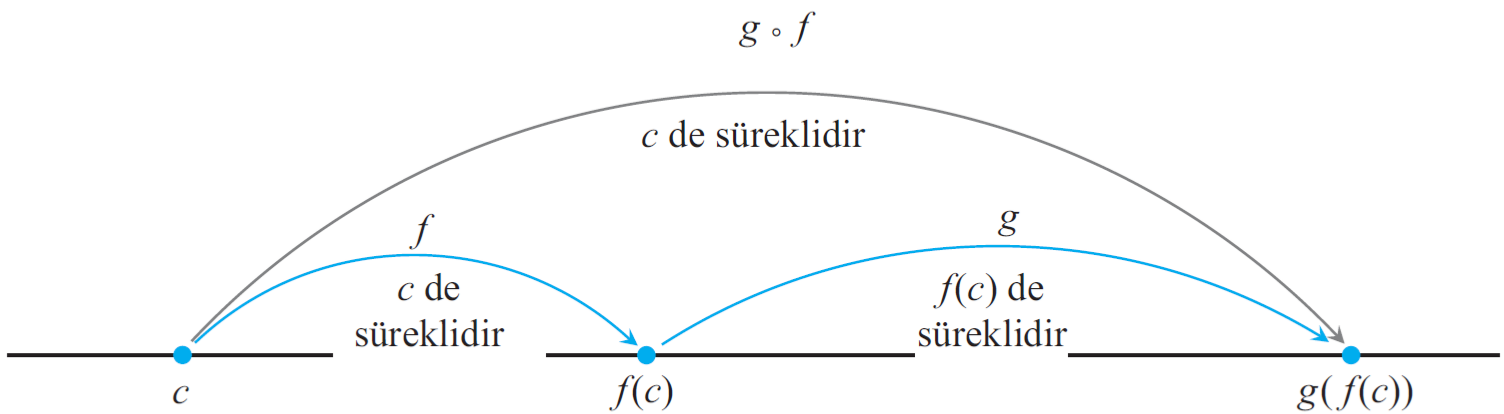
1. *Toplamlar*: $f + g$
2. *Farkları*: $f - g$
3. *Çarpımlar*: $f \cdot g$
4. *Sabite Çarpım*: $k \cdot f$ herhangi bir k için
5. *Bölümler*: f/g, $g(c) \neq 0$ olmak koşuluyla
6. *Kuvvetler*: $f^{r/s}$, r ve s tam sayılar olmak üzere, c'yi içeren bir açık aralıkta tanımlı olması koşuluyla.

ÖRNEK

$f(x) = |x|$ fonksiyonu x'in her değerinde süreklidir. $x > 0$ ise, $f(x) = x$ bir polinomdur. $x < 0$ ise, $f(x) = -x$ başka bir polinomdur. Son olarak, orijinde $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$ olur. ■

Bileşkeler

Sürekli fonksiyonların bütün bileşkeleri süreklidir. Fikir şudur: $f(x)$ $x = c$ de sürekli ise ve $g(x)$ $x = f(c)$ de sürekli ise, $g \circ f$ $x = c$ de süreklidir (Şekil 2.57). Bu durumda $x \to c$ iken limit $g(f(c))$ dir.



ŞEKİL 2.57 Sürekli fonksiyonların bileşkeleri süreklidir.

TEOREM 10 Sürekli Fonksiyonların Bileşkesi

f c'de sürekli ise ve g de $f(c)$'de sürekli ise, $g \circ f$ bileşkesi c'de süreklidir.

ÖRNEK Aşağıdaki fonksiyonların kendi tanım aralıklarında sürekli olduklarını gösterin.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ **(b)** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ **(d)** $y = \left|\dfrac{x \sin x}{x^2 + 2}\right|$

Çözüm

(a) Karekök fonksiyonu üzerinde süreklidir çünkü $[0, \infty)$ sürekli birim $f(x) = x$ fonksiyonunun bir rasyonel kuvvetidir (Teorem 9 Bölüm 6). Verilen fonksiyon $f(x) = x^2 - 2x - 5$ da polinomu ile $g(t) = \sqrt{t}$ karekök fonksiyonunun bileşkesidir.

(b) Pay, birim fonksiyonun bir rasyonel kuvvetidir; payda heryerde pozitif bir polinomdur. Bu nedenle, bölüm süreklidir.

(c) $(x - 2)/(x^2 - 2)$ oranı her $x \neq \pm\sqrt{2}$, için süreklidir ve verilen fonksiyon bu oranla sürekli olan mutlak değer fonksiyonunun bileşkesidir (Örnek 7).

(d) Sinüs fonksiyonu her yerde sürekli olduğundan (Alıştırma 62), pay'daki terimi $x \sin x$ sürekli fonksiyonların çarpımıdır ve paydadaki $x^2 + 2$ terimi her yerde pozitif olan bir polinomdur. Verilen fonksiyon, sürekli fonksiyonların bir oranı ile sürekli olan mutlak değer fonksiyonunun bileşkesidir (Şekil 2.58). ■

Teğetler ve Türevler

Bir Eğrinin Teğeti Nedir?

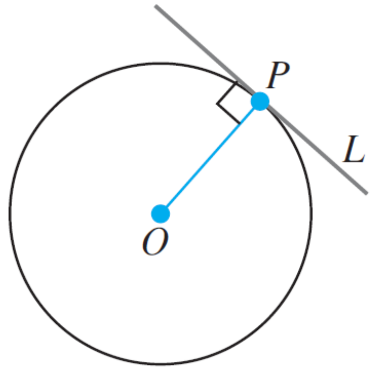
Çemberler için teğet kavramı açıktır. Bir L doğrusu çemberin bir P noktasından P'deki yarıçapa dik olarak geçiyorsa, L çembere P'de teğettir (Şekil 2.63). Böyle bir doğru çembere sadece dokunur. Fakat bir L doğrusunun baska bir C eğrisine bir P noktasında teğet çembere sadece *dokunur*. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet olması ne demektir? Çemberin geometrisinden genelleştirerek, bunun aşağıdakilerden biri anlamına geldiğini söyleyebiliriz.

1. L doğrusu P'den, P ile C'nin merkezini birleştiren doğruya dik olarak geçer.

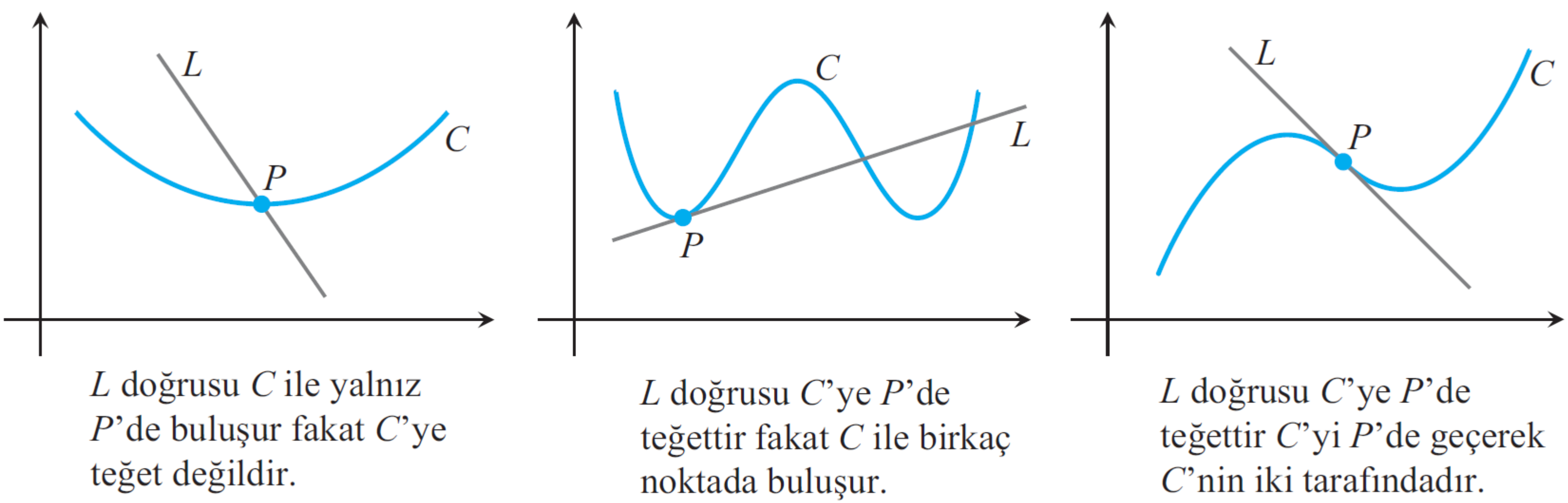
2. L doğrusu C'nin tek bir noktasından, yani P'den geçer.

3. L doğrusu P'den geçer ve C'nin sadece bir tarafında bulunur.

Bu ifadeler, C bir çemberse geçerliyken, daha genel eğriler için hiçbiri tutarlı olarak çalışmaz. Çoğu eğrinin bir merkezi yoktur ve teğet olarak adlandırmak istediğimiz bir doğru C'yi başka noktalarda kesebilir veya teğet noktasında C'yi kesebilir (Şekil 2.64).



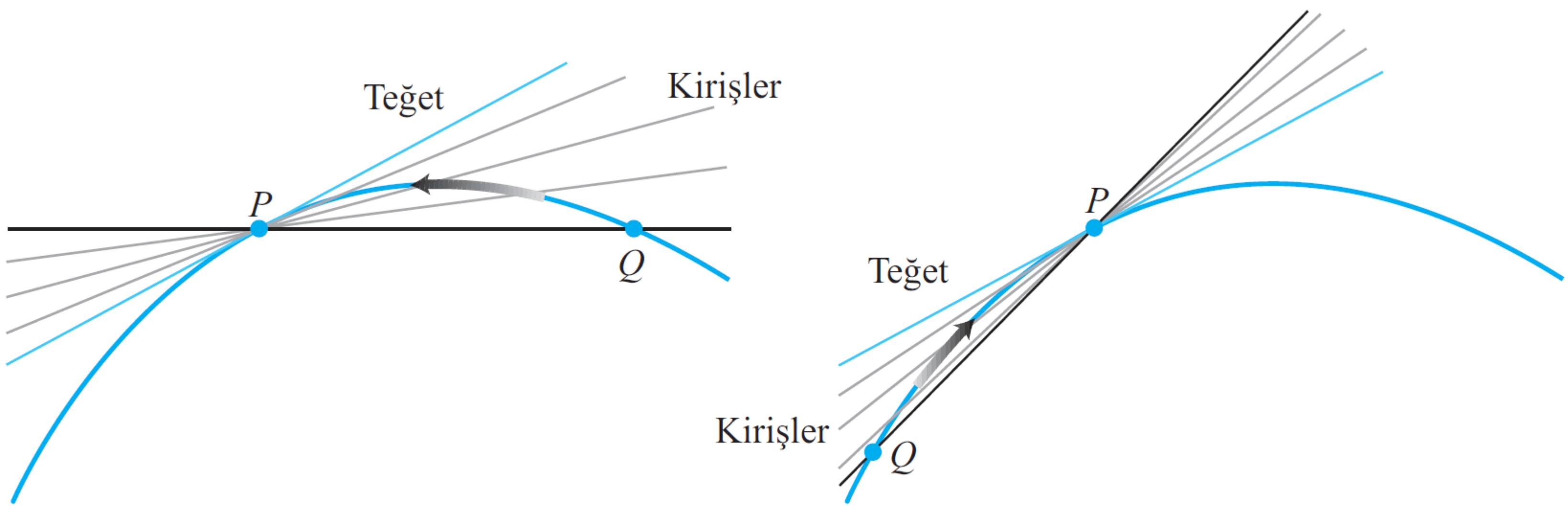
ŞEKİL 2.63 L doğrusu, P'den OP yarıçapına dik olarak geçerse çembere teğettir.



ŞEKİL 2.64 Teğet doğrular hakkında söylenenlerin doğrulanmaması

Genel eğrilerde teğet kavramını tanımlamak için, P'den ve eğri üzerinde giderek P'ye yaklaşan Q noktalarından geçen kirişleri de göz önüne alan dinamik bir yaklaşıma gerek vardır (Şekil 2.65). Bu yaklaşım şöyledir:

1. *Hesaplayabildiklerimizle*, yani PQ kirişinin eğimiyle işe başlarız.
2. Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken kiriş eğiminin limitine bakarız.
3. Limit varsa, bunu eğrinin P noktasındaki eğimi olarak alır ve eğrinin P noktasındaki teğetini P'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.



ŞEKİL 2.65 Teğet kavramına dinamik yaklaşım. Eğrinin P noktasındaki teğeti, eğimi $Q \to P$ ikenki kiriş eğimlerinin limiti olan, P'den geçen doğrudur.

ÖRNEK

$y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulun. Parabolün bu noktadaki teğetinin denklemini yazın.

Çözüm $P(2, 4)$ ve yakınındaki $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ noktalarından geçen bir kirişle işe başlarız. PQ kirişinin eğimi için bir ifade bulur ve Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken ne olduğuna bakarız.

$$\text{Kiriş eğimi} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

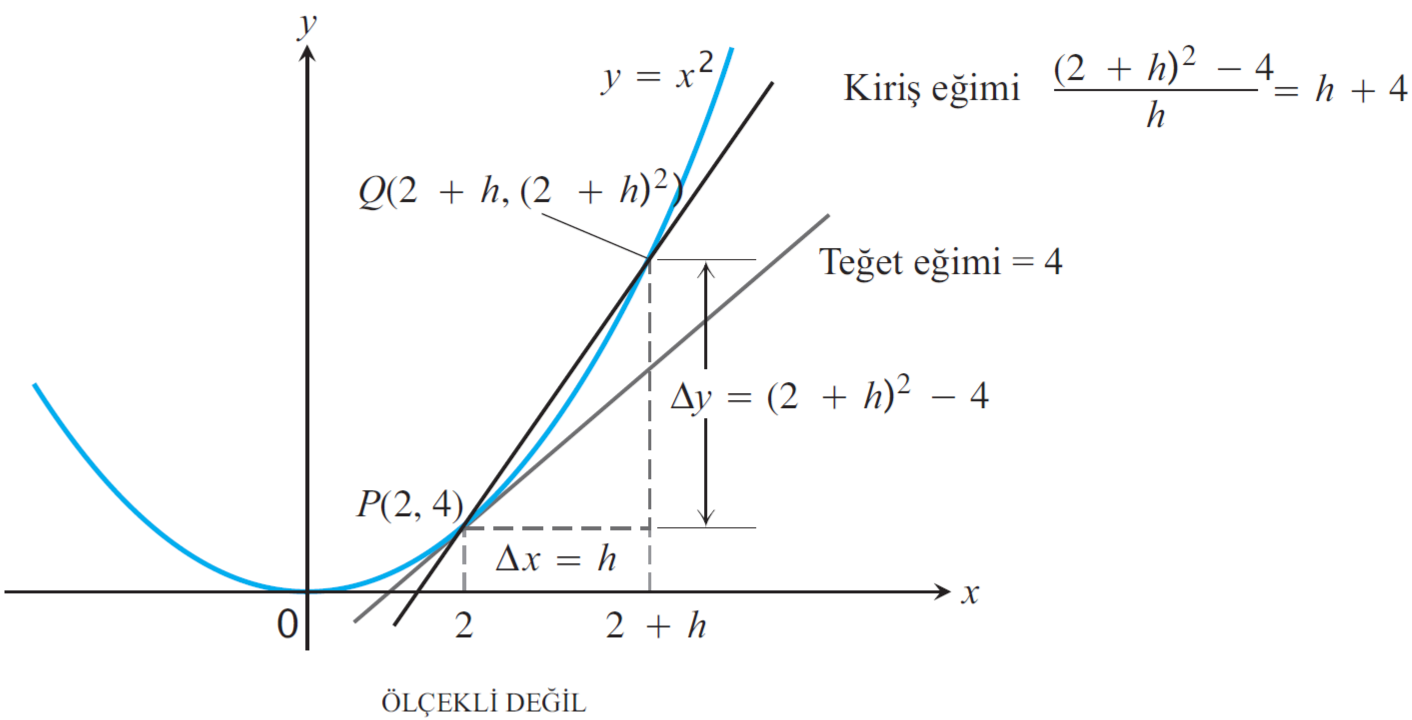
$h > 0$ ise, Q P'nin üst sağ tarafında bulunur (Şekil 2.66). $h < 0$ ise, Q P'nin sol tarafında bulunur (gösterilmemiştir). Her iki durumda da, Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken, h sıfıra ve kiriş eğimi 4'e yaklaşır:

$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Parabolün P noktasındaki eğimini 4 olarak alırız.

Parabolün P'deki teğeti, P'den 4 eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Nokta-eğim denklemi}$$
$$y = 4x - 4.$$



ŞEKİL 2.66 $y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulunması (Örnek 1).

Bir Fonksiyonun Grafiğinin Teğetini Bulma

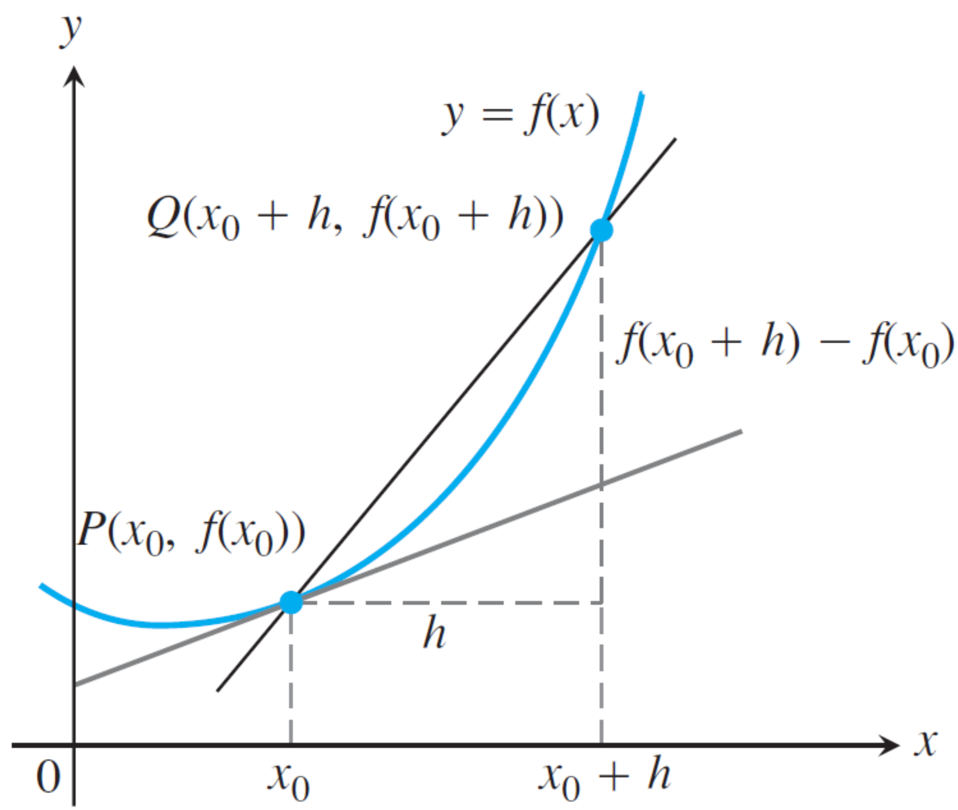
Bir eğriye teğet bulma problemi, onyedinci yüzyıl başlarının başlıca matematik problemi idi. Optikte, bir ışık ışınının eğrisel bir merceğe girdiği açıyı teğet belirliyordu. Mekanikte, hareket eden bir cismin, yolu boyunca her noktadaki yönünü teğet belirliyordu. Geometride, iki eğrinin kesim noktasındaki teğetleri eğrilerin hangi açı ile kesiştiklerini belirliyordu. Herhangi bir $y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetini bulmak için, aynı dinamik yöntemi kullanırız. P'den ve bir $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktasından geçen kirişin eğimini hesaplarız ve $h \to 0$ iken eğimin limitini buluruz (Şekil 2.67). Limit varsa, buna eğrinin P'deki eğimi deriz ve P'deki teğeti P'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.

TANIMLAR **Eğim, Teğet Doğru**

$y = f(x)$ **eğrisinin** $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(limitin olması koşuluyla)}$$

sayısıdır. Eğrinin P'deki **teğeti** ise, P'den bu eğimle geçen doğrudur.



ŞEKİL 2.67 P deki teğet doğrunun eğimi $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 'dir.

$y = f(x)$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki teğetinin bulunması

1. $f(x_0)$ ve $f(x_0 + h)$'ı hesaplayın.

2. Eğimi hesaplayın

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. Limit varsa, teğeti

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

olarak bulun.

ÖRNEK (a) $y = 1/x$ eğrisinin $x = a \neq 0$'daki eğimini bulun.

(b) Eğim nerede $-1/4$ olur?

(c) a değiştikçe, $(a, 1/a)$) noktasında eğrinin teğetine ne olur?

Çözüm

(a) Burada, $f(x) = 1/x$'tir. $(a, 1/a)$'daki eğim ise

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

olarak bulunur. $h = 0$ yazıp limiti hesaplayabileceğimiz son adıma gelene kadar her satırın başında "$\lim_{h\to 0}$" yazmak zorunda olduğumuza dikkat edin. a sayısı pozitif veya negatif olabilir fakat sıfır olamaz.

(b) $x = a$ olduğu noktada $y = 1/x$y'in eğimi $-1/a^2$'dir.

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

ise, eğim $-1/4$ olacaktır. Bu denklem $a^2 = 4$, yani $a = 2$ veya $a = -2$'ye denktir. $(2, 1/2)$ ve $(-2, -1/2)$ noktalarında eğrinin eğimi $-1/4$'tür (Şekil 2.68).

(c) $a \neq 0$ ise $-1/a^2$ eğimi her zaman negatiftir. $a \to 0^+$ iken, eğim $-\infty$'a yaklaşır ve teğet giderek dikleşir (Şekil 2.69). $a \to 0^-$ iken de bunu görürüz. a orijinden uzaklaştıkça, eğim 0^-'ye yaklaşır ve teğet yatay hale gelir. ■