

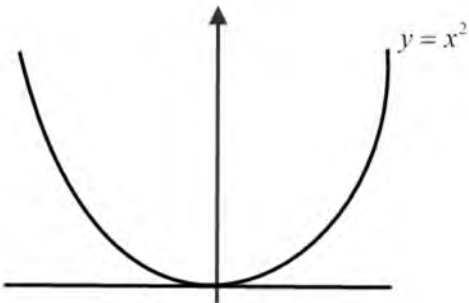


TÜREV UYGULAMALARI



Ekstreмум Noktaları:

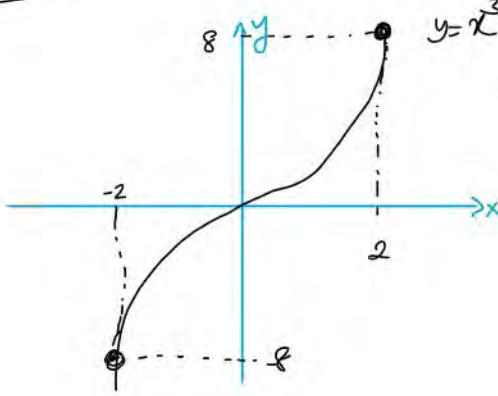
Tanım : f tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun bu durumda D kümesindeki $\forall x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa f fonksiyonunun D üzerinde mutlak minimum değeri vardır denir.



$x = 0$ $y = 0$
mutlak min.

Tanım: Bir f fonksiyonunun tanım aralığının c iç noktasında c noktasını içeren bir açık aralıktaki her x için $f(x) \geq f(c)$ ise bir yerel minimum değeri vardır. $f(x) \leq f(c)$ olması durumunda ise bir yerel max değeri vardır denir.

Örnek: $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $y = x^3$ fonksiyonunun aldığı en büyük ve en küçük değeri bulunuz.

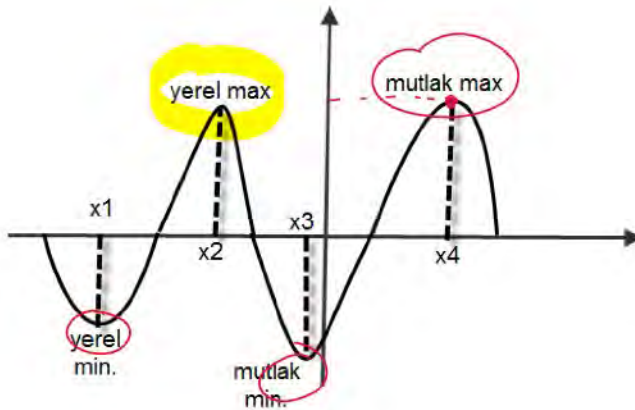


$$x=2, \text{ mutlak max} = 8$$

$$x=-2, \text{ mutlak min} = -8$$

$$\{f'(x) = 0\} \quad (\text{Kritik nokta})$$

Tanım: Bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin, $f'(x)$ türevinin 0 veya tanımsız olduğu bir iç noktası $f(x)$ fonksiyonunun bir kritik noktasıdır. Kapalı sonlu bir aralıkta sürekli bir $f(x)$ fonksiyonun mutlak ekstremum noktalarını bulmak için bütün kritik ve uç noktalardaki fonksiyonun değerini hesaplayın bu değerlerin en büyüğü mutlak max, en küçüğü mutlak min. noktasıdır.



Teorem: Tanım aralığının her bir c noktasında $f(x)$ fonksiyonunun bir yerel maksimum veya minimum varsa ve c noktasında tanımlanıyorsa $f'(c) = 0$ dir. ***

Örnek:

$y = x^3$ ^{fonk.}, $[-2, 2]$ aralığında aldığı en büyük ve en küçük değeri bulunuz

$$y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

kritik nokta

$$\left. \begin{array}{l} y|_0 = 0 \\ y|_{-2} = -8 \\ y|_2 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mutlak min} \\ \text{mutlak max} \end{array}$$

Örnek:

$y = 8x - x^4$, $[-2, 1]$ aralığında aldığı en büyük ve en küçük değeri bulunuz

$$y' = 8 - 4x^3 = 0$$

$$4x^3 = 8$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2} \rightarrow \text{kritik nokta}$$

$\sqrt[3]{2} \notin [-2, 1]$ değeri kabul olmaz

$$y(1) = 8 - 1 = 7 \rightarrow \text{mutlak max}$$

$$y(-2) = -16 - 16 = -32 \rightarrow \text{mutlak min}$$

Örnek:

$y = \sqrt[3]{x}$, $[-1, 1]$ aralığında aldığı en büyük ve en küçük değeri bulunuz

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ kritik nokta}$$

$$y'|_0 = \text{tanımsız}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} y|_0 = 0 \\ y|_1 = 1 \\ y|_{-1} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mutlak max} \\ \text{mutlak min.} \end{array}$$

Teorem(Rolle Teoremi): $y = f(x)$ fonksiyonun $[a, b]$ kapalı aralığın her noktasında sürekli ve (a, b) aralığın her noktasında türevlenebilir olduğunu varsayalım. $f(a) = f(b)$ ise (a, b) , $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

Örnek $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ fonksiyonun Rolle teoremini gerçeklediğini gösteriniz

$$f(0) = f(1) \quad ?$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = f(1) \quad \checkmark$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1) \Rightarrow \boxed{c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$f'(c) = 0$$

Teorem (Ortalama Değer Teoremi):

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda (a, b) aralığında $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

$$f(a) = f(b), \quad f'(c) = 0$$

Örnek: $f: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonu ortalama değer teoremi gerçekleştirdiğini gösteriniz ve c sayısını bulunuz?

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \quad \checkmark$$

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

$$\boxed{c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)} \quad \checkmark$$

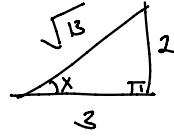
Örnek: $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ fonksiyonun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki en büyük değerini bulunuz?

$$y' = 2 \cos x - 3 \sin x = 0$$

$$2 \cos x = 3 \sin x$$

$$\tan x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

Kritik nokta



$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos x = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow \text{Kritik noktada aldığı değer.}$$

$$x=0, \quad y = 2 \sin 0 + 3 \cos 0 = 3$$

$$x=\frac{\pi}{2}, \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2} = 2$$

$$\sqrt{13} > 3 > 2$$

max değer

Tanım: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de herhangi 2 nokta olsun

$$x_1 < x_2 \text{ iken } f(x_1) < f(x_2) \quad f, I \text{ 'da artar}$$

$$x_1 < x_2 \text{ iken } f(x_1) > f(x_2) \quad f, I \text{ 'da azalır}$$

Artan azalan fonksiyonlara **monoton** fonksiyon denir.

Sonuç: f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun,

$\forall x \in (a, b)$ değeri için

$$f'(x) > 0 \quad f \rightarrow \text{artan}$$

$$f'(x) < 0 \quad f \rightarrow \text{azalan}$$

fonksiyondur.

YEREL EKSTREMUM DEĞERLER İÇİN 1. TÜREV TESTİ

c 'nin sürekli bir f fonksiyonunun kritik noktası olduğunu ve I 'nin c 'yi içeren bir aralığın her noktasında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Soldan sağa doğru c 'den geçerken,

1) f' , c 'de negatiften pozitifte değişiyorsa c 'de yerel min değeri vardır.

2) f' , c 'de pozitiften negatife değişiyorsa f 'nin c 'de bir yerel max değeri vardır.

3) f' c 'de işaret değişmiyorsa yerel ekstremum değeri yoktur.



Tanım: Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği;

1) Bir I aralığı üzerinde f' artan ise yukarı konkav,

2) Bir I aralığı üzerinde f' azalan ise aşağı konkav denir.

$f'(x) > 0 \rightarrow$ fonk. artan

$f'(x) < 0, \rightarrow$ fonk. azalan

Konkavlık İçin İkinci Türev Testi

$y = f(x)$ bir I aralığında iki kere türevlenebilir olsun;

1) I üzerinde $f'' > 0$ ise f 'in I 'daki grafiği yukarı konkav,

2) I üzerinde $f'' < 0$ ise f 'in I 'daki grafiği aşağı konkavdır.

$$f'(x) = \checkmark$$



Tanım: Bir fonksiyonun teğetinin bulunduğu ve konkavlığın değiştiği noktaya büküm noktası denir.

Teorem: f' 'nin $x=c$ yi içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu varsayalım;

- 1) $f'(c)=0$ ve $f''(c)<0$ f 'in $x=c$ de bir yerel maksimumu vardır.
- 2) $f'(c)=0$ ve $f''(c)>0$ f 'in $x=c$ de bir yerel minimumu vardır.
- 3) $f'(c)=0$ ve $f''(c)=0$ ise bir şey SÖYLEYEMEYİZ!

ÖRNEK: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$16 - 32 + 5$$

$$81 - 108 + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 12) = 0$$

$$x=0, \quad x=3$$

çift kök

x	0	3
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

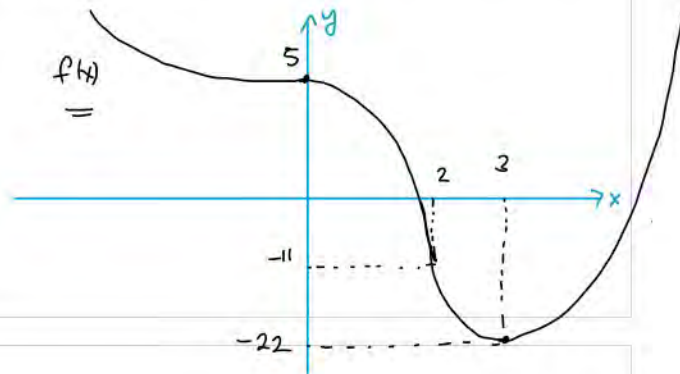
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$$

$$x(12x - 24) = 0$$

$$x=0, \quad x=2$$

x	0	2
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	Y.L	A.L

x	-∞	0	2	3	∞
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∞	5	-11	-22	∞
		Y.L	A.L	Y.L	



FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için:

FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için;

1) Fonksiyonun tanım kümesi ve varsa simetriği bulun. ✓

2) y' ve y'' bulun. ✓

örnek 3) Fonksiyonun kritik noktalarını bulun ve her birinde fonksiyonun davranışını belirleyin. ✓

4) Eğrinin nerede arttığını ve nerede azaldığını bulun. ✓

5) Varsa büküm noktalarını bulun ve eğrinin konkavlığını belirleyin.

6) Asimtotları belirleyin. ✓

7) Eksenlerin kesim noktasının ve kritik noktalarının bulunduğu bir tablo yapın ve bu tabloya göre eğriyi çizin.

ÖRNEK: $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

① $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$, T.A = 2 - 2 2 3

Tanım aralığı

② Asimtotlar

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} y = \lim_{x \rightarrow a^-} y = \pm \infty , x = a \text{ dikey asimtot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b , y = b \text{ yatay asimtot}$$

$f(x)$ 'in derecesi $g(x)$ 'in derecesinden bir büyük ise eğik asimtot.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty , \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty , \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty , \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0 , \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0 , y = 0 \text{ yatay asimtot.}$$

③ Eksenleri kestiği yer

$$x = 0 , y = -\frac{1}{4} \checkmark$$

$$y \neq 0$$

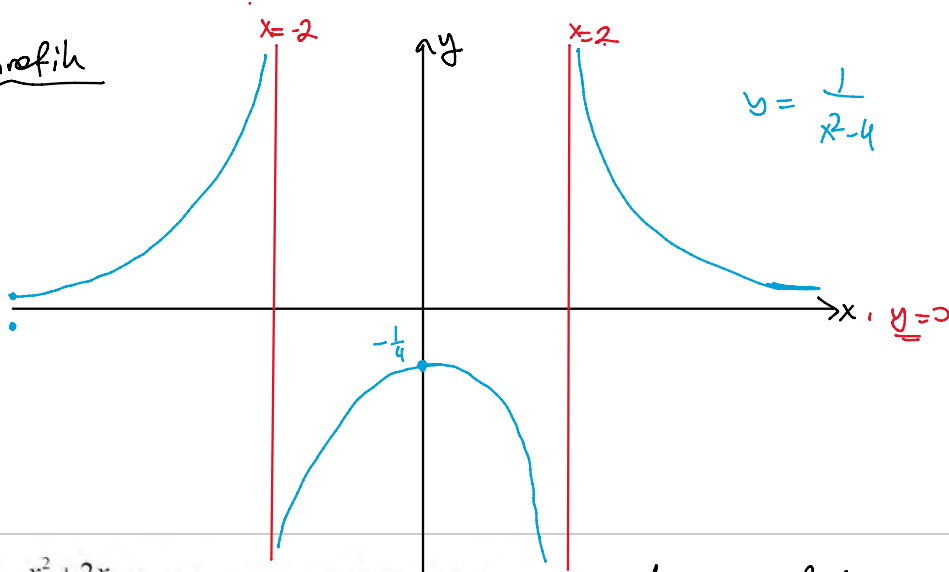
④ Fonksiyonun artan ve azalan aralıkları

$$y' = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0, \quad x=0, \text{ kritik nokta } \checkmark$$

⑤ Tablo

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$y = f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	0	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	0

⑥ Grafik



ÖRNEK: $y = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1. Tanım aralığı
2. Asimtotlar
3. Eksenleri kesiştiği yer

4. Artan - Azalan
5. Tablo
6. Grafik

① $x+1=0, \quad x=-1$

$TA = 2 - 1 - 13$

② $x=-1$ dikey asimtot

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 1$

$y=1$ yatay asimtot $\checkmark$

③ $x=0, \quad y=0$

$y=0, \quad x^2+2x=0, \quad x=0, \quad x=-2$

④ $y' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(\cancel{x^2+2x+1} - \cancel{x^2-2x})}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$

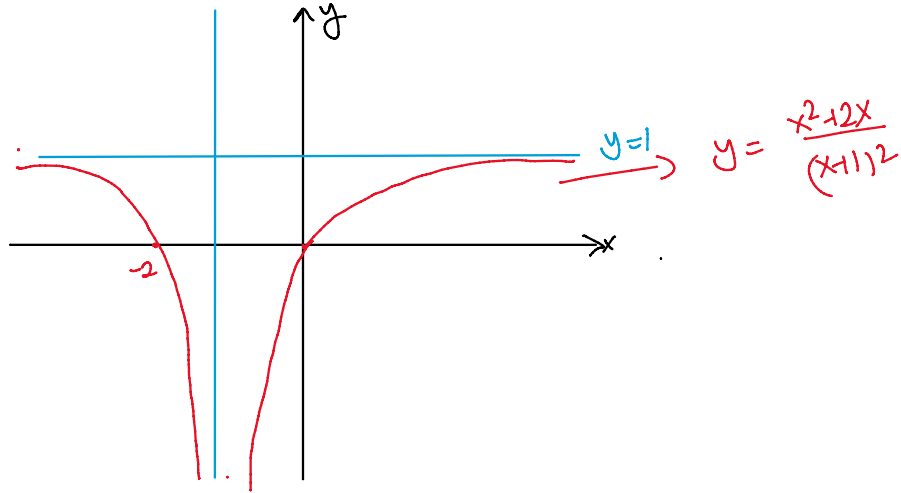
$$(4) y' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(\cancel{x^2+2x+1} - \cancel{x^2-2x})}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$$

↓
 $x+1=0$
 $x=-1$
 kritik nokta

(3)

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+	+
$f(x)$		↘	↘	↗	↗
	1	0	$-\infty$	0	1

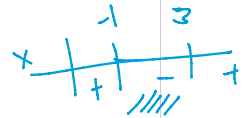
(6)



ÖRNEK: $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(1) $x=0, x=2, TA = 2 - \{2\}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x-3)(x+1) = 0$
 $x_1 = 3, x_2 = -1$



(2) $x=2$ dikey asimptot

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} = -\infty$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} = \infty$

Fayın derecesi paydaın derecesinden bir büyük

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 \div x - 2 \\ x^2 - 2x \\ \hline -3 \end{array}$$

 $\rightarrow y = x$ eğik asimptot

(3) $x=0, y = \frac{3}{2}$

$y=0, x^2 - 2x - 3 = 0, x = -1, x = 3$

(4) $y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x - 3)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2 + 2x + 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2} = 0$

$$(4) \quad y'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x-3)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x+3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+7}{(x-2)^2} = 0$$

forbiden her positiv

(5)

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	0

