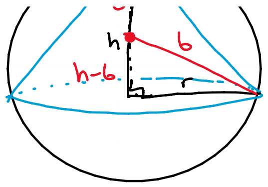

$$r^2+(h-6)^2=6^2$$

$$r^2+h^2-12h+36=36$$

$$r^2+h^2-12h=0$$

$$\boxed{r^2=12h-h^2}$$

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi.(12h-h^2).h$$

$$\boxed{V(h)=\frac{\pi}{3}(12h^2-h^3)}$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}(24h-3h^2)=0$$

$$24h-3h^2=0 \Rightarrow h(24-3h)=0$$

$$\cancel{h=0},\quad h=8$$, Kritik nokta

$$V''(h)=\frac{\pi}{3}(24-6h)$$

$$V''(8)=\frac{\pi}{3}(24-48)=-8\pi<0,\ \text{max}$$

$$V(8)=\frac{\pi}{3}(12.64-512)=\frac{256\pi}{3}\ br^3$$

BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki limiti araştırılırken belirsiz şekiller denilen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ ifadelerinden biriyle karşılaşabiliriz. Bu tip limitler türev yardımıyla hesaplanabilirler.

0/0 Belirsizlik Hali:

Teorem: (L' Hopital Kuralı) f ve g, a noktasında sürekli ve a noktası civarında türevlenebilir iki fonksiyon ve her x için $g'(x) \neq 0$ olsun. Eğer

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ise;

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur.}}$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{2x^2-3x+1}=?$ $\dfrac{\ln 1}{2-3+1}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$\lim_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(2x^2-3x+1)'}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{4x-3}=\dfrac{1}{1}=1$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=?$ $\dfrac{0-\sin 0}{0^3}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$\lim_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1-\overset{1}{\cos 0}}{3.0^2}=\dfrac{0}{0}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{1}{6}\underbrace{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}_{1}$

$=\dfrac{1}{6}$

Sonuç: f ve g fonksiyonları bir M reel sayısından büyük her x noktasında türevlenebilir olsun. Ayrıca

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0}$$

ve $\forall x>M$ için $g(x)\neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(1/x)}{\frac{x}{1+x^2}}=?$ $\quad \frac{\sin\left(-\frac{1}{\infty}\right)}{\frac{-\infty}{1+(-\infty)^2}}=\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{(1+x^2)^2}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-x^4}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\cancel{x^4}\left(1+\underbrace{\cancel{\frac{2}{x^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{x^4}}}_{0}\right)}{\cancel{x^4}\left(\underbrace{\cancel{\frac{1}{x^2}}}_{0}-1\right)}$$

$$=\frac{-1}{-1}=1$$

∞/∞ **Belirsizlik Hali:**

Bu belirsizlik halinde de L'Hopital kuralı geçerlidir. Çünkü

$$\infty\leftarrow\frac{u}{v}=\frac{\frac{1}{v}\to0}{\frac{1}{u}\to0}\qquad\checkmark$$
$$\infty\leftarrow v$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür

$$\ln 0 = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = ?\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ ✓ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\sin x))'}{(\ln(\tan x))'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{\cancel{\tan x}}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = 1 \,//$$

$0.\infty$ Belirsizlik Hali:

$$\overset{0\,\infty}{u.v} = \frac{\overset{0}{u}}{\frac{1}{\underset{\infty\,0}{v}}}$$ eşitliği yardımıyla $0.\infty$ belirsizliği $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ haline getirilebilir.

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot x = ?$ $\quad (1-\cos 0).\cot 0 = 0.\infty$ belirsizliği var.

$$= \lim_{x\to 0} (1-\cos x).\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x).\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ (belirsizliği)}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \,//$$

∞-∞ Belirsizlik Hali:

$$\frac{u-v}{\frac{u\cdot\cancel{v}}{\frac{1}{\cancel{u\cdot v}}}} = u-v$$

Bu belirsizlik hali $u - v = \dfrac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u.v}}$ eşitsizliği yardımıyla $\dfrac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürülebilir.

$\infty \quad \infty \quad 0 \quad 0 \quad \frac{0}{0}$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right) = ?$ $\quad \cot 0 - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ belirsizliği var

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \frac{0.\cos 0 - \sin 0}{0\sin 0} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{\sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

0^0, ∞^0, 1^∞ Belirsizlik Hali:

x sonlu bir değere veya sonsuz değerlerine yaklaştığında $y = [u(x)]^{v(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = v(x)\ln(u(x))$$

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

eşitliği elde edilir. Sağdaki ifadenin limiti $0.\infty$ belirsizliğine sahip olur. Bu limit bilinen yolla hesaplanır. Sonuç olarak limitin çözümü,

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}[v(x).\ln(u(x))] = \lambda$$

$\lim(\ln) = \ln(\lim)$

olarak bulunarak

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lambda \quad \to \quad \boxed{\lim_{x\to 0} y = e^{\lambda}}$$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-e^x)^{\sin x} = ?$ $\quad (1-e^0)^{\sin 0} = 0^0$ belirsizliği var.

$$y = (1-e^x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln(1-e^x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x\left[\ln(1-e^x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0^-}(\ln y) = \lim_{x\to 0^-}\left(\sin x\left[\ln(1-e^x)\right]\right) \quad (0.\infty) \text{ belirsizliği var}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-e^x)}{\frac{1}{\sin x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{e^x}{1-e^x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1-e^x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{\cos x}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{1-e^x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x.\cos x}{-e^x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}(\ln y) = 0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^-} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} y = e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^{\sin x} = 1}$$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = ?$ $\quad (\infty^0)$ belirsizliği var.

$$y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln(\cot x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)\right] \quad (0\,\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right] \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}\cdot x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{\sin^{\cancel{2}} x}}{\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}}\cdot x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sin x.\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x}}_{1}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln y) = -1$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^{-1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}}$$