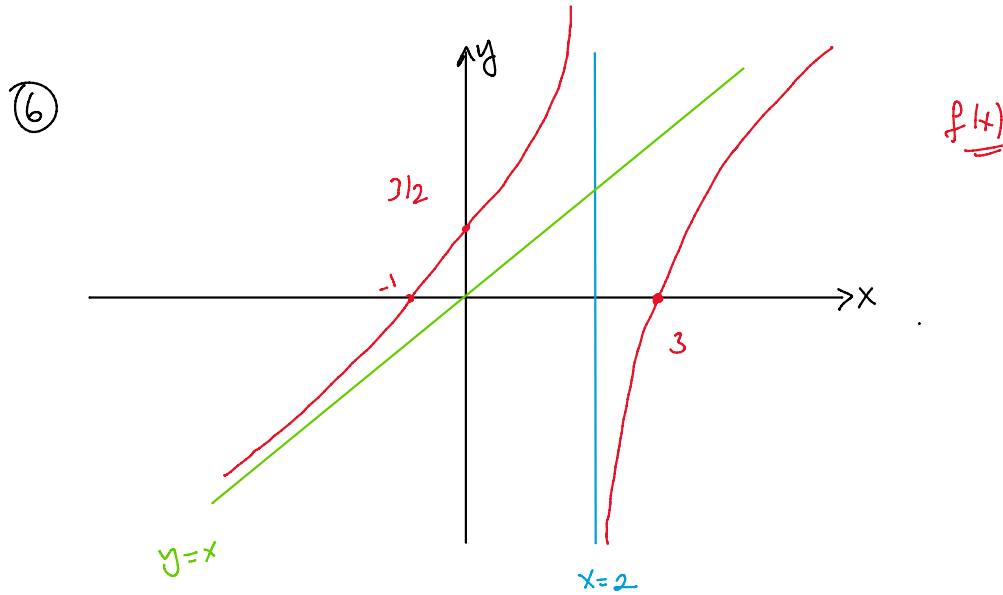


(5)

x						
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	0

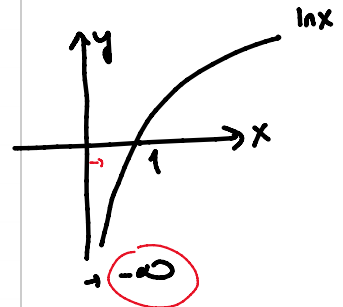


ÖRNEK: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(1) $\frac{x-1}{x+1} > 0$, $x-1=0$, $x+1=0$
 $x=1$, $x=-1$

x	-1	1	
$x-1$	-	0	+
$x+1$	-	0	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	-	+

$TA = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



(2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1}\right) = \infty$

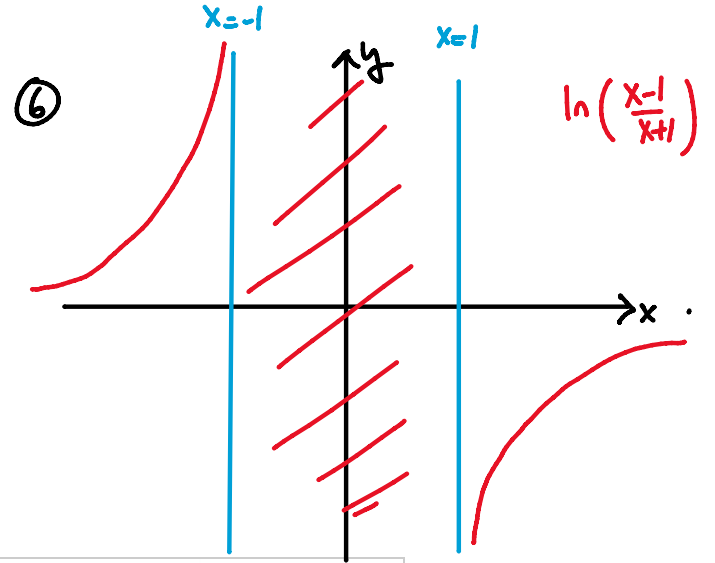
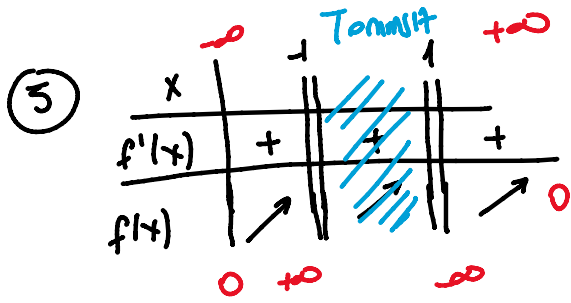
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$

$x=-1$, $x=1$, dikey asimtot.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$, $y=0$, yatay asimtot.

(3) $x \neq 0$, $y=0$, $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$, $\frac{x-1}{x+1}=1$, $x-1=x+1 \Rightarrow y \neq 0$
 $\therefore \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$

$$(4) \quad y' = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0$$



OPTİMİZASYON (MAX-MİN) PROBLEMLERİ

Bir optimizasyon problemini çözmek için;

- 1) Problemden verilenler değişkenlerle gösterilir. ✓
- 2) Maksimum yada minimum olması istenen çoklukla ilgili bir ifade bulunur. ✓
- 3) Verilenler kullanılarak bazı değişkenler yok edilir. Tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.
- 4) Probleme göre değişkenin sınırları tespit edilir. $f(x)$
- 5) Kritik noktalar bulunur. ✓ $f'(x) = 0$ ✓
- 6) Fonksiyonun kritik noktalardaki ve uç noktalardaki değerleri bulunur. Bu değerlerin en büyüğü fonksiyonun en büyük değeri, en küçüğü ise fonksiyonun en küçük değeridir.

$$f''(a) > 0, \text{ min}$$

$$f''(a) < 0, \text{ max}$$

ÖRNEK: Toplamları 24 olan 2 sayının (pozitif tamsayının) kareleri toplamı en az kaçır?

I. sayı
x

II. sayı
y

min

$$x+y=24$$

$$\Rightarrow y=24-x$$

Aralık [1, 23]

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x) = x^2 + (24-x)^2$$

$$f'(x) = 2x + 2(24-x) \cdot (-1)$$

$$f'(x) = 4x - 48 = 0$$

$$\boxed{x=12}$$

Kritik nokta.

$$f''(x) = 4 > 0, \text{ min}$$

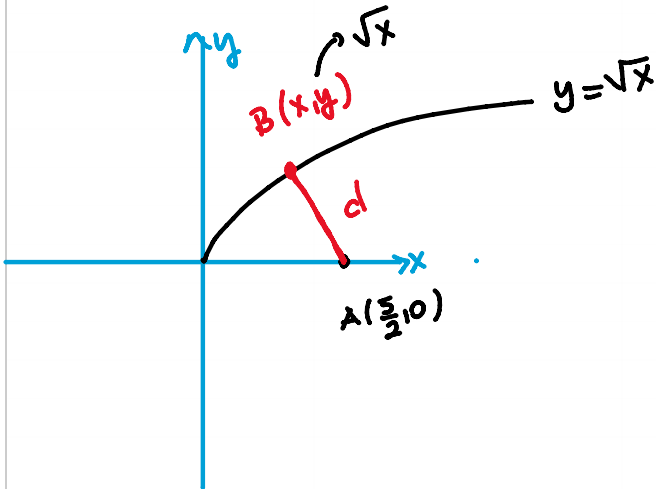
$$f(1) = 1^2 + 23^2 = 530$$

$$f(23) = 23^2 + 1^2 = 530$$

$$f(12) = 12^2 + 12^2 = 288$$

min değer.

ÖRNEK: $A(\frac{5}{2}, 0)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine en yakın uzaklığını bulunuz.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + x}$$

$$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 + x \quad \checkmark$$

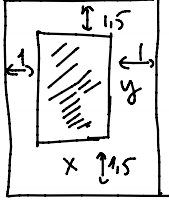
$$f'(x) = 2(x - \frac{5}{2}) + 1 = 2x - 5 + 1 = 2x - 4 = 0 //$$

$x=2$ kritik nokta,

$$f''(x) = 2 > 0, \text{ min. değer.}$$

$$d = \sqrt{(2 - \frac{5}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2} //$$

ÖRNEK: Bir kağıdın 24 cm^2 lik kısmına yazı yazılacaktır. Üstten ve alttan 1.5 cm , sağdan ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre bu kağıdın alanı kaç cm^2 olmalıdır?



$$x \cdot y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x}$$

$$f(x, y) = (y+3)(x+2)$$

$$f(x) = \left(\frac{24}{x} + 3\right)(x+2)$$

$$f(x) = 24 + \frac{48}{x} + 3x + 6$$

$$f(x) = 3x + \frac{48}{x} + 30$$

$$f'(x) = 3 - \frac{48}{x^2} = 0$$

$$f''(x) = \frac{96}{x^2}$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

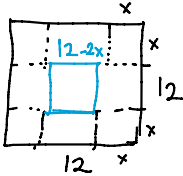
$$x = -4, \quad x = 4$$

Kritik nokta

$$f''(4) = \frac{96}{64} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{min}$$

$$f(4) = 12 + 12 + 30 = 54 \text{ cm}^2$$

ÖRNEK: Bir kenarının uzunluğu 12 cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden birer eşit alanlı kare kesilerek geriye kalan parçadan üstü açık bir kare prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olur?



$$V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$$

$$V(x) = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-6)(x-2) = 0$$

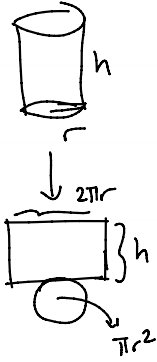
$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2 \rightarrow \text{Kritik nokta}$$

$$V''(x) = 24x - 96$$

$$V''(2) = -48 < 0, \quad \text{max}$$

$$V(2) = 64 \cdot 2 = 128 \text{ cm}^3$$

ÖRNEK: Bir sanayici alüminyumdan dik dairesel silindir şeklinde üstü açık 64 cm^3 hacminde kutular yapmaktadır. En az alüminyumun kullanılması için yapacağı silindirin taban yarıçapı kaç cm dir?



$$\pi r^2 \cdot h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{\pi r^2}$$

$$A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \left(\frac{64}{\pi r^2}\right)$$

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{128}{r}$$

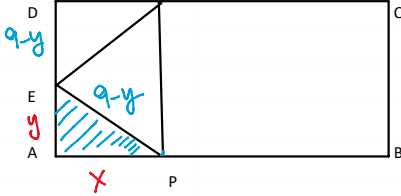
$$A'(r) = 2\pi r - \frac{128}{r^2} = 0$$

$$= \frac{2\pi r^3 - 128}{r^2} = 0$$

$$2\pi r^3 - 128 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{128}{2\pi} = \frac{64}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}}$$

ÖRNEK: Kısa kenarı 9 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kağıt şeklindeki gibi D köşesi kıvrılarak AB kenarı üzerine getiriliyor PAE üçgeninin alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?



$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$x^2 + y^2 = (9-y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 81 - 18y + y^2$$

$$y = \frac{81 - x^2}{18}$$

$$A(x) = \frac{x \cdot \left(\frac{81 - x^2}{18}\right)}{2}$$

$$A(x) = \frac{81x - x^3}{36}, \quad A'(x) = \frac{1}{36} (81 - 3x^2) = 0$$

$$3x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = 27$$

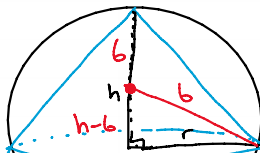
$$x = 3\sqrt{3} \quad \text{Kritik nokta}$$

$$A''(x) = \frac{1}{36} \cdot (-6x) = -\frac{x}{6}$$

$$A''(3\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0, \quad \text{max}_{//}$$

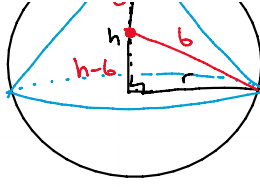
$$A(3\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{81 - 27}{18}\right)}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 //$$

ÖRNEK: Yarıçapı 6 cm olan bir küre içine yerleştirilen bir dik koninin hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?



$$V(r, h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$r^2 + (h-6)^2 = 6^2$$



$$r^2 + (h-6)^2 = 6^2$$

$$r^2 + h^2 - 12h + 36 = 36$$

$$r^2 + h^2 - 12h = 0$$

$$r^2 = 12h - h^2$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot (12h - h^2) \cdot h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} (12h^2 - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} (24h - 3h^2) = 0$$

$$24h - 3h^2 = 0 \Rightarrow h(24 - 3h) = 0$$

$$h = 0, h = 8, \text{ Kritik nokta}$$

$$V''(h) = \frac{\pi}{3} (24 - 6h)$$

$$V''(8) = \frac{\pi}{3} (24 - 48) = -8\pi < 0, \text{ max}$$

$$V(8) = \frac{\pi}{3} (12 \cdot 64 - 512) = \frac{256\pi}{3} \text{ m}^3 //$$

BELİRSİZ ŞEKİLLER