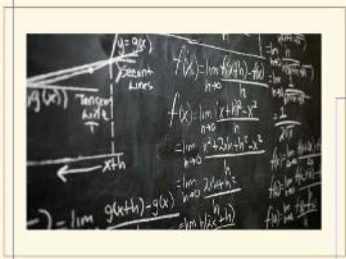
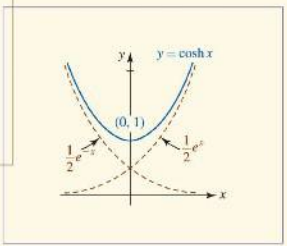
Türev

7 Kasım 2021 Pazar 19:40

Türev

Türev





Bu Bölümde Yapılacaklar *Kalkulüs* sözcüğü, Latince "taş" anlamına gelen calx sözcüğünün, küçültme anlamı verilerek elde edilmiş biçimidir. Eski uygarlıklarda hesaplama yapmak için sık sık çakıl taşları kullanılmıştır. Bunun sonucu olarak *kalkulüs* sözcüğü, hesap yapmanın düzenli bir yolu anlamını çağrıştırır. Son birkaç yüzyıl boyunca *kalkulüs*, türev ve integral olarak bilinen kavramların hesaplanması ve uygulanması ile ilgilenen bir matematik dalı olarak algılanmaya başlamıştır. Böylece **kalkulüs** olarak bilinen konular, birbiriyle ilgili iki farklı alana bölünmüştür: **Diferansiyel Kalkulüs** ve **İntegral Kalkulüs.**

Bu bölümde diferansiyel kalkulüsü incelemeye başlayacağız.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tanım 3.1.1 Türev

$y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki **türevi**, eğer sağdaki limit varsa,

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{2}$$

eşitliğiyle verilen f' fonksiyonudur.

ÖRNEK 1 Türev

$f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 + 2) - (x^2 + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+2} - \cancel{x^2} \cancel{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= \underline{\underline{2x}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ÖRNEK 4 Teğet Doğru

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğine $x = \frac{1}{2}$'de teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

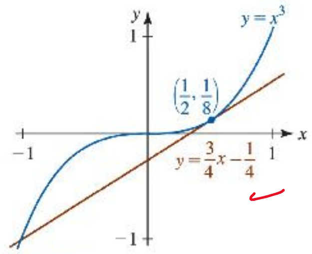
$-\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}}$$



ŞEKİL 3.1.1 Örnek 4'teki teğet doğru

$y = f(x)$ D

Gösterim Aşağıda bir fonksiyonun türevi için matematikte kullanılan bazı ortak **gösterimler** verilmiştir.

$D_x y$, D_t , D_y

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ y',\ Dy,\ D_x y.$$

Örneğin, $f(x) = x^2$ gibi bir eşitlikle verilen bir fonksiyon için $f'(x) = 2x$ yazarız. Aynı fonksiyon, $y = x^2$ eşitliğiyle verilirse o zaman, $dy/dx = 2x$, $y' = 2x$ veya $D_x y = 2x$ gösterimlerinden birini kullanırız. Biz bu kitapta ilk üç gösterimi kullanacağız. Değişik uygulamalarda farklı simgelerin kullanılabileceği de aşikârdır. Örneğin $z = t^2$ ise

$$\frac{dz}{dt} = 2t \quad \text{veya} \quad z' = 2t$$

olur. dy/dx gösteriminin kaynağı, Kesim 2.7'den gelen ve türevi tanımlayan (2) eşitliğine dayanır. Oradaki h yerine Δx ve $f(x + h) - f(x)$ farkı yerine Δy konularak, türev

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ biçiminde de tanımlanabilir.

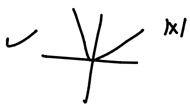
$d(x^2) = \int 2x\, dx$

Diferansiyellenebilme f fonksiyonunun tanım kümesindeki bir x için (2)'deki limit varsa f fonksiyonu, x'te **diferansiyellenebilir**dir, denir. f fonksiyonu; (a, b), $(-\infty, b)$ ve (a, ∞) gibi bir aralığın her noktasında diferansiyellenebilir ise bu durumda f fonksiyonu, **bir açık aralıkta diferansiyellenebilir**dir denir. f fonksiyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığında diferansiyellenebilir ise bu durumda f fonksiyonu **her yerde diferansiyellenebilir**dir denir. f fonksiyonu, (a, b) açık aralığında diferansiyellenebilir ve

$$\boxed{\begin{aligned} f'_{+}(a) &= \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'_{-}(b) &= \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \end{aligned}} \qquad (4)$$

limitlerinin her ikisi de varsa bu durumda f fonksiyonu, $[a, b]$ **kapalı aralığında diferansiyellenebilirdir** denir.

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

f Nerede Diferansiyellebilir Değildir? Aşağıdaki önermelerden biri doğru olduğunda f fonksiyonu, $x = a$'da diferansiyellenebilir değildir.

(*i*) f fonksiyonu $x = a$'da süreksizdir.
(*ii*) f fonksiyonunun grafiği, $(a, f(a))$'da köşe noktasına sahiptir.

Fonksiyonun türevi, teğetin eğimine eşit olduğundan yukarıdakilere şu önermeyi de ekleyebiliriz:

(*iii*) $(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğru düşey bir doğrudur.

Düşey Teğetler $y = f(x)$ fonksiyonu, $x = a$'da sürekli olsun. $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$ ise f'in grafiği, $(a, f(a))$ noktasında düşey bir teğete sahiptir. Rasyonel bir ~~kuvvet bulunduran~~ birçok fonksiyon, düşey teğete sahiptir.

ÖRNEK 10 Düşey Teğet

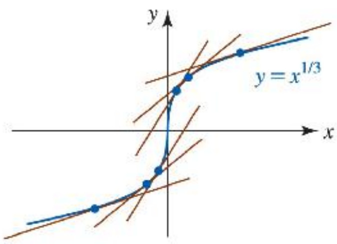
$f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun türevinin

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

olduğunun gösterilmesi bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırmalar 3.1'de Problem 55'e bakınız.). f fonksiyonunun 0'da sürekli olmasına karşın, f' fonksiyonunun tanımsız olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca $x = 0$'da

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$$

olduğundan $x \to 0$ için $|f'(x)| \to \infty$ olur. Böyle olması, $(0, f(0))$ yani $(0, 0)$ noktasında bir düşey teğet bulunduğunu söylemek için yeterlidir. ŞEKİL 3.1.3'te $x \to 0$ için başlangıç noktasının sağındaki ve solundaki teğetlerin adım adım nasıl dikleştikleri görülmektedir. ■



ŞEKİL 3.1.3 Örnek 10'daki fonksiyonun grafiğinin teğet doğruları

3.2 Kuvvet ve Toplam Kuralları

Teorem 3.2.1 Kuvvet Kuralı

Her n reel sayısı için

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \text{ dir.} \tag{3}$$

Teorem 3.2.2 Sabit Fonksiyon Kuralı

$f(x) = c$ sabit fonksiyon ise bu durumda $f'(x) = 0$'dır. (4)

ÖRNEK 7 Dik Doğrunun Denklemi

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği üstünde, $x = 1$ için elde edilen noktadaki normal doğrunun denklemini bulunuz.

$x=1, y=1$

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2 = m_1$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\boxed{y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)}$

Yüksek Basamaktan Türevler $f'(x)$ türevinin, f fonksiyonundan elde edilen yeni bir fonksiyon olduğunu gördük. Türev fonksiyonunun yeniden türevi alınarak $f(x)$'in **ikinci türevi** adı verilen ve $f''(x)$ ile gösterilen yeni bir fonksiyon elde edilir. x değişkenine göre türev operatörü olan d/dx simgesi kullanılarak $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevini

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}$$

biçiminde tanımlarız. İkinci türev, aşağıdaki sembollerle gösterilir:

$$f'''(x),\quad f^{(IV)}(x) \quad \leftarrow \quad f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ D^2,\ D_x^2.$$

Her basamaktan türevin var olduğunu varsayarak $y = f(x)$ fonksiyonunun istediğimiz basamaktan türevini alabiliriz. **Üçüncü türev**, ikinci türevin türevidir. **Dördüncü türev**, üçüncü türevin türevidir. Üçüncü ve dördüncü türevleri d^3y/dx^3 ve d^4y/dx^4 ile gösteririz ve onları

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

eşitlikleriyle tanımlarız. Genel olarak ***n*-inci türev**,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

ÖRNEK 10 Beşinci Türev

$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$ fonksiyonununun beşinci türevini bulunuz:

$f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5$

$f''(x) = 24x^2 - 36x + 14$

$f'''(x) = 48x - 36$

$f^{IV}(x) = 48$

$f^{V}(x) = \underline{0}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ (x^{-1}), $f^{(n)}(x) = ?$

$f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$

$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -6x^{-4}$

$f^{IV}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} = 24x^{-5}$

$\vdots$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$$

Teorem 3.2.3 Sabit Çarpan Kuralı

c sabit bir sayı ve f, x'te diferansiyellenebilir ise cf fonksiyonu da x'te diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x)\text{'tir.} \tag{5}$$

Teorem 3.2.4 Toplam ve Fark Kuralı

f ve g, x'te diferansiyellenebilir ise $f + g$ ve $f - g$ de x'te diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)\text{'tir.} \tag{7}$$

3.3 Çarpım ve Bölüm Kuralları

Teorem 3.3.1 Çarpım Kuralı

f ve g fonksiyonları x'te diferansiyellenebilir ise fg çarpımı da x'te diferansiyellenebilir ve

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\text{'tir.} \tag{3}$$

ÖRNEK 2 Teğet Doğru

$y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 4$'teki teğetinin denklemini bulunuz.

$y'(x) = (1+\sqrt{x})'(x-2) + (1+\sqrt{x})(x-2)'$ $\quad x_0 = 4, \quad y_0 = 6$ $\quad (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) + (1+\sqrt{x}).1.$

$y - y_0 = m.(x - x_0)$

$m = y'(4) = \frac{1}{4}\cdot 2 + (1+2) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

$\boxed{y - 6 = \frac{7}{2}(x-4)}$ *

Teorem 3.3.2 Bölüm Kuralı

f ve g fonksiyonları x'te diferansiyellenebilir ve $g(x) \neq 0$ ise f/g bölümü de x'te diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\text{'dir.} \tag{4}$$

ÖRNEK 5 Bölüm ve Çarpım Kuralı

$y = \dfrac{(x^2+1)(2x^2+1)}{3x^2+1}$ fonksiyonunun grafiğinin üstünde, teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

$$y'(x) = \frac{[(x^2+1)(2x^2+1)]' \cdot (3x^2+1) - (x^2+1)(2x^2+1) \cdot (3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2}$$

$$y'(x) = \frac{[2x(2x^2+1) + (x^2+1)\,4x] \cdot (3x^2+1) - (x^2+1)(2x^2+1) \cdot 6x}{(3x^2+1)^2}$$

⋮

3.4 Trigonometrik Fonksiyonlar

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Teorem 3.4.1 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x,} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x,} \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x. \qquad (13)$$

a) $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin h}{h}$

$\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$

$= \sin x\cdot\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x\cdot\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{1}$

$(\sin x)' = \cos x$

b) $(\cos x)' = -\sin x$ ✓

c) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - (-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= 1 + \tan^2 x$

$(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

d) $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$$= -(1+\cot^2 x)$$

(e) $(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$ ✓

(f) $(\operatorname{cosec} x)' = \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$ ✓

3.5 Zincir Kuralı

Giriş Kesim 3.2'de tartıştığımız gibi

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = n\underbrace{x^{n-1}}_{f(x)}}$$

kuvvet kuralı, her n reel sayısı için geçerlidir. Bu kesimde benzer bir kuralın, bir fonksiyonun kuvveti olan $\boxed{y = [g(x)]^n}$ biçiminde bir fonksiyon için de doğru olduğunu göreceğiz. Genel kuralı vermeden önce, n'nin pozitif bir tamsayı olduğu bir örneği ele alacağız.

$$y = (x^5 + 1)^2 \quad ✓$$

fonksiyonunun türevini almak isteyelim. (1) eşitliğini $y = (x^5 + 1) \cdot (x^5 + 1)$ biçiminde yazarak türevi çarpım kuralıyla bulabiliriz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 &= (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) \quad ✓\\ &= (x^5 + 1) \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 5x^4 \quad ✓\\ &= 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4.\end{aligned}$$

$$\left([f(x)]^n\right)' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

Teorem 3.5.1 Fonksiyonlar İçin Kuvvet Kuralı

n bir reel sayı ve $u = g(x)$ fonksiyonu x'te diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x), \tag{5}$$

veya denk olarak,

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}\text{'tir.} \tag{6}$$

ÖRNEK 4 Fonksiyonlar için Kuvvet Kuralı

$y = \tan^3 x$ fonksiyonunun türevini bulunuz. $(\tan x)^3$

$y' = 3 \cdot \tan^2 x \cdot (\tan x)'$

$= 3\tan^2 x \cdot (\sec^2 x)$ veya $= 3\tan^2 x(1+\tan^2 x) = 3\tan^2 x + 3\tan^4 x$

$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$ $y = f(x)$, $x = g(t)$, $t = h(s)$

Teorem 3.5.2 Zincir Kuralı

f fonksiyonu $u = g(x)$'te diferansiyellenebilir ve g fonksiyonu x'te diferansiyellenebilir ise $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ fonksiyonu da x'te diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx} \tag{7}$$

tir. Bu eşitlik şöyle de verilebilir:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.} \tag{8}$$

Teorem 3.5.3 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$u = g(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u\cot u\frac{du}{dx} \text{ olur.} \tag{13}$$

ÖRNEK 8 Zincir Kuralı

$y = \tan(6x^2 + 1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y' = \tan'(6x^2+1) \cdot (6x^2+1)'$

$y' = \sec^2(6x^2+1) \cdot 12x$

$y = \tan u, \quad u = 6x^2+1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u \cdot 12x$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2(6x^2+1) \cdot 12x$

ÖRNEK 9 Çarpım, Kuvvet ve Zincir Kuralı

$y = (9x^3 + 1)^2 \sin 5x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y' = \left[(9x^3+1)^2\right]' \cdot \sin 5x + (9x^3+1)^2 \cdot (\sin 5x)'$

$y' = \left[2(9x^3+1) \cdot 27x^2\right] \sin 5x + (9x^3+1)^2 \cdot \cos 5x \cdot (5x)'$

$y' = \left[54x^2 \cdot (9x^3+1)\right] \sin 5x + 5(9x^3+1)^2 \cdot \cos 5x$

ÖRNEK 10 Zincir Kuralının Tekrarlı Kullanımı

$y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y' = 4\cos^3(7x^3+6x-1) \cdot (\cos(7x^3+6x-1))'$

$y' = 4\cos^3(7x^3+6x-1) \cdot (-\sin(7x^3+6x-1)) \cdot (7x^3+6x-1)'$

$y' = 4\cos^3(7x^3+6x-1) \cdot (-\sin(7x^3+6x-1)) \cdot (21x^2+6)$

ÖRNEK 11 Zincir Kuralının Tekrarlı Kullanımı

$y = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y' = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \cdot \left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)' \rightarrow (3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \cdot \left(\sec^2\sqrt{3x^2+4}\right) \cdot \left(\sqrt{3x^2+4}\right)'$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2+4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \cdot (3x^2+4)'$

$y' = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2+4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\overset{3}{\cancel{6}}x}{\sqrt{3x^2+4}}$ ✓