$y = f(x) \to$ açık fonksiyon

* $F(x,y) = 0 \to$ kapalı "

3.6 Kapalı Türev

Giriş Matematikte uğraştığımız birçok denklemin grafiği bir fonksiyon grafiği değildir. Örneğin

$y = \mp\sqrt{4-x^2}$ → fonksiyon değil $y^2 = 4-x^2$

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

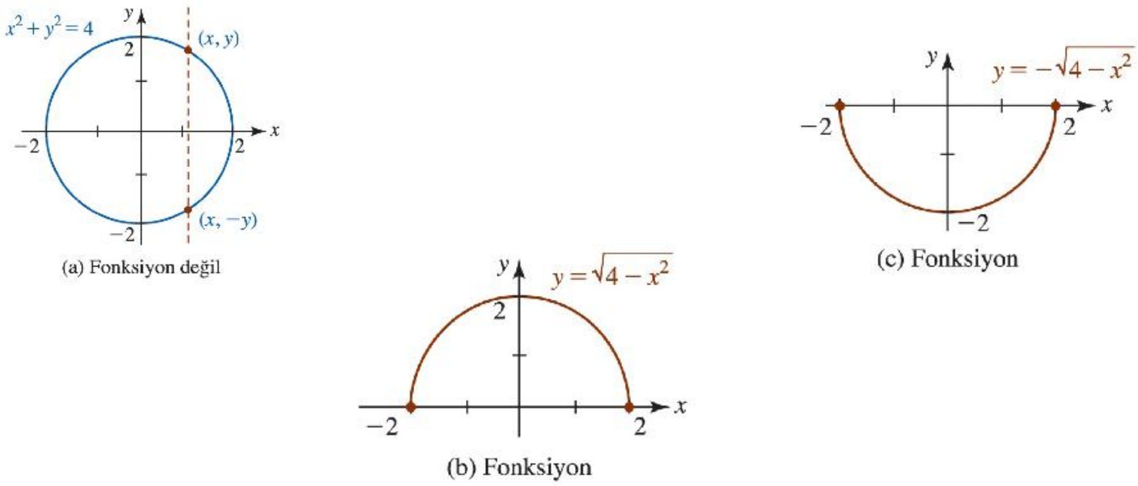
denklemi, merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 2 olan çemberi belirtir. $-2 < x < 2$ aralığında seçilen herhangi bir x için (1) denklemini sağlayan iki tane y bulunduğundan bu denklem $y = f(x)$ biçiminde bir fonksiyon değildir. ŞEKİL 3.6.1(a)'ya bakınız. Yine de (1)'e benzeyen bazı denklemlerin grafiklerinin bazı (x, y) noktalarında teğetleri vardır. (1) denklemi $[-2, 2]$ aralığında en az iki f ve g fonksiyonu ortaya çıkarır. Bu fonksiyonlar, denklemin grafiğinden hemen görülebilen, grafikleri çemberin üst yarısı ve çemberin alt yarısı olan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların kurallarını elde etmek için $x^2 + y^2 = 4$ denkleminden y değişkeni, x değişkenine bağlı olarak çözülür:

$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad \leftarrow \text{üst yarı çember} \tag{2}$$

ve

$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \quad \leftarrow \text{alt yarı çember} \tag{3}$$

Şimdi, $-2 < x < 2$ için, fonksiyonlar için kuvvet kuralı yardımıyla (2) ve (3)'ün türevini alarak x'e karşılık gelen noktadaki teğetin eğimini bulabiliriz.



ŞEKİL 3.6.1 $x^2 + y^2 = 4$ denklemi en az iki fonksiyon tanımlar.

Kapalı Türev Alma Yukarıdaki tartışmalardan $F(x, y) = 0$ denklemini (2), (3) ve (4)'te yaptığımız gibi, çözebileceğimiz fikrine kapılmamalıyız. Örneğin,

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + y \qquad (5)$$

$y \neq f(x)$

denkleminden, y'yi x'e bağlı olarak çözmek **imkansızdır!** Bununla birlikte, (5) denklemi, x-ekseninin uygun aralıklarında birkaç kapalı fonksiyon belirtilebilir. Bu fonksiyonların dy/dx türevlerini, **kapalı türev alma** (diferansiyelleme) denilen bir yöntemle hesaplayabiliriz. Bu süreç, uygun türev kuralları kullanarak her iki tarafın x'e göre türevini alıp sonra da dy/dx'i hesaplamaya dayanır. y'yi x'e bağlı olarak diferansiyellenebilir bir fonksiyon olarak düşündüğümüzden, bir fonksiyonun kuvvetine uygulanan zincir kuralı, aşağıdaki kullanışlı sonucu verir:

$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$

$= y'$

$(y^2)' = 2 \cdot y \cdot y'$

$$\frac{d}{dx} y^n = n y^{n-1} \frac{dy}{dx}. \qquad (6)$$

Bu eşitlikte n, herhangi bir reel sayıdır. Örneğin,

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \qquad \text{iken} \qquad \frac{d}{dx} y^2 = 2y \frac{dy}{dx}$$

$\frac{d}{dx}(xy) = (x')y + x \cdot (y')$

$= 1y + x \cdot y'$

$= y + x\frac{dy}{dx}$

tir. Benzer olarak, y, x'in bir fonksiyonu ise çarpım kuralına göre

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x = x\frac{dy}{dx} + y$$

ve zincir kuralına göre

$y = y(x)$

$$\frac{d}{dx}\sin 5y = \cos 5y \cdot \frac{d}{dx}5y = 5\cos 5y \frac{dy}{dx} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 1 Kapalı Türev Alma

$x^2 + y^2 = 4$ ise dy/dx'i bulunuz.

$2x + 2.y.\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y}$

$F(x,y) = 0$

$F_x \;,\; F_y \quad , \quad y' = -\frac{F_x}{F_y}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-1)y - (-x).y'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$

ÖRNEK 3 Kapalı Türev Alma

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ ise dy/dx'i bulunuz.

$y' = \frac{dy}{dx}$

$(1,2) = ?$

$4x^3 + 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' - 5y^4 \cdot y' = 2$

$y'(3x^2y^2 - 5y^4) = 2 - 4x^3 - 2xy^3$

$$\boxed{y' = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}}$$

$$y'' = \frac{(-12x^2 - 2y^3 - 6xy^2 y')(3x^2y^2 - 5y^4) - (6xy^2 + 6x^2y \cdot y' - 20y^3 y')(2 - 4x^3 - 2xy^3)}{(3x^2y^2 - 5y^4)^2}$$

Yüksek Basamaktan Türev Şimdiye değin biz kapalı türev alma ile dy/dx'in nasıl bulunduğunu gördük. dy/dx'in yeniden x'e göre türevi alınarak d^2y/dx^2 elde edilebilir. Eğer birinci türevde y varsa bu durumda d^2y/dx^2 türevinde dy/dx bulunur. Bunun yerine, daha önce bulunan değeri konularak bu terim yok edilir.

ÖRNEK 4 İkinci Türev

$x^2 + y^2 = 4$ ise d^2y/dx^2 yi bulunuz.

Yukarıda

3.7 Ters Fonksiyonların Türevleri

Teorem 3.7.4 Ters Fonksiyonun Türevi

f, bir I aralığında diferansiyellenebilir ve $f'(x)$, bu aralıktaki her noktada sıfırdan farklı olsun. f'in f^{-1} tersi varsa bu fonksiyon tanım kümesindeki her x sayısında diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\text{'tir.} \tag{3}$$

ÖRNEK 3 Ters Fonksiyonun Türevi

Örnek 1'de $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ polinom fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığında diferansiyellenebilir olduğu belirtilmişti. Bundan dolayı bu aralıkta sürekli bir fonksiyondur. f'in uçlardaki davranışı $y = 5x^3$ polinom fonksiyonu ile aynı olduğundan f'in görüntü kümesi, $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. Buna göre Teorem 3.7.3'ten dolayı, f'in f^{-1} tersi vardır ve ters fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. x ve y'nin yerleri değiştirilerek elde edilen $x = 5y^3 + 8y - 9$ eşitliğinden y, x cinsinden çözülerek, ters fonksiyonun kuralı bulunur. Fakat bu denklemi çözmek zordur (kübik formüller gerekir). Yine de $dx/dy = 15y^2 + 8$ eşitliği kullanılarak (4) eşitliğinden ters fonksiyonun türevi bulunur:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15y^2 + 8}.$$

Örneğin, $f(1) = 4$ olduğundan $f^{-1}(4) = 1$'dir. Öyleyse f^{-1} in grafiğinin $(4, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimi (5) eşitliğinden bulunabilir:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{15y^2 + 8}\right|_{y=1} = \frac{1}{23}.$$

$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$*(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad (\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y$

$*(\arcsin x)' = ?$

$\arcsin x = y$

$x = \sin y$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$*(\arccos x)' =$

$\arccos x = y$

$x = \cos y$

$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$*(\arctan x)' = ?$

$\arctan x = y$

$x = \tan y$

$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

$1 + \tan^2 y = \sec^2 y$

$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$*(\operatorname{arcsec} x)' = ?$

$\operatorname{arcsec} x = y$

$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$

$*(\text{arcsec}x)' = ?$

$\text{arcsec}x = y$

$x = \sec y$

$$(\text{arcsec}x)' = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$$

$$= \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$$\boxed{(\text{arcsec}x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}} \; *$$

$\sin^{-1}(x) = \text{arc}\sin x$

Teorem 3.7.5 Trigonometrik Fonksiyonların Tersleri

$u = g(x)$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (14)$$

$$* \; \frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}. \qquad (16)$$

ÖRNEK 5 Ters Tanjant Fonksiyonunun Türevi

$y = \tan^{-1}\sqrt{2x+1}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$u = \sqrt{2x+1}$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{2x+1})^2} \cdot (\sqrt{2x+1})' = \frac{1}{1+2x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2\right)$$

$$y' = \frac{1}{2x+2 \quad \sqrt{2x+1}}$$

ÖRNEK 7 Teğet Doğru

$f(x) = x^2\cos^{-1}x$ fonksiyonunun grafiğinde, $x = -\frac{1}{2}$ için elde edilen noktadaki teğetin denklemini bulunuz.

$\cos^{-1}x = \arccos x$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$-\frac{1}{2}$

$$m = y'\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = 2x \cdot \arccos x + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Bigg|_{x=-\frac{1}{2}}$$

$$m = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}\right)$$

$$m = -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\boxed{y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

3.8 Üstel Fonksiyonlar

$\left(e^{\cos x}\right)' = (-\sin x) \cdot e^{\cos x}$

$\left(e^{\frac{x^2+1}{x}}\right)' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' e^{\frac{x^2+1}{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{x^2})' = 2x \cdot e^{x^2}$

Teorem 3.8.1 Üstel Fonksiyonların Türevleri

$u = g(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}, \tag{14}$$

ve

$$\frac{d}{dx} b^u = b^u (\ln b) \frac{du}{dx}. \tag{15}$$

$(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$

$(2^{x^2})' = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2$

ÖRNEK 1 Zincir Kuralı

(a) $y = e^{-x}$ **(b)** $y = e^{1/x^3}$ **(c)** $y = 8^{5x}$

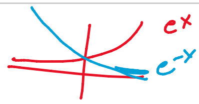
fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

ⓐ $y' = -e^{-x}$

ⓑ $y' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' e^{\frac{1}{x^3}}$

$= -\frac{3}{x^4} e^{\frac{1}{x^3}}$

ⓒ $y' = 5 \cdot 8^{5x} \cdot \ln 8$



ÖRNEK 2 Çarpım ve Zincir Kuralı

$y = 3x^2e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği üstünde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

$y' = 6x e^{-x^2} + 3x^2 \left(-2x e^{-x^2}\right)$

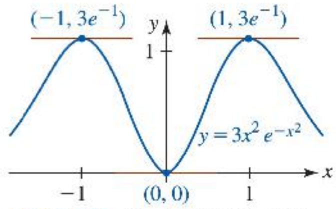
$= 6x e^{-x^2} - 6x^3 e^{-x^2}$

$= e^{-x^2} \left(6x - 6x^3\right)$, $y' = 0$

$\neq 0$

$6x - 6x^3 = 0$

$6x(1-x^2) = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$



ŞEKİL 3.8.2 Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği

ŞEKİL 3.8.2 Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği

ÖRNEK 3 Bir Doğruya Paralel Olan Teğet

$f(x) = 2e^{-x}$ in grafiği üstünde, o noktadaki teğetin $y = -4x - 2$ doğrusuna paralel olduğu noktayı bulunuz.

$y' = -2e^{-x}$

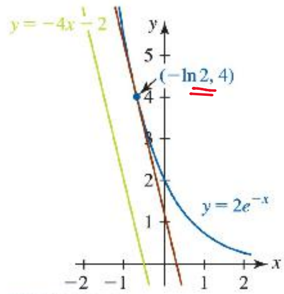
$m = y' = -4$

$-2e^{-x} = -4$

$e^{-x} = 2$

$-x = \ln 2$

$\boxed{x = -\ln 2}$



ŞEKİL 3.8.3 Örnek 3'teki fonksiyonun ve doğruların grafiği

3.9 Logaritmik Fonksiyonlar

$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$\boxed{\log_a u(x) = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

$(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

Teorem 3.9.1 Logaritmik Fonksiyonların Türevleri

$u = g(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \tag{3}$$

ve

$$\frac{d}{dx}\log_b u = \frac{1}{u(\ln b)}\frac{du}{dx}\text{'tir.} \tag{4}$$

ÖRNEK 3 Zincir Kuralı

(a) $f(x) = \ln(\cos x)$ ve **(b)** $y = \ln(\ln x)$

fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a $y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

b $y' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

ÖRNEK 4 Zincir Kuralı

$f(x) = \ln x^3$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$x^3 > 0$

$f'(x) = \frac{(x^3)'}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

ÖRNEK 7 Bir Farklılık

$x \neq 0$ için $x^4 > 0$ olduğundan f'in tanım kümesi $x = 0$ dışındaki bütün reel sayıların kümesidir. g'nin tanım kümesi $(0, \infty)$ aralığıdır. Buna göre aşağıdaki önermeler yazılabilir:

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \text{ve} \qquad g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0. \qquad ■$$

$\ln x^4$

$(\ln x^4)' = \frac{(x^4)'}{x^4} = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}$

ÖRNEK 8 Türevden Önce Sadeleştirme

$y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y = \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln (2x+7)^4 - \ln (3x^2+1)^2$

$y = \frac{1}{2} \ln x + 4 \ln (2x+7) - 2 \ln (3x^2+1)$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4 \frac{(2x+7)'}{2x+7} - 2 \frac{(3x^2+1)'}{3x^2+1}$

$\boxed{y' = \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1}}$

Logaritmik Türev Çarpım, bölüm ve kuvveti kapsayan bazı $y = f(x)$ fonksiyonlarının türevlerini hesaplamak, **logaritmik türev** denilen bir yöntemle basitleşebilir. Bu yöntem üç adımdan oluşur:

$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln (x^x)$

$\ln y = x \ln x \Rightarrow (\ln y)' = (x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot (\ln x)'$

$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

$y' = y (\ln x + 1)$

$\boxed{y' = x^x (\ln x + 1)}$

Logaritmik Türev İçin Yol Gösterme

(*i*) $y = f(x)$ eşitliğinin her iki yanının doğal logaritmasını alınız. $\ln y = \ln f(x)$ eşitliğinin sağ yanını, logaritmanın genel özelliklerini kullanarak olabildiğince basitleştiriniz.

(*ii*) Sadeleştirilmiş $\ln y = \ln f(x)$ eşitliğinin her iki yanının türevini alınız:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

(*iii*) Sol yanın türevi $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$ olduğundan her iki yanı y ile çarpınız ve y yerine $f(x)$ koyunuz.

Kuralları,

$$\boxed{y = (\text{sabit})^{\text{değişken}}} \quad \text{ve} \quad y = (\text{değişken})^{\text{sabit}}$$

biçiminde olan fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını biliyoruz. Örneğin,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\pi^x = \pi^x(\ln \pi)} \quad \text{ve} \quad \boxed{\frac{d}{dx}x^\pi = \pi x^{\pi - 1}}$$

dir. Hem tabanı hem de üssü değişken olan fonksiyonlar da vardır:

$$\boxed{y = (\text{değişken})^{\text{değişken}}}. \tag{11}$$

Örneğin $f(x) = (1 + 1/x)^x$ fonksiyonu, (11)'deki gibi bir fonksiyondur. Kesim 1.6'da $f(x) = (1 + 1/x)^x$ fonksiyonunun, e sayısının tanımlamasında önemli bir işlevinin olduğunu gördük. (11) biçimindeki fonksiyonların türevi için genel bir formül çıkarmayacağız. Fakat o tür fonksiyonların türevini her zaman logaritmik türev yöntemiyle hesaplayabiliriz. Aşağıdaki örnek, dy/dx'in nasıl bulunacağını göstermektedir.

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad y' = ?$$

$$\ln y = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x.\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$y' = y\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\boxed{y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}$$

ÖRNEK 9 Logaritmik Türev

$x > 0$ olmak üzere $y = x^{\sqrt{x}}\, x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$y' = \left(x^{\sqrt{x}}\right)'.x + x^{\sqrt{x}}.(x)'$$

$$y' = x^{\sqrt{x}}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right).x + x^{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y' = x^{\sqrt{x}+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) + x^{\sqrt{x}}} \quad **$$

$$u = x^{\sqrt{x}}, \quad u' = ?$$

$$\ln u = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln u = \sqrt{x}.\ln x$$

$$(\ln u)' = (\sqrt{x}.\ln x)'$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}.\frac{1}{x}$$

$$u' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)u$$

$$u' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

II. yol

$$y = x^{\sqrt{x}+1}$$

$$\ln y = (\sqrt{x}+1)\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\ln x + \frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

$$\boxed{y' = x^{\sqrt{x}+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)}$$

3.10 Hiperbolik Fonksiyonlar

Tanım 3.10.1 Hiperbolik Sinüs ve Kosinüs

x bir reel sayı olmak üzere, **sinüs hiperbolik** fonksiyonu,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

eşitliğiyle tanımlanır. **Kosinüs hiperbolik** fonksiyonu,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{3}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Tanım 3.10.2 Diğer Hiperbolik Fonksiyonlar

x bir reel sayı olmak üzere x'in **hiperbolik tanjantı**,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{4}$$

tir. $x \neq 0$ olmak üzere x'in **hiperbolik kotanjantı**,

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{5}$$

tir. x'in **hiperbolik sekantı**,

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{6}$$

ve $x \neq 0$ olmak üzere x'in **hiperbolik kosekantı**,

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \text{ şeklindedir.} \tag{7}$$

Teorem 3.10.1 Hiperbolik Özdeşlikler

$\sinh(-x) = -\sinh x$	$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$	(11)
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$	(12)
$\tanh(-x) = -\tanh x$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$	(13)
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$	(14)
$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$	(15)
$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$	(16)
$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$	$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$	(17)

Teorem 3.10.2 Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

$u = g(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}. \tag{23}$$

ÖRNEK 2 Türevin Değeri

$y = \dfrac{3x}{4 + \cosh 2x}$'in $x = 0$'daki türevini bulunuz.