Alan Hesabı

2 Mart 2022 Çarşamba 17:52

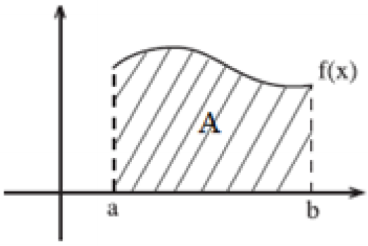
Alan Hesabı

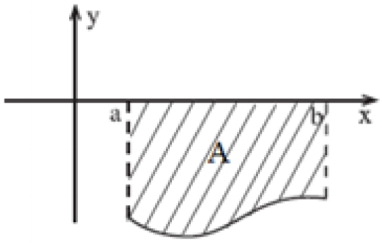
ALAN HESABI

f , $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $y=f(x)$ eğrisi $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile O_x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

a) $[a,b]$ kapalı aralığında $f(x)\geq 0$ olsun.

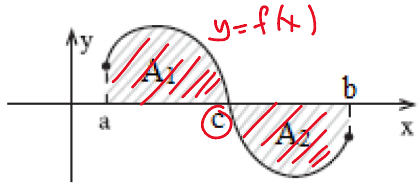
b) $[a,b]$ kapalı aralığında $f(x)\leq 0$ olsun.





$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad A=\int_a^b -f(x)dx$$

c) Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığının bazı yerlerinde pozitif bazı yerlerinde negatif ise fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı toplanıp bulunur.



$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$$

Örnek $y = 4x - x^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

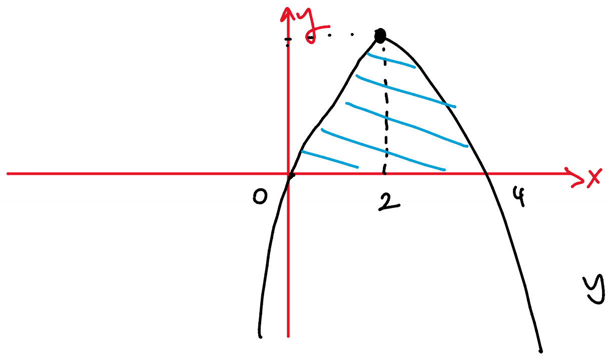
$y = ax^2 + bx + c$

$T(h,k)$, $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$

$k = f(h) = f(2) = 8 - 4 = 4$

$4x - x^2 = 0$, $x(4-x) = 0$

$x = 0$, $x = 4$



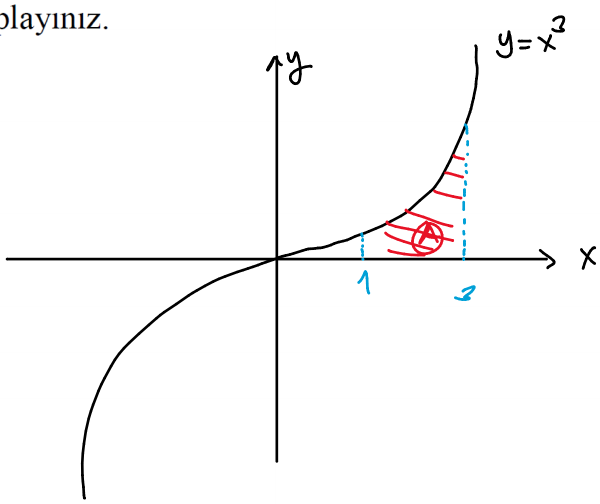
$y = 4x - x^2$

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4$$

$= 32 - \frac{64}{3}$

$= \frac{32}{3}$ br²

Örnek $y = x^3$ eğrisi ile $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

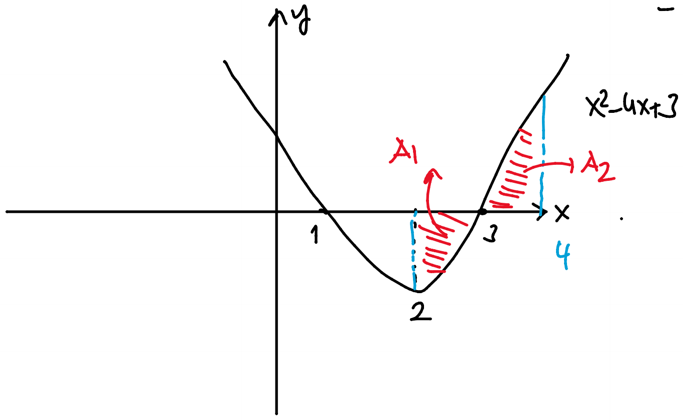


$$A = \int_1^3 x^3\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_1^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20 \text{ br}^2$$

Örnek $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisi $x = 2, x = 4$ doğruları ve Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2,$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=1, \quad x=3$

$A = A_1 + A_2$

$= \int_2^3 -(x^2-4x+3)\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$

$= \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)_3^4$

$= \underline{2}$ br²

İki Eğri Arasındaki Alan Hesabı

$f(x)$ ve $g(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda bu iki eğri arasında kalan alanlar için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$[a,b]$ **kapalı aralığında** $f(x)>g(x)$ **ise;**

f ve g, $[a,b]$ aralığı boyunca $f(x)>g(x)$ olmak üzere sürekli iseler a'dan b'ye kadar $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri arasındaki bölgenin alanı

$$\boxed{A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx}$$

şeklinde bulunur.

$[a,b]$ **kapalı aralığı** $f(x) < g(x)$

f ve g, $[a,b]$ aralığı boyunca $f(x) < g(x)$ olmak üzere sürekli iseler a'dan b'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri arasındaki bölgenin alanı

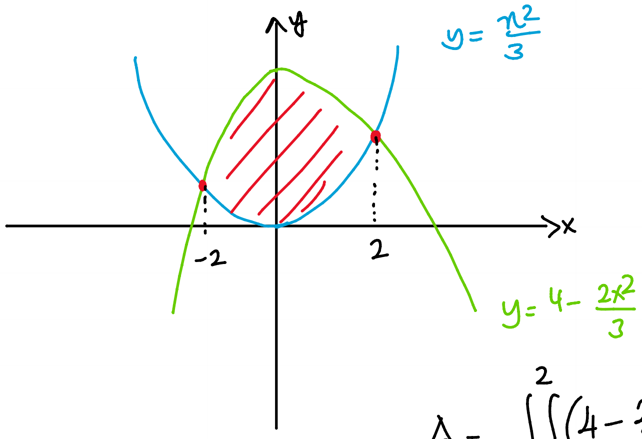
$$\boxed{A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx}$$

Kesişen iki eğri arasında kalan alan

Bu tür durumlarda varsa eğrilerin kesiştiği noktalar tespit edilir. Üstteki eğrinin alanından, alttaki eğrinin alanı çıkarılarak tüm bölgenin alanı hesaplanır.

$$\boxed{A = \int_a^c (f(x) - g(x))dx - \int_c^b (g(x) - f(x))dx}$$

Örnek $y=\dfrac{x^2}{3}$ ve $y=4-\dfrac{2x^2}{3}$ parabolleri ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$4-\frac{2x^2}{3}=\frac{x^2}{3}$$

$$4=\frac{2x^2}{3}+\frac{x^2}{3}$$

$$x^2=4$$

$$x=\mp 2$$

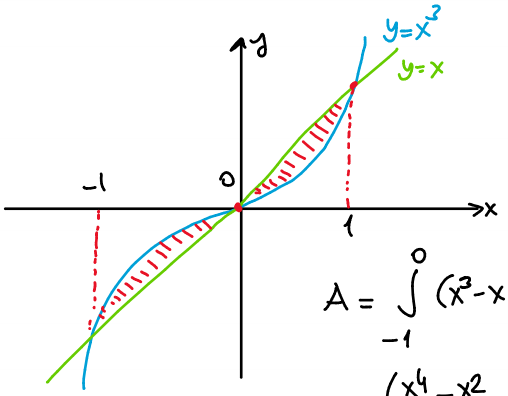
$$A=\int_{-2}^{2}\left[\left(4-\frac{2x^2}{3}\right)-\left(\frac{x^2}{3}\right)\right]dx$$

$$A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)$$

$$=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\ \text{br}^2$$

Örnek $y = x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$x=0, \quad x=-1, \quad x=1$

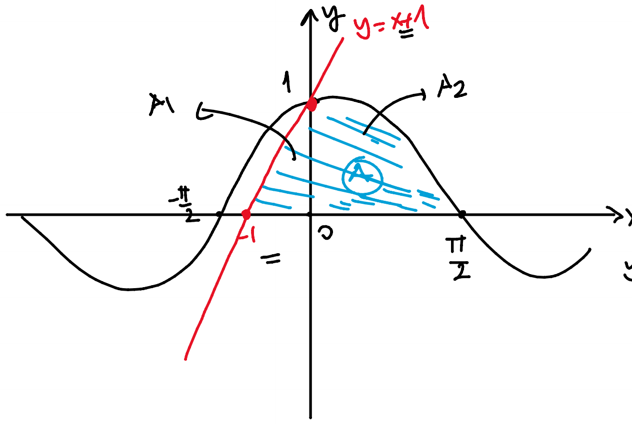
$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \left[(0-0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \underline{\underline{br^2}}$$

Örnek $y = x+1$, $y = \cos x$ ve x ekseni tarafından sınırlanan alanı bulunuz.



$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

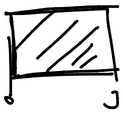
$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\sin x\right)\Big|_{0}^{\pi/2}$$

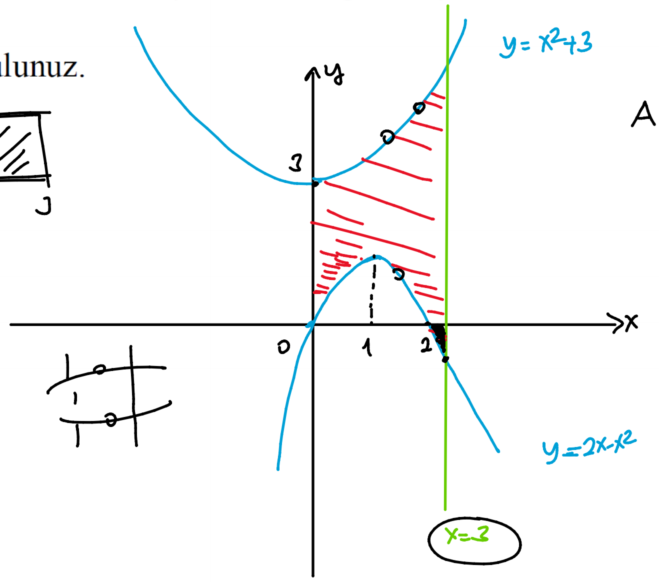
$$= (0+0) - \left(\frac{1}{2}-1\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2}\ \text{br}^2$$

Örnek $y = x^2 + 3$ ve $y = 2x - x^2$ eğrileri y ekseni ve $x = 3$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.





$$A = \int_0^3 \left[(x^2+3) - (2x - x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^3 (2x^2 - 2x + 3)\, dx$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_0^3$$

$$= (18 - 9 + 9) - (0)$$

$$= \underline{18 \text{ br}^2}$$

Örnek: $y = 3x - x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$y' = 3 - 3x^2 = 0$

$x^2 = 1$

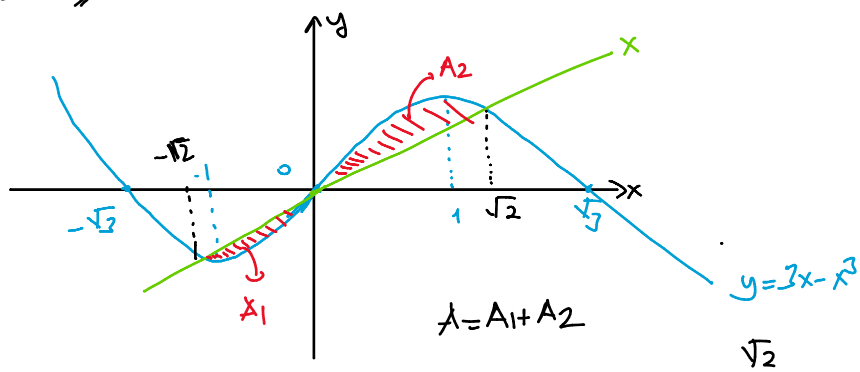
$x = \mp 1$

x	$-\infty$		-1		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$3x - x^3 = 0$

$x(3 - x^2) = 0$

$x = 0, \quad x = \mp\sqrt{3}$



$A = A_1 + A_2$

$3x - x^3 = x$

$2x - x^3 = 0$

$x(2 - x^2) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \mp\sqrt{2}$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(x - (3x - x^3)\right)dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} \left[(3x - x^3) - x\right]dx$$

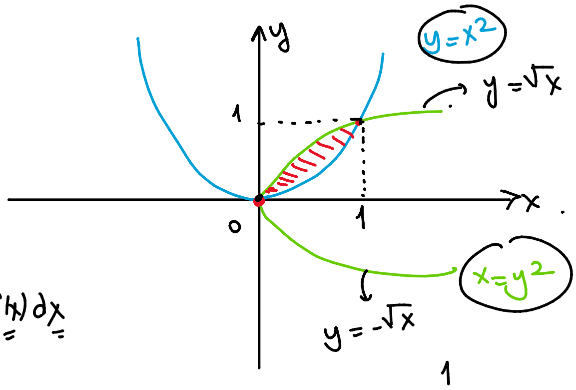
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3 - 2x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (2x - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$= 0 - (1 - 2) + (2 - 1) - (0)$$

$$= 1 + 1 = 2 \text{ br}^2$$

Örnek: $y = x^2$, $x = y^2$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$y = x^2 , \quad x = y^2$$

$$y = (y^2)^2 \Rightarrow y = y^4$$

$$y^4 - y = 0$$

$$y = \mp\sqrt{x}$$

$$y(y^3 - 1) = 0$$

$$y = 0 , \ y = 1$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b y\,dx$$

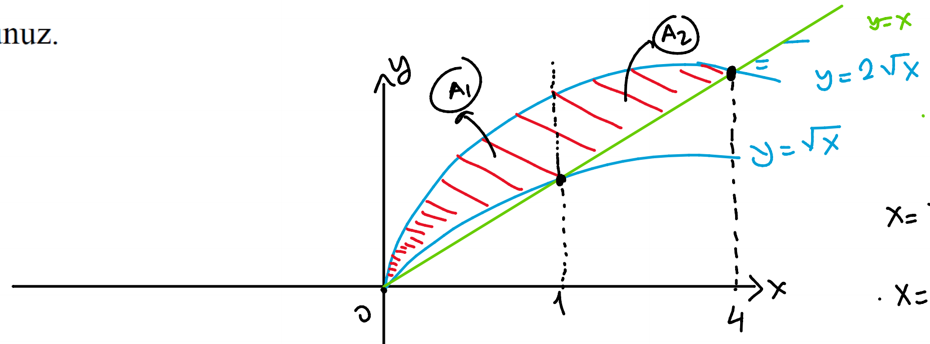
$$y = f(x)$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{3}\ \text{br}^2$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$ ve $y=2\sqrt{x}$ eğrileri ve $y=x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$x=\sqrt{x} \Rightarrow x=0,1$

$x=2\sqrt{x} \Rightarrow x=0,4$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^1 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx + \int_1^4 (2\sqrt{x}-x)\,dx$$

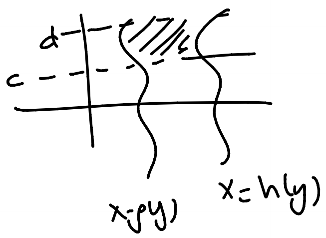
$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{32}{3}-8\right) - \left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 10 - 8 + \frac{1}{2} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\ \text{br}^2$$

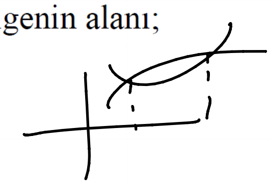
$y=f(x)$, $y=x^2$, $x=\sqrt{y}$, $x=-\sqrt{y}$

SONUÇ: Benzer şekilde g ve h fonksiyonları $[c,d]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar iseler; $x=g(y)$, $x=h(y)$ eğrileri ile $y=c$ $y=d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı;



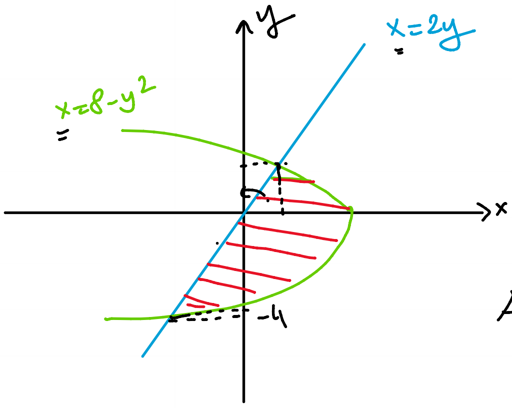
$$A=\int_c^d (h(y)-g(y))dy$$

$$A=\int_c^d (x_{sağ}-x_{sol})dy$$



şeklindedir.

Örnek $x = 8 - y^2$ eğrisi ile $x = 2y$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz



$$8 - y^2 = 2y$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y+4)(y-2) = 0$$

$$y_1 = -4, \quad y_2 = 2$$

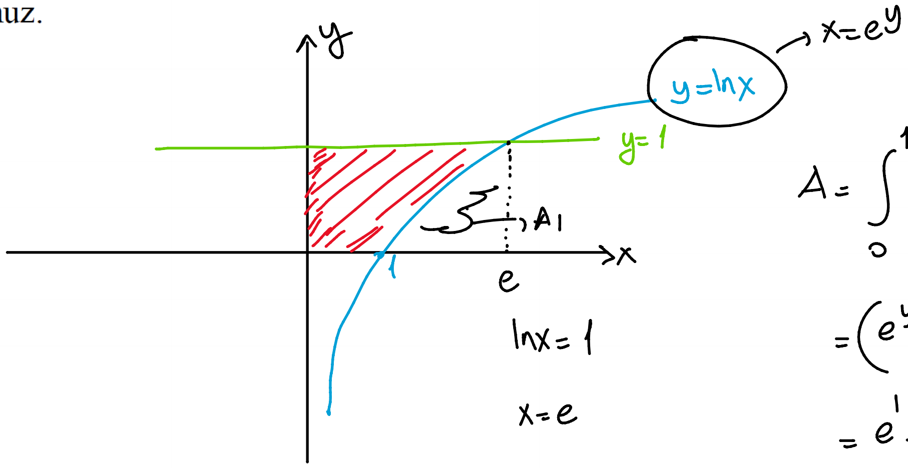
$$A = \int_{-4}^{2} \left[(8 - y^2) - (2y) \right] dy$$

$$= \left(8y - \frac{y^3}{3} - y^2 \right) \Big|_{-4}^{2}$$

$$= \left(16 - \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - 16 \right)$$

$$= 60 - 24 = 36 \ \text{br}^2$$

Örnek $y = \ln x$ eğrisi $y = 0$, $y = 1$ doğruları ve y ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$\ln x = 1$

$x = e$

$1 . e = e$

$$A_1 = \int_1^e \ln x \, dx$$

$$= \left(x \ln x - x\right)\Big|_1^e$$

$$= (e . \ln e - e) - (1 . \ln 1 - 1)$$

$$= 1$$

$$(e-1) \text{ br}^2$$

$$A = \int_0^1 e^y \, dy$$

$$= \left(e^y\right)\Big|_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$\boxed{A = e - 1 \quad \text{br}^2}$$

Parametrik Denklemli Eğrilerin Sınırladıkları Bölgenin Alanları $dx = g'(t)dt$

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere $x = g(t)$, $y = h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen bir c eğrisi varsa $x = a$, $x = b$ doğrusu ve 0_x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için;

$$A = \int_a^b |y| dx$$

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx$$

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t).g'(t)dt$$

olan formülü t cinsinden ifade etmek gerekir.

$y = h(t)$ $dx = g'(t)dt$ yazılır. t'nin a ve b'ye karşılık gelen değerlerine sırası ile t_1, t_2 denirse;

* $$\boxed{A=\int_{t_1}^{t_2} h(t)g'(t)dt}$$ olur.

Benzer şekilde verilen eğri $y=c$ ve $y=d$ doğruları ve O_y ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı t_3 ve t_4; c ve d sayılarına karşılık gelen parametreler olmak üzere;

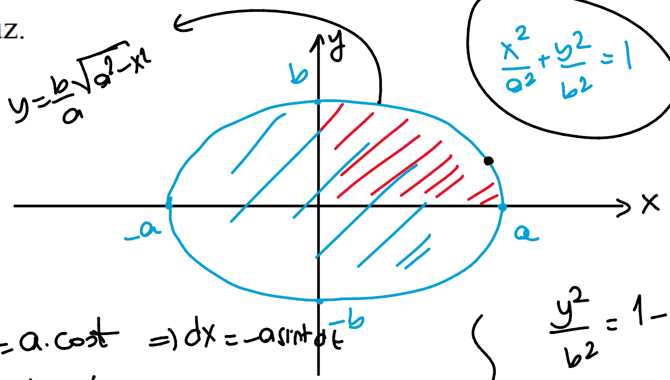
* $$\boxed{A=\int_{t_3}^{t_4} |g(t)|h'(t)dt}$$

şeklinde bulunur.

Örnek

$$A = \int_a^b y\,dx$$

$x = a\cos t$
$y = b\sin t$ parametrik denklemiyle verilen elips tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x = a\cdot\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt$

$y = b\sin t$

$x=0,\quad a\cos t = 0,\quad t=\frac{\pi}{2}$

$x=a,\quad a\cdot\cos t = a,\quad \cos t = 1,\quad t=0$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2-x^2)$$

$$y = \mp\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$a=b=r$

$$A = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt$$

$$= 4a\cdot b\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= 2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2ab\left[\left(\frac{\pi}{2}-\cancel{\frac{\sin\pi}{2}}^{\,0}\right)-\left(0-\cancel{\frac{\sin 0}{2}}^{\,0}\right)\right]$$

$$= \pi ab \qquad \pi r^2$$