Allterne Seriler, Kuvvet Serileri

1 Haziran 2022 Çarşamba 16:56

Allterne Seriler,...

ALTERNE SERİLER, KUVVET SERİLERİ

Alterne Seriler

Terimlerinin işareti ardışık olarak değişen serilere alterne seri denir. Örneğin;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots \text{ gibi.}$$

$(-1)^{n+1}$, $(-1)^{n}$, $(-2)^{n+1}$ $(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1}$

Leibnitz Testi:

Eğer $\forall n \geq 1$ için;

$$\left.\begin{array}{l} i)\ 0 < a_{n+1} \leq a_n \\ ii)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \text{ ise bu taktirde } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ alterne serisi yakınsaktır.}$$

$a_{n+1} < a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Örnek $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$a_k = \frac{1}{k}$

i) $a_{k+1} < a_k$?

ii) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$?

i) $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$

$a_{k+1} < a_k$ ✓

ii) $\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k}\right) = 0$ ✓

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ serisi yakınsaktır.

Tanım Terimleri $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşacak $\sum |a_k|$ serisi yakınsak ise; $\sum a_k$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir. $\sum a_k$ yakınsak fakat $\sum |a_k|$ ıraksak ise bu takdirde $\sum a_k$ serisi **şartlı yakınsaktır** denir.

Örnek $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ serisinin mutlak yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$p = 2 > 1$
seri yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ → mutlak yakınsak

seri yakınsaktır.

Ör. $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right|$ → şartlı yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ → ıraksak

Teorem Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır. ✓

Örnek Genel terimi $u_n = \dfrac{n}{(n^2+4)^2}$ olan serinin karakterini inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$$

1. integral testi

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2} \quad , \text{ azalan fonksiyon}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

$$x^2+4 = u \quad , \quad = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$$

$$2x\,dx = du \qquad = -\frac{1}{2u}$$

$$x\,dx = \frac{du}{2} \qquad = -\frac{1}{2(x^2+4)}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2(x^2+4)} \right) \Bigg|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\cancel{-\frac{1}{2(b^2+4)}} + \frac{1}{2.(1+4)} \right) = \frac{1}{10} \; , \text{ yakınsak}$$

$$0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2} \; , \text{ yakınsak.}$$

2. limit testi

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = \lim_{n\to\infty} n^p \frac{n}{(n^2+4)^2} = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \frac{n}{n^4+8n^2+16} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+8n^2+16} = 1$$

$\gamma = 1, \quad 0 < \gamma < \infty, \quad p=3, \quad p>1$, old.dan seri yakınsaktır.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$(n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n^2+5n+6)$$
$$= n^3+5n^2+6n+n^2+5n+6$$
$$= n^3+6n^2+11n+6$$

limit testi

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \frac{1}{n^3+6n^2+11n+6} = 1, \quad r=1, \quad p=3$$

seri yakınsaktır

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}{n^{2}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}{n^{2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}{n^{2}} \rightarrow a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}{n^2}}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}}$$

$$= \frac{4}{3} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1}}_{1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}{n^{2}}$, serisi ~~şartlı yakınsak.~~ $\Leftarrow$ $= \frac{4}{3} > 1$, olduğundan seri ıraksaktır.

n. terim

Örnek $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \text{sonlu, yakınsak}$$

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$1 = (2k+1)A + (2k-1)B$$

$$1 = 2Ak + A + 2Bk - B$$

$$2/ \quad A - B = 1$$
$$2A + 2B = 0$$

$$4A = 2$$
$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Kısmi Toplamlar Dizisi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{1}{2}$$

0 yakınsak

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots = \frac{1}{2} \; //$$

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$\overset{a_n}{\frown}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

limit testi

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot a_n = \gamma$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3}$$

$\frac{1}{n} = t$, $n\to\infty$, $t\to 0$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin^3(t)}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^3}_{1} = 1$$

$= 1$

$\gamma = 1$, $p = 3$, seri yakınsaktır.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.\ln^2 n}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.\ln^2 n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$$

$f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$, azalan fonksiyon , integral testi uygulanabilir

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x},$$

$\ln x = u$ $\quad = \int\frac{du}{u^2}$

$\frac{dx}{x} = du$ $\quad = -\frac{1}{u}$

$\quad = -\frac{1}{\ln x}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\underbrace{\cancel{\frac{1}{\ln b}}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\ln 1}}_{\infty}\right) = \infty, \text{ ıraksaktır}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$, farklı yakınsak

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

a_n

$-(n^2+2n+1)$

oran testi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 \, e^{-(n+1)^2}}{n^4 \, e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot e^{-n^2-2n-1+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^4}{n^4}}_{1} \cdot \underbrace{e^{-2n-1}}_{\to 0}$$

$= 0 < 1$

seri yakınsaktır.

Örnek $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1.4}{3.6}\right)^2+\left(\frac{1.4.7}{3.6.9}\right)^2+\ldots\left(\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3.6.9\ldots(3n)}\right)^2$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

a_n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1.4.7\ldots(3n-2)(3n+1)}{3.6.9\ldots(3n).(3n+3)}\right)^2}{\left(\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3.6.9\ldots(3n)}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{1.4.7}\ldots\cancel{(3n-2)}(3n+1)}{\cancel{3.6.9}\ldots\cancel{(3n)}(3n+3)}\right)^2\cdot\left(\frac{\cancel{3.6.9}\ldots\cancel{(3n)}}{\cancel{1.4.7}\ldots\cancel{(3n-2)}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2}=1,$$ birşey söylenemez

Raabe testi

$$\lim_{n\to\infty}n.\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n.\left(\frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\cancel{9n^2}+6n+1-\cancel{9n^2}-18n-9}{9n^2+18n+9}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n.\left(\frac{-12n-8}{9n^2+18n+9}\right)$$

integral yakınsak, $$=\lim_{n\to\infty}\frac{-12n^2-8n}{9n^2+18n+9}=-\frac{4}{3}<-1$$

Kuvvet Serileri

Tanım $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$ şeklindeki bir **seriye kuvvet serisi** denir. Buradaki c_k sayılarına **serinin katsayıları** adı verilir. Eğer; $\forall k>n$ için $c_k=0$ ise; $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n$ olur. Böylece bu kuvvet serisi bir polinom halini alır. Verilen bir kuvvet serisinde esas konu serini yakınsaklığı veya ıraksaklığı değildir. Çünkü serini terimleri x e bağlı olduğunundan bu seri bazı x ler için yakınsak bazı x ler için ıraksaktır. Bu tür serilerde asıl problem hangi x değeri için yakınsak olduğunu bulabilmektir.

bulabilmektir.

$-R < x-a < R$

$a-R < x < a+R$ //

Tanım $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x-a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına bu kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı** seriye yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa **yakınsaklık aralığı** denir.

Teorem (Cauchy-Hadamard): $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi için $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = L$ olsun;

1) $L \neq 0 \Rightarrow R = \dfrac{1}{L}$ dir. Bu halde seri $|x-a| < R$ için yakınsak $|x-a| > R$ için ıraksaktır.

2) $L = 0 \Rightarrow R = \dfrac{1}{L} = \infty$, $\forall x$ için yakınsaktır.

3) $L = \infty \Rightarrow R = 0$ dır. Bu halde seri $x = a$ için yakınsaktır.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ serisini yakınsaklık aralığını bulunuz.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$C_n = \frac{1}{n}$

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \qquad R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$

1

$|x-2| < 1 \rightarrow$ yakınsak

$-1 < x-2 < 1$

$\boxed{1 < x < 3}$ $\qquad x=1, ? \qquad x=3, ?$

i) $\underline{x=1 \text{ için}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ alterne seri $\quad , \; a_n = \frac{1}{n}$

i) $a_{n+1} < a_n$
ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
} seri yak.

i) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$a_{n+1} < a_n$ ✓

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ serisi yakınsak.

ii) $\underline{x=3 \text{ için}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow p=1$ seri ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $\boxed{1 \leq x < 3}$

NOT: Cauchy-Hadamard teoreminde $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=L}$ limiti yerine $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=L}$ kullanılabilir.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^n}{n!}$ serisini yakınsaklık aralığını bulunuz.

$c_n=\frac{1}{n!}$, $L=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{(n+1)!}$

$(n+1)\cdot\cancel{n!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{0}=\infty$

Seri $\forall x$ değeri için yakınsaktır.

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$

$x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ✓

$|x|<1$ için $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ eşitliği mevcuttur. Yani; $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ serisi $|x|<1$ için $f(x)=\frac{1}{x-1}$ fonksiyonunu tanımlamaktadır. Bu durum tüm yakınsak kuvvet serileri için geçerlidir. Her kuvvet serisi yakınsaklık aralığı üzerinde bir fonksiyon tanımlar.