Belirli İntegral

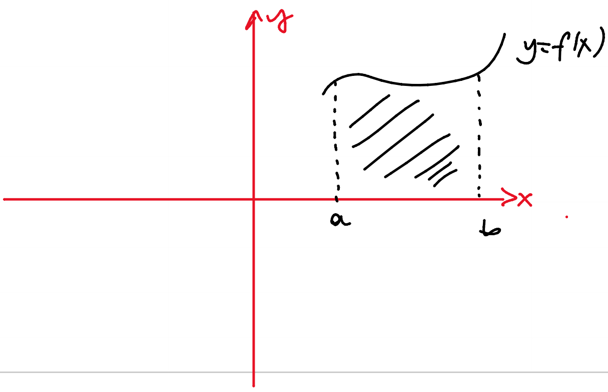
25 Şubat 2022 Cuma 17:11

Belirli İntegral

- Kutupsal Koordinatlar
  - Alan, Yüzey alanı
- Diziler - seriler

- Belirli integral
- integral uygulamaları
  - Alan Hesabı
  - Yüzey Alanı
  - Hacim hesabı
  - Eğri Uzunluğu
  - Moment, Ağırlık Merkezi

BELİRLİ İNTEGRAL



Belirli integral kavramı $y = f(x)$ eğrisi O_x ekseni $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için geliştirilen bir kavram olmakla beraber daha sonraları bir çok alanda kullanılmaya başlanmıştır.

Tanım: $[a,b]$ aralığını $a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < b$ özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim, uygunluğunu sağlamak için a sayısını x_0, b sayısını x_n ile gösterelim;

$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanması veya bölüntüsü denir.

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$ aralıklarında $[a,b]$ nin P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları denir.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu veya ölçüsü denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu maksimal çapı denir. $\|P\|$ ile gösterilir.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ aralığının boyu veya ölçüsü denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu maksimal çapı denir. $\|P\|$ ile gösterilir.

$$\|P\| = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k\right\}$$

Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirine eşit ise bu parçalanmaya düzgün parçalanma denir.

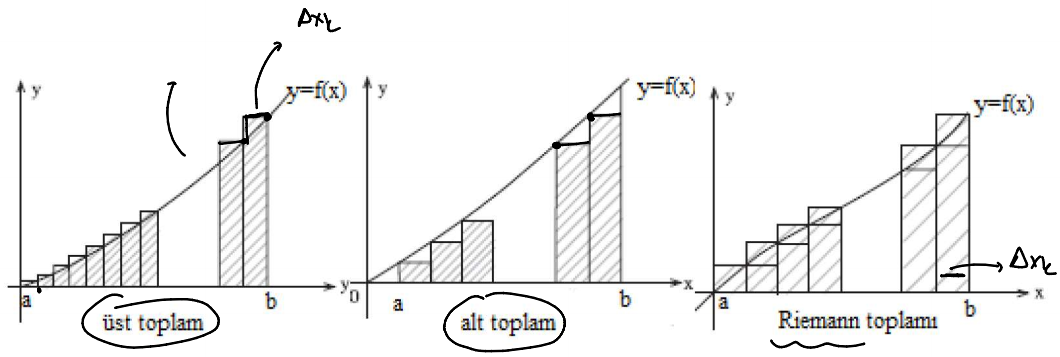
Tanım: $f:\left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $\left[a,b\right]$'nin $P = \left\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\right\}$ parçalanması için;

$$\begin{aligned} M_k &= \max\left\{f(x), x_{k-1} \le x \le x_k\right\} \\ m_k &= \min\left\{f(x), x_{k-1} \le x \le x_k\right\} \end{aligned} \quad \text{olsun.}$$

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k.\Delta x_k \qquad\qquad \ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k.\Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen alt toplamı ve üst toplamı adı verilir. x_k^{*}, $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere $R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{*})\Delta k$ toplamının f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı denir.

$n \to \infty \quad \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$



Tanım: f , $[a,b]$ üzerinde tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer; $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} f(x_k^*)\Delta x_k = I$ limiti varsa bu limite f nin a ’dan b ’ye kadar integrali denir ve $\boxed{\int_a^b f(x_k^*)dx}$ ile gösterilir.

Teorem: f , $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak biçimde sürekli bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu varsa;

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

eşitliği vardır. Bu kurala Newton-Leibniz kuralı denir.

Örnek $\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x.\sin x.dx = ?$

$\cos x = t$

$-\sin x dx = dt$

$$= -\int_0^{\pi/2} t^{3/2}.\,dt = -\frac{2}{5} t^{5/2} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{5} \left(\cos^{5/2} x \,\Big|_0^{\pi/2}\right.$$

$$= -\frac{2}{5}\Big(\underbrace{\left(\cos \tfrac{\pi}{2}\right)^{5/2}}_{0} - \underbrace{(\cos 0)^{5/2}}_{1} \Big)$$

$$= \frac{2}{5} \,/\!/$$

Teorem: f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun.

1) f sürekli ise integrallenebilirdir.

2) f parçalı sürekli ise integrallenebilirdir.

3) f monoton veya 2 monoton fonksiyonun farklı şeklinde yazılabiliyorsa integrallenebilirdir.

Örnek $\int_{-2}^{1} [\![x+3]\!]dx = ?$

$$\int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2$$

$[\![x+3]\!]$

$[3,4] = 3$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow 1 \leq x+3 < 2 \Rightarrow [\![x+3]\!] = 1$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow 2 \leq x+3 < 3 \Rightarrow [\![x+3]\!] = 2$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow 3 \leq x+3 < 4 \Rightarrow [\![x+3]\!] = 3$

$$= \int_{-2}^{-1} [x+3]dx + \int_{-1}^{0} [x+3]dx + \int_{0}^{1} [x+3]dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx + \int_{-1}^{0} 2dx + \int_{0}^{1} 3dx = x\Big|_{-2}^{-1} = (x\Big|_{-2}^{-1} + (2x\Big|_{-1}^{0} + (3x\Big|_{0}^{1} = 1+2+3 = 6$$

Tanım $f:[a,b] \to \mathfrak{R}$ fonksiyonu verilen aralıkta tanımlı ve integrallenebilir olsun;

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $c \in (a,b)$ aralığında bir sayı olmak üzere $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

4) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır. Yani;

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt = ... = \int_a^b f(z).dz$$

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ integralini ele alalım. Bu integralde $g(x)=u$ dönüşümü yapılırsa $\int_a^b f(u).du$ integralini elde ederiz. Bu yeni integralin sınırları $u=g(x)$ eşitliğinde x yerine a ve b yazılarak $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ şeklinde yazılabilir.

Örnek $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = ?$

$\sin x = t$, $x=0$, $\sin 0 = 0$, $t=0$

$\cos x dx = dt$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $t=1$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Eğer integral kısmi integrasyon yardımıyla hesaplanacaksa;

$$\int_a^b u(x).d(v(x)) = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).d(u(x))$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = ?$

$x = u \quad , \quad \cos x dx = dv$

$dx = du \quad , \quad \sin x = v$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

$$= \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}}_{1} + \underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0}\right) - \left(0.\underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0} + \underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \quad //$$

Teorem $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

$f(-x) = -f(x) \to$ tek

$f(-x) = f(x) \to$ çift

1) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{}dx = 0$ tek

2) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{}.dx = 2\int_{0}^{a} f(x).dx$ çift

Örnek $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3.\cos x}{1+\sin^4 x}.dx = ?$

$$f(x) = \frac{x^3 \cos x}{1+\sin^4 x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{1+(\sin(-x))^4} = \frac{-x^3 \cdot \cos x}{1+(-\sin x)^4} = -\underbrace{\frac{x^3 \cos x}{1+\sin^4 x}}_{f(x)} = -f(x), \quad \text{tek}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3 \cos x}{1+\sin^4 x}dx = 0$$

Örnek $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = ?$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} \quad , \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$5+4x-x^2 = 5-(x^2-4x)$$
$$= 9-(x^2-4x+4)$$
$$= 9-(x-2)^2$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} \Big|_0^3 = \arcsin 1 - \arcsin 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$x-2=t \quad , \quad x=2, \quad t=0$

$dx = dt \quad \quad x=5, \quad t=3$

Örnek $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}.d\theta = ?$

$2\sec\theta = u^2 \quad \Rightarrow \sec\theta = \frac{u^2}{2}$, $\theta = 0,\ 2\sec 0 = u^2$

$u = \sqrt{2}$

$\cancel{2}\sec\theta \tan\theta\, d\theta = \cancel{2}u\,du$

$\tan\theta\, d\theta = \frac{u\,du}{\sec\theta} = \frac{u\,du}{\frac{u^2}{2}} = \frac{2du}{u}$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{3},\ 2\sec\frac{\pi}{3} = u^2$

$u = 2$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2du}{u\sqrt{u^2}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2du}{u^2} = -\frac{2}{u}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{2}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \ //$$

Soru $\int_0^2 |1-x|\,dx$ integralini hesaplayınız.

$1-x=0$

$\boxed{x=1}$

$+ \quad 1 \quad -$

$$|1-x| = \begin{cases} -(1-x), & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$