Bileşik Fonksiyonların Türevi

19 Haziran 2022 Pazar 22:02

Bileşik Fonksiyonl...

BİLEŞİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$z = f(x, y)$ fonksiyonundaki x ve y serbest değişkenleri $x = x(t)$ $y = y(t)$ biçiminde yalnızca bir t parametresinin fonksiyonları iseler $z = f(x, y)$ fonksiyonuda $\boxed{z = f(x(t), y(t))}$ biçiminde t nin bileşke fonksiyonudur. Eğer z fonksiyonu x ve y ye göre sürekli ve aynı zamanda x ve y de t'ye göre sürekli ise $z = f(x, y)$ de t'ye göre süreklidir. Bu durumda z fonksiyonu x ve y ye göre türevli ve aynı zamanda x ve y de t'ye göre türevli ise $z = f(x, y)$ de t ye göre türevlidir ve bu türev $z = f(x(t), y(t))$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}}$$ ile verilir.

Benzer dönüşümle $z = f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ biçiminde u ve v gibi iki değişkenli bileşik fonksiyonu denir ve $z = f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v)) = F$ olur ve $z = f(x,y)$ nin u ve v ye göre kısmi türevleri;

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du} = F_u$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dv} = F_v$$

zincir kuralıyla kısmi türev bulma.

(toplam)

Zincir kuralı geçerlidir. Bileşik fonksiyonun tam diferansiyeli ise;

$z = f(x,y)$

$\boxed{dz = 2x\,dx + 2y\,dy}$

$$\begin{aligned} dz = df &= f_x dx + f_y dy \\ &= f_x(x_u du + x_v dv) + f_y(y_u du + y_v dv) \\ &= \boxed{(f_x x_u + f_y y_u)du + (f_x x_v + f_y y_v)dv} \end{aligned}$$

Genel olarak;

$z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ fonksiyonu;

Her $x_i\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ ve $u_j\left(j = 1, 2, ..., m\right)$ gibi m tane bağımsız değişkenin fonksiyonu ise

$x_i = x_i\left(u_1, u_2, ..., u_m\right)$ ise;

$$\frac{df}{du_j} = \sum_{u=1}^{n} \frac{df}{dx_i}\frac{dx_i}{du_j}$$ biçiminde bulunur.

Örnek: $z = f(x,y) = xy^2$ fonksiyonunda $x = e^t$ $y = \sin t$ ise $t = \dfrac{\pi}{2}$ için $\dfrac{dz}{dt}$ yi

a. Doğrudan doğruya

b. Genelleştirilmiş zincir kuralını kullanarak bulunuz.

ⓐ $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$z = f(x(t), y(t))$

$z = xy^2 \leftarrow \boxed{x = e^t, \quad y = \sin t}$

$z = e^t \sin^2 t$

$\dfrac{dz}{dt} = e^t \sin^2 t + e^t . 2 \sin t \cos t$

$\dfrac{dz}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} . \sin^2\frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} . 2 \sin\frac{\pi}{2} . \cos\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}}$

ⓑ $z = f(x(t), y(t))$

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} . \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} . \dfrac{dy}{dt} = y^2 . e^t + 2xy . \cos t$

$= \sin^2 t \; e^t + 2e^t \sin t \cos t$

$\dfrac{dz}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = e^{\pi/2}$

Örnek: $u = f(x, y, z) = x^2yz^2$ fonksiyonunda $x = t^2 + 1$ $y = \ln\left(2t^3 - 2\right)$ $z = \arctan t$ ise $\dfrac{du}{dt}$ yi genelleştirilmiş zincir kuralını kullanarak bulunuz.

$$u = f(x,y,z) = x^2yz^2 \quad , \quad x = t^2+1, \quad y = \ln(2t^3-2), \quad z = \arctan t$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= 2xyz^2\cdot(2t) + x^2z^2\cdot\left(\frac{6t^2}{2t^3-2}\right) + 2x^2yz\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = 2(t^2+1)\cdot\ln(2t^3-2)\cdot\arctan t^2\cdot(2t) + (t^2+1)^2(\arctan t)^2\cdot\left(\frac{6t^2}{2t^3-2}\right) + 2(t^2+1)^2\cdot\ln(2t^3-2)\cdot\arctan t\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right) //$$

Örnek: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x=\sin t \quad y=\cos t \quad \dfrac{dz}{dt}=?$

$$z = z(x(t), y(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (\cos t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (-\sin t)$$

$$= \frac{\sin t \cdot \cos t - \cos t \sin t}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ //}$$

Örnek: $z = u^v$ fonksiyonunun $u = u(x)$ $\xrightarrow{\frac{du}{dx}}$, $v = v(x)$ $\xrightarrow{\frac{dv}{dx}}$ olarak tanımlandığında $\dfrac{dz}{dx}$ i genelleştirilmiş zincir kuralını kullanarak bulunuz.

$Z = u^v, \quad \dfrac{dz}{dx} = ?$

dx

$Z = z(u(x), v(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = v u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln(u)\cdot\frac{dv}{dx}}$$

Örnek: $z = y + F(u)$ fonksiyonunda $\boxed{u = x^2 - y^2}$ olmak üzere türevlenebilen u fonksiyonu için $y\dfrac{dz}{dx} + x\dfrac{dz}{dy} = ?$

$$\boxed{z = y + F(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot 2x$$

$$\frac{dz}{dy} = 1 + \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dy} = 1 + \frac{dF}{du} \cdot (-2y)$$

$$y\frac{dz}{dx} + x\frac{dz}{dy} = \cancel{2xy\frac{dF}{du}} + x - \cancel{2xy\frac{dF}{du}} = x \checkmark$$

Örnek: $z = f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ fonksiyonunda $x = 2u - 3v$ $\quad y = -u + v$ olmak üzere $\dfrac{df}{du}, \dfrac{df}{dv}$ kısmi türevlerini zincir kuralından bulunuz.

$z = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)$$

$$= \frac{2u - 2v}{(2u-3v)^2} - \frac{1}{2u-3v}$$

$$= \frac{\cancel{2u} - 2v - \cancel{2u} + 3v}{(2u-3v)^2} = \frac{v}{(2u-3v)^2} \quad //$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot (-3) + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (1)$$

$$= \frac{-3u + 3v}{(2u-3v)^2} + \frac{1}{2u-3v}$$

$$= \frac{-3u + 3v + 2u - 3v}{(2u-3v)^2} = \frac{-u}{(2u-3v)^2} \quad //$$

Örnek: $u = f(x, y)$ fonksiyonunda $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ olmak üzere zincir kuralından faydalanarak $\left(\dfrac{df}{dr}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{df}{d\theta}\right)^2 = \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2$ olduğunu gösteriniz.

$$u = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\cancel{r}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-\cancel{r}\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\cancel{r}\cos\theta)\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta - \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Örnek: $z = f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ fonksiyonu da $x = u\sin v$ $y = u\cos v$ olduğuna göre $\dfrac{dz}{du}, \dfrac{dz}{dv}$

kısmi türevlerin genelleştirilmiş zincir kuralından bulunuz.

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} = ? =$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\sin v + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\cos v$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\sin v - \frac{x}{x^2+y^2}\cos v$$

$$= \frac{u\cos v.\sin v - u\sin v\cos v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v} = \frac{0}{u^2} = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2}\cdot(u\cos v) - \frac{x}{x^2+y^2}(-u\sin v)$$

$$= \frac{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v} = 1 \checkmark$$

Örnek: $z = f(u,v)$ fonksiyonunda $u = x^2 + y^2$ $v = xy$ olmak üzere $\dfrac{d^2 f}{dxdy}$ kısmi türevini genelleştirilmiş zincir kuralından bulunuz.

$u = x^2 + y^2, \quad v = xy, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\, y\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\, 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\, y\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot y\right)\cdot 2y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial u}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\, y\right) x$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} + 2x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot xy}$$ ***