Diziler

22 Mayıs 2022 Pazar 23:40

Diziler

DİZİLER

Tanım Tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan fonksiyona bir **sonsuz dizi** veya kısaca **dizi** denir. Fonksiyonun değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye bir **reel terimli dizi** adı verilir.

$f(1)=a_1, f(2)=a_2 \ldots\ldots\ldots f(n)=a_n$ ise $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ reel sayılarına dizinin $1., 2., \ldots\ldots\ldots, n.$ terimleri denir. n doğal sayısına karşılık gelen a_n sayısına **dizinin genel terimi** denir.

Örnek $\dfrac{1}{n^3}$ dizisi denilince $1, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{3^3}, \ldots$ olan dizi anlaşılır

$\left(\dfrac{2n+1}{3}\right)$

Örnek $\left(\dfrac{2n+3}{4n-2}\right)$ dizisinin 15.terimini bulunuz.

Çözüm $a_{15}=\dfrac{2.15+3}{4.15-2}=\dfrac{33}{58}$

Örnek $a_1 = 1$ ve $\forall n \geq 1$ sayısı için $a_n = (n-1)!a_1$ olduğuna göre ~~a_n~~, a_{100} nedir?

$n=2,\quad a_2 = 1!\,a_1 = a_1$

$n=3,\quad a_3 = 2!\,a_1$

$\vdots$

$n=100 \Rightarrow a_{100} = 99!\,a_1 = 99!$

Tanım $A_p = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere tanım kümesi A_p olan her fonksiyona bir **p terimli sonlu** dizi denir.

Örnek $A_5 = \{1,2,3,4,5,\}$ $f : A_5 \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon $f(n) = 2n-3$ sonlu dizisinin terimlerini bulunuz.

$n=1,\quad f(1) = -1$

$n=2,\quad f(2) = 1$

$n=3,\quad f(3) = 3$

$\vdots$

$f(4) = 5$

$f(5) = 7$

$\{-1, 1, 3, 5, 7\}$

Tanım $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n = d$ olacak biçimde bir d sayısı varsa a_n dizisine bir **aritmetik dizi** denir. d sayısına da bu dizinin **ortak farkı** denir.

Örnek $(3n+4)$ dizisinin bir aritmetik dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm $a_{n+1} - a_n = [3(n+1)+4] - (3n+4) = 3 \in \mathbb{R}$ olduğu için aritmetik dizidir.

NOT: $cn+d$ biçimindeki diziler ortak farkı c olan birer aritmetik dizidir. Aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı aşağıdaki gibi bulunur.

$a_1 = c \cdot 1 + d = c + d$

$a_2 = c \cdot 2 + d$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$S_n = (c1 + d) + (c2 + d) + \ldots + (cn + d)$$

$$= c(1+2+..n) + nd = c\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + nd$$

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n}{2}\left(c(n+1) + 2d\right) = \frac{n}{2}(cn + c + d + d)$$

$d+d$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

$\underbrace{(c+d)}_{a_1} + \underbrace{(cn+d)}_{a_n}$

$a_1 = \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3}$

$a_{15} = \frac{15}{3} + 5 = 10$

Örnek $a_n = \left(\frac{n}{3} + 5 \right)$ dizisinin ilk 15 teriminin toplamını bulunuz.

Çözüm $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{15}{2}\left(\frac{16}{3} + 10 \right) = 10 + 105 = 115$

Tanım $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak biçimde bir r reel sayısı varsa a_n dizisine bir **geometrik dizi** denir. r sayısına da bu dizinin ortak çarpanı veya ortak oranı denir.

Örnek $a_n = (4 * 7^n)$ dizisinin bir geometrik dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4 * 7^{n+1}}{4 * 7^n} = 7 \in \mathbb{R}$ //

✪Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamını bulmak için önce;

$$T_n = 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \ldots + \cancel{r^n}$$

$$-\quad rT_n = \cancel{r} + \cancel{r^2} + \ldots + \cancel{r^n} + r^{n+1}$$

$$T_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$T_n - rT_n = 1 - r^{n+1}$

$\boxed{T_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}}$ eşitliği elde edilir. O halde $r \neq 1$ için $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ olur.

Bu dizinin ilk n terimini toplamı

$a_2 = a_1 . r$

$a_3 = a_2 . r = a_1 . r^2$

$a_4 = a_3 . r = a_2 r^2 = a_1 r^3$

$$G_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$G_n = a_1 + a_1 r + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$G_n = a_1\left(1 + r + r^2 \ldots + r^{n-1}\right)$$

$\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-r^{n-1+1}}{1-r}$

$\boxed{G_n = \left(a_1 \frac{1-r^n}{1-r}\right)}$ ** olarak bulunur.

Tanım $\forall n$ pozitif tam sayısı için

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ artandır ✓

$a_n > a_{n+1} \Rightarrow a_n$ azalandır ✓

$\Big\}$ monoton dizi

$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n$ azalmayandır ✓

$a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow a_n$ artmayandır denir. ✓

$a_{n+1} > a_n$

$a_{n+1} > a_n$
$< a_n$

*Artan veya azalan dizilere **monoton** denir.

$a_{n+1} - a_n > 0$, monoton artan
< 0 , 〃 azalan

Örnek $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ dizisini artan veya azalan olduğunu bulunuz.

$$a_{n+1} - a_n = \underset{(n)}{\frac{n+2}{n+1}} - \underset{(n+1)}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}-(\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1)}{n(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

$a_{n+1} - a_n < 0$

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ monoton azalan

NOT: $a_n > 0$ olduğunda $\forall n$ pozitif tamsayısı için;

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n$ dizisi artandır

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n$ dizisi azalandır.

Örnek $\left(\dfrac{2^n}{(n+1)!}\right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\dfrac{2^n}{(n+1)!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{2^n}}$$

$$= \frac{2}{n+2} < 1$$

$n=1,$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

monoton azalan

Tanım $\forall n$ doğal sayısı için $S_n \le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa S_n dizisine **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına bu dizinin üst sınırı adı verilir.

$\forall n$ doğal sayısı için $S_n > m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa S_n dizisine **alttan sınırlıdır** denir. m sayısına bu dizinin alt sınırı adı verilir.

Örnek $\left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)$ dizisinin sınırlılığını inceleyiniz.

Çözüm $\dfrac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow -1 < \left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right) < 1$ olduğundan hem alttan hem üstten sınırlıdır.

Dizilerin Yakınsaklığı

$k=\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\varepsilon\}=\{a-\varepsilon,a+\varepsilon\}$ aralığına a'nın ε komşuluğu denir.

Örnek 3'ün $\frac{1}{1000}$ komşuluğu $\Rightarrow\left\{3-\frac{1}{1000},3+\frac{1}{1000}\right\}=\left\{\frac{2999}{1000},\frac{3001}{1000}\right\}$ dir.

Tanım a_n reel terimli bir dizi $a\in\mathbb{R}$ olsun, a sayısının her bir komşuluğu a_n dizisinin sonlu terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa a_n dizisi a **sayısına yakınsıyor** veya a_n **dizisinin limiti** a denir.

$(a_n)\rightarrow a$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,(a_n)\to a$$

biçiminde gösterilir. Yakınsak olmayan dizilere de ıraksak denir.

Teorem $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, \lambda \in \mathbb{R}$

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = a.b$

3) $b_n \neq 0, b \neq 0; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

4) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$

olur.

Teorem $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n}{n} = a$ dir.

Teorem a_n pozitif terimli bir dizi olsun;

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ olur.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Örnek $\sqrt[n]{n}$ in limitini hesaplayınız.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n$

Çözüm $a_n = n \to \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olur

Teorem Sonlu sayıdaki terimler hariç diğer tür terimler için $a_n \le b_n \le c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ dir. Buna **sandviç teoremi** denir.

Sıkıştırma

$\lim b_n = \ell$

Örnek $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ dizisinin limiti bulunuz.

$-1 \le \cos n \le 1$

$-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

monoton + sınırlı = yakınsak //

Teorem Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Örnek $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

i) monoton, $a_{n+1} - a_n > 0$, $a_{n+1} > a_n \nearrow$

< 0 , $a_{n+1} < a_n \searrow$ $\Rightarrow$ monoton

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $a_{n+1} > a_n \nearrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $a_{n+1} < a_n \searrow$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2n}} \right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

(2)

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

$(2n+2)$ $(2n+1)$ $+$ $+$

$a_{n+1} - a_n > 0$, monoton artan

ii) sınırlı , $a_1 = \frac{1}{2}$, $\rightarrow$ alt sınır

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$n+n$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1}$$

$+$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{n}{n+1} , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1 , \quad \text{sınırlı}$$

$\frac{}{n+1}, \frac{}{n+2}, \quad <1 \quad n+1 \quad n \to \infty \quad n+1$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1 \quad , \quad \text{sınırlı}$$

Monoton + sınırlı = yakınsak

Teorem (a_n) dizisi sınırlı ve (b_n) dizisi sıfıra yakınsak ise $(a_n b_n)$ dizisi de sıfıra yakınsar.

Örnek $\left(\underbrace{(-1)^n}_{\text{sınırlı}} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{\to 0} \right)$ dizisinin limitini bulunuz.

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ sınırlı

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Çözüm $a_n = (-1)^n$ olsun $-1 \leq a_n \leq 1 \rightarrow$ sınırlıdır

$b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n \dfrac{n}{n^2+1} \right) = 0$ olur.

Teorem $|r| < 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ dır.

$r = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} \rightarrow 0$

Tanım (k_n) pozitif tam sayıların artan bir dizisi olmak üzere; (a_{k_n}) dizisine (k_n) dizisinin alt dizisi denir.

Örnek $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin alt dizileri aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{1}{n}\right)=1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n}$$

$\left(\frac{1}{2n}\right) \subset \left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow k_n = 2n = \left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow k_n = 2n-1 = \left(\frac{1}{2n-1}\right) = 1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{2n-1}$$

$$\Rightarrow k_n = n^2 = \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{n^2}$$

Teorem (a_n) dizisinin limiti a ise (a_{k_n}) alt dizisinin de limiti a'dır.