



Dönel
Yüzeylerin...

DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI

Dönel yüzey bir eğri veya eğri parçasının kendisiyle aynı düzlemde bulunan bir eksen tarafından döndürülmesiyle oluşan bir yüzeydir. Küre, koni ve silindir dönel yüzeylere birer örnektir. Dönel yüzeylerin alanlarını bulmanın genel yolu verilen eğri parçasını doğru parçalarının birleşimi gibi düşünmek, bu doğru parçalarının eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan kesik konilerin yüzey alanlarını bulup bunları toplamaktır. Bu alan genel alana çok yakındır.

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde türevli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisinin x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı;

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



şeklinde bulunur.

Benzer olarak $x=u(y)$ $c \leq y \leq d$ olan eğri parçasının y eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı;

$$S = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

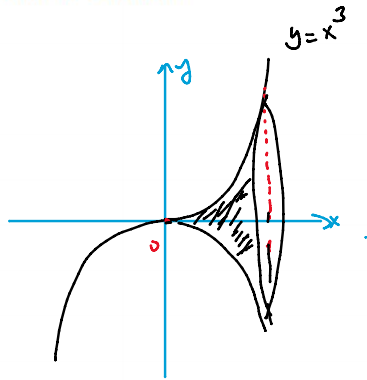
şeklinde bulunur.

$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ denklemlili eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı ile denklemin $y = f(x) - k$, $a \leq x \leq b$ olan eğri parçasının $y = 0$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı aynıdır. Diğer taraftan $(f(x) - k)' = f'(x)$ olacağından $y = f(x)$ denklemlili eğri parçasını $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı;

$$S = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

şeklinde bulunur.

Örnek $y = x^3$ olan eğri parçasının $0 \leq x \leq 1$, x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.



$$S = 2\pi \int_0^1 y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = x^3, \quad y' = 3x^2, \quad (y')^2 = 9x^4$$

$$1 + (y')^2 = 1 + 9x^4$$

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

$$1 + 9x^4 = u^2, \quad x=0, u=1$$

$$36x^3 dx = 2u du, \quad x=1, u=\sqrt{10}$$

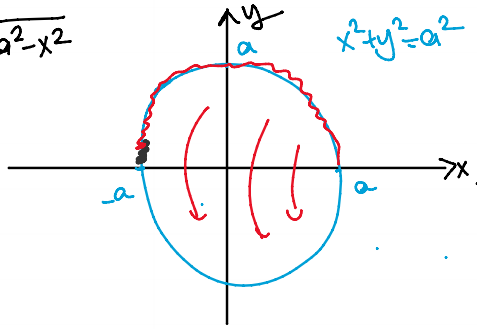
$$x^3 dx = \frac{u du}{18}$$

$$S = \frac{2\pi}{18} \int_1^{\sqrt{10}} u^2 du = \frac{\pi}{9} \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\pi}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \text{ birim}^2$$

Örnek a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını bulunuz.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$V = 2\pi \int_{-a}^a y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

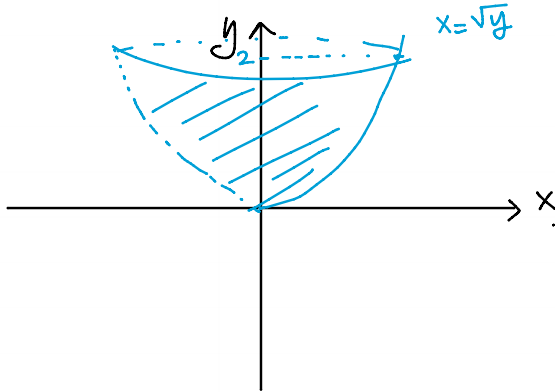
$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^a \cancel{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2}}{\cancel{\sqrt{a^2 - x^2}}} dx$$

$$S = 2\pi a \int_{-a}^a dx = 2\pi a \left(x \Big|_{-a}^a \right) = 2\pi a (a - (-a)) \\ = \underline{\underline{4\pi a^2}}$$

Eğrisinin oranınla kalın parçasının

Örnek $x = \sqrt{y}$, $0 \leq y \leq 2$ doğrusu y eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.



$$S = 2\pi \int_0^2 x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{4y}$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4y} = \frac{4y+1}{4y}$$

$$S = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{4y+1}{4y}} dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 \cancel{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{4y+1}}{\cancel{2\sqrt{y}}} dy$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{4y+1} dy$$

$$4y+1 = u^2, \quad y=0, \quad u=1$$

$$4dy = 2u du \quad y=2, \quad u=3$$

$$dy = \frac{u du}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^3 u^2 du = \frac{\pi}{2} \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(9 - \frac{1}{3} \right) = \frac{13\pi}{3} \text{ br}^2 //$$

Örnek $x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Eğri parçasının denklemi $x = u(t), y = v(t), t_1 \leq t \leq t_2$ biçiminde verilirse bu eğrinin x ekseninde döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı;

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

şeklinde bulunur.

Eğrinin y ekseninde döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı ise;

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

řeklindedir.

Örnek $x = a(t - \sin t)$
 $y = a(1 - \cos t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisinin bir yayının x eksenine etrafında döndürülmesiyle

oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.