Eğri Uzunluğu

20 Mart 2022 Pazar 20:41

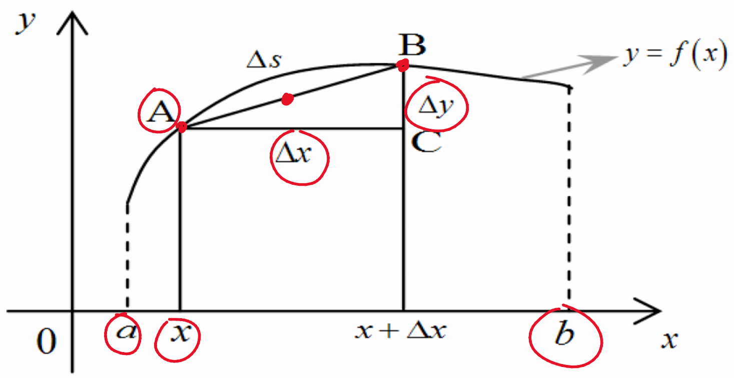
Eğri
Uzunluğu

EĞRİ UZUNLUĞU

Kartezyen Koordinat Sisteminde Yay Uzunluğu Hesabı

$y = f(x)$ eşitliği ile verilen türevli olan f fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ apsisli noktalar arasındaki yay uzunluğuna bakalım.

$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta s^2$



Δx ‘i çok küçük aldığımızda AB yayının Δs uzunluğu ile $[AB]$ doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak birbirine eşittir. Bu yaklaşık eşitlikten yola çıkarak,

$\lim_{x \to 0} \Delta x =$

$\Delta x \to dx$

$\Delta s \to ds$

$\Delta y \to dy$

$$dl \quad \Delta s \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,.\Delta x$$

yazabiliriz. Her iki tarafı Δx ile bölüp $\Delta x \to 0$ için limit alacak olursak,

$\int dl = l$

$$S' = \sqrt{1+(y')^2}$$

olarak bulunur. Diferansiyel ve integral hesabının temel teoremine göre

$y = f(x)$

$$** \quad \boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

şeklinde bulunur.

şeklinde bulunur.

Örnek $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ eğrisinin $x = 2$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan parçanın uzunluğunu bulunuz.

$$l = \int_2^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad , \quad y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$$

$$1+(y')^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2$$

$$= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \left(\ln x + \frac{x^2}{8}\right|_2^4$$

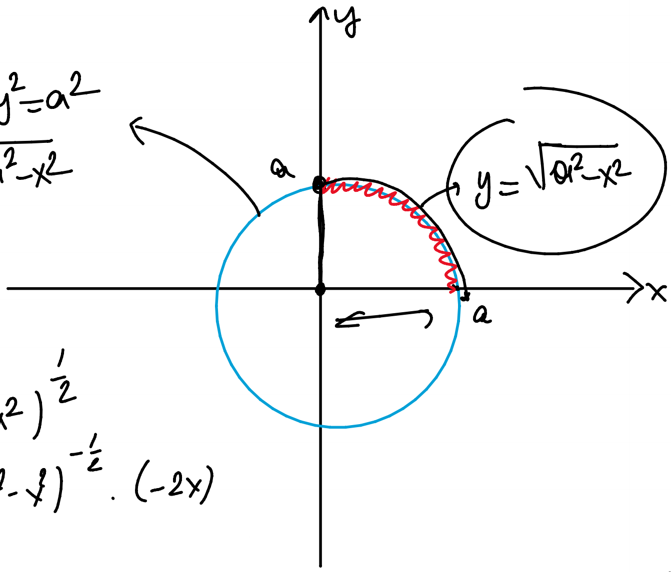
$$= (\ln 4 + 2) - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + \frac{3}{2} \text{ br}$$

Örnek a yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.

$x^2+y^2=a^2$

$y=\mp\sqrt{a^2-x^2}$



$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}\cdot(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}$$

$$1+(y')^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}$$

$$l = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

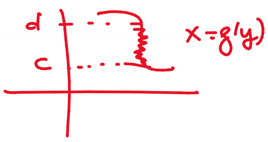
$$= 4a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= 4a\left(\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a\right)$$

$$= 4a(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 4a\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$= 2\pi a \text{ br}$$

NOT: Eğer eğri parçasının denklemi $x=g(y)$, $c \le y \le d$ biçiminde verilirse eğri parçasının uzunluğu;



$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\boxed{l = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$ ile hesaplanır.

Uzunluğu bulunmak istenen eğrinin parametrik denklemi $\begin{array}{l} x=u(t) \\ y=v(t) \end{array}$, $t_1 \le t \le t_2$ ise bu eğrinin uzunluğu;

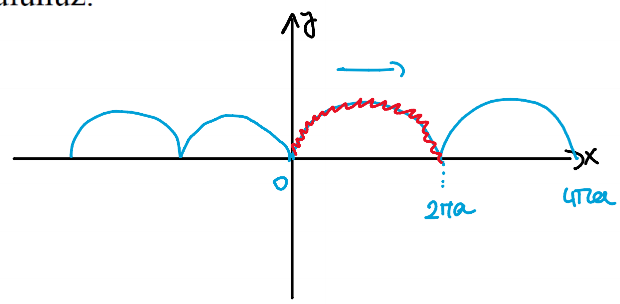
$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}+1 \longrightarrow$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt} \quad **$$

biçiminde hesaplanır.

biçiminde hesaplanır.

Örnek $\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ parametrik denklemi olan eğrinin bir yayının uzunluğunu bulunuz.



$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\sin t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2$$

$$= a^2(1-2\cos t+\cos^2 t) + a^2\sin^2 t$$

$$= a^2 - 2a^2\cos t + \underbrace{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}_{a^2}$$

$$= 2a^2 - 2a^2\cos t$$

$$= 2a^2(1-\cos t)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \qquad = 2\cos^2 t - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 t$$

$$2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$$

$$\boxed{2\sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t}$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\, dt$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

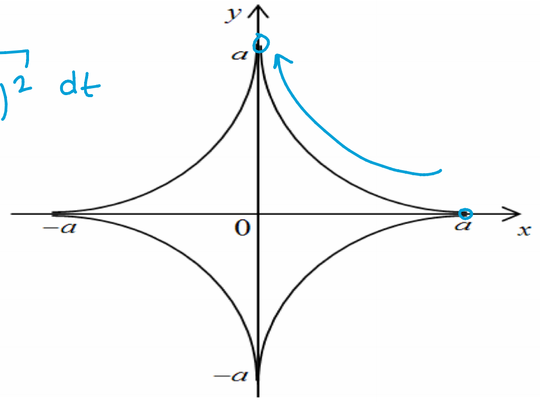
$$\ell = \int_0^{2\pi} 2a \cdot \sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$\ell = -4a\left(\cos \frac{t}{2} \right|_0^{2\pi}$$

$$\ell = -4a(\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = 8a$$

Örnek $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ denklemi ile verilen astroidin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t$$

$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\,(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})$$

$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\, dt$$

$\sin t = u$, $t=0$, $u=0$

$\cos t\, dt = du$, $t=\frac{\pi}{2}$, $u=1$

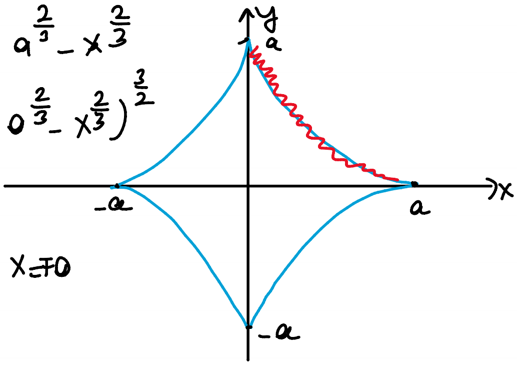
$$= 12a\int_0^1 u\, du$$

$$= 12a\left(\frac{u^2}{2}\Big|_0^1\right) = 6a$$

Örnek $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroid eğrisinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$



$y=0,\quad x=\mp a$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\cancel{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right).\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \underbrace{x^{\frac{2}{3}} . x^{-\frac{2}{3}}}_{1}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}} . x^{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \cancel{1} + a^{\frac{2}{3}} . x^{-\frac{2}{3}} \cancel{-1}$$

$$l = 4\int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}}\,dx = 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx = 4a^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a\right.$$

$$= 6a^{\frac{1}{3}}.\left(a^{\frac{2}{3}} - 0\right)$$

$$= \underline{\underline{6a}}$$