Seriler

25 Mayıs 2022 Çarşamba 23:43

Seriler

SERİLER

Bir (a_n) dizisi için $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ toplamı kısaca $\sum_{n=1}^{k} a_n$ sembolü ile gösterilir.

Tanım (a_k) bir dizi olmak üzere; $\sum_{k-1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ biçimindeki bir ifadeye **sonsuz seri** veya kısaca **seri** denir. a_n ifadesine **serinin genel terimi** adı verilir. Toplama işlemi ikili bir işlem olduğu için sonlu ~~sonlu~~ çoklukta sayılar toplanabilir. $\sum_{k-1}^{\infty} a_k$ serisi verildiğinde (a_k) dizisinin ilk n teriminin toplamında (S_n) dizisine **kısmi toplamlar dizisi** denir. $(S_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Tanım Bir serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seriye **yakınsak seri** adı verilir. Kısmi toplamlar dizisinin limitine serinin toplamı denir. Yakınsak olmayan serilere ise **ıraksak seri** denir. Yani $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ dir

Örnek $\sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(k+1) + B.k$$

$(k+1)$ (k)

$A = 1, \quad A+B = 0, \quad B = -1$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \text{ yakınsak}, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$$

Örnek $|r|<1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a.r^{k-1} = a.\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = a.\left(1+r+r^2+\dots+r^{n-1}\right)$$

$$= a.\left(\frac{1-r^{n-1+1}}{1-r}\right)$$

$$= a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a.\left(\frac{1-\cancel{r^n}^{\,0}}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}\ , \text{ yakınsak}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a r^{k-1} = \frac{a}{1-r}}$$

Örnek $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ serisinin yakınsaklığını ve serinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{n}}{n+1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = -\log(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\log(n+1)\right) = -\infty,\ \text{ıraksak}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Teorem a) $\sum a_n = a, \sum b_n = b \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = a + b$

b) $\sum a_n = a, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum \lambda a_n = \lambda a$

Teorem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur. Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olması $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez.

*(karşıt örnek): $\lim_{n\to\infty} \log\frac{n}{n+1} = \log\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}_{1}\right) = \log 1 = 0$ olduğu halde $\sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{n}{n+1}$ serisi ıraksaktır (bir önceki örnekte göstermiştik).

SONUÇ: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Tanım $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + \ldots$ toplamına $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin **kalan terimi** denir.

Teorem Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.

Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri

Bütün serilerin kısmi toplamlar dizisini hesaplayıp yakınsaklığını incelemek mümkün değildir. Bu halde serinin yakınsaklığı hakkında bir şeyler söylemek için yakınsaklık testleri(kriterleri) denilen bazı testler vardır.

Tanım $\forall k$ doğal sayısı için $a_k \geq 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **pozitif terimli seri** denir.

Pozitif terimli serilerin kısmi toplamlar dizisi monoton artan olduğundan bu serinin yakınsak olduğunu göstermek için kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Pozitif terimli seriler için yakınsaklık testleri aşağıdaki gibidir;

Karşılaştırma Testi:

$a_k \le b_k$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \ge 0$, $b_k \ge 0$ ve $a_k \le c b_k$ olacak şekilde bir c sabiti mevcut olsun.

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

$\rightarrow \sum b_k$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisi de yakınsaktır.

$\rightarrow \sum a_k$ serisi ıraksak ise $\sum b_k$ serisi de ıraksaktır.

Örnek $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$k>0, \quad k+1>0$

$\sin^2 k \le 1 \qquad\qquad k(k+1)>0$

$$\frac{\sin^2 k}{k(k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)}$$

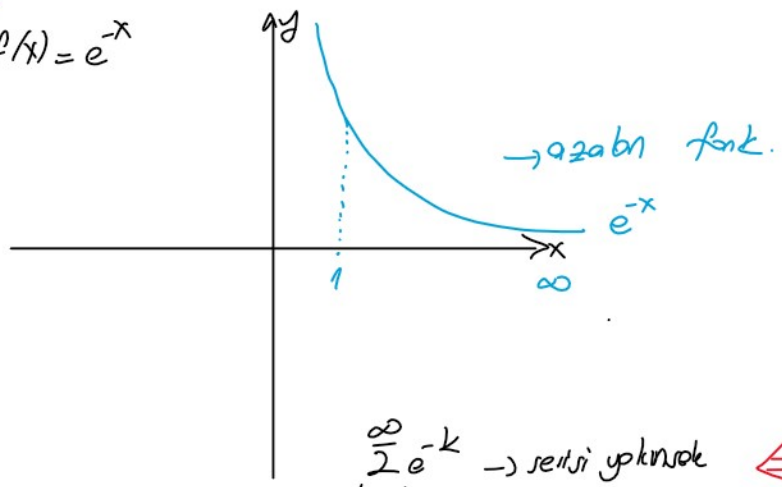
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow$ yakınsak old. dan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ yakınsak

İntegral Testi:

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun ve f de $[1,\infty)$ aralığında pozitif terimli sürekli azalan bir fonksiyon ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(k) = a_k$ olsun. $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olmasıdır.

Örnek $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$f(x) = e^{-x}$



$$= \int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x} \Big|_1^b \right.$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\cancel{e^{-b}} + e^{-1} \right)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ → serisi yakınsak $\Leftarrow$ $= \frac{1}{e}$, integral yakınsak

Not

(Bir serinin baştan birkaç teriminin alınması veya değiştirilmesi serinin yakınsaklık durumunu değiştirmeyeceğinden integral testinde f fonksiyonunun tanım kümesi olan $[1,\infty)$ aralığı değiştirilebilir.)

Örnek $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}\ , \quad \text{azalan fonk.}$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}\ , \quad \ln x=u,\ \frac{dx}{x}=du \Rightarrow \int\frac{du}{u}=\ln u=\ln(\ln x)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln x)\right)\Big|_2^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\ln(\ln b)}_{\infty}-\underbrace{\ln(\ln 2)}_{\text{sayı}}\right)=\infty\ , \quad \text{ıraksak}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}\ , \text{ ıraksak}$$

Tanım p serisi denilen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serileri $p>1$ değeri için yakınsak, $p\le 1$ değeri içinde ıraksak serilerdir.

Örnek $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k^2}}{k\sqrt{k}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$e^{-k^2}<1$$

$$\frac{e^{-k^2}}{k\sqrt{k}}<\frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\qquad p=\frac{3}{2}>1\ , \text{ yakınsak}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k^2}}{k\sqrt{k}}\ , \text{ yakınsak}$$

Limit Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri, $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = \gamma$ olsun.

- $0 \le \gamma < \infty$ ve $p > 1$ ise $\sum a_n$ yakınsaktır.
- $0 < \gamma \le \infty$ ve $p \le 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{5n^3+4}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$p=2$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{2n-2}{5n^3+4}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-2n^2}{5n^3+4} = \frac{2}{5} \rightarrow \gamma = \frac{2}{5}$$

$p=2>1$, $0 \le \gamma = \frac{2}{5} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{5n^3+4}$ serisi yakınsaktır.

***

Oran Testi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olsun.

- Eğer $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi yakınsaktır
- Eğer $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi ıraksaktır
- Eğer $r = 1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi ile ilgili bir şey söylenemez. yakınsak veya ıraksak olabilir.

$\lim_{x\to\infty} (1+u(x))^{v(x)}$

$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} u(x).v(x) = k$

$\lim_{x\to\infty} (1+u(x))^{v(x)} = e^k$

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$a_n = \frac{n^n}{2^n . n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}.(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n . n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}.(n+1)!} . \frac{2^n . n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n . \cancel{(n+1)}}{\cancel{2^n}. 2 \, \cancel{(n+1)}.\cancel{n!}} \frac{\cancel{2^n} . \cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{e}{2} > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \rightarrow \text{ıraksaktır}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot n = 1$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

$a_n = \frac{1}{n!}$

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\,n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \text{ yakınsak}$$

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}}^{a_n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n} \cdot 4 \cdot (n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{4^n} \cdot n!\, n!}$$

$(n+1)!=(n+1)\,n!$, $2n+2 = 2(n+1)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+4}{4n+2} = 1$$

a_{n+1}, a_n

yakınsak veya ıraksak olabilir

$*$ $a_1 = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

$a_{n+1} > a_n$, seri ıraksaktır.

Kök Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ olsun.

- Eğer $r<1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi yakınsaktır
- Eğer $r>1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi ıraksaktır
- Eğer $r=1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi ile ilgili bir şey söylenemez.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5} < 1, \text{ seri yakınsak}$$

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} (n)\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1, \text{ yakınsak}$$

Raabe Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir serisi için $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = t$ olsun.

- $t<-1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi yakınsaktır.
- $t>-1 \Rightarrow \sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Yukarıdaki örnekte, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+4}{4n+2}$

$$\lim n\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = \lim n\cdot\left(\frac{4n+4}{4n+2}-1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{4n+4}{4n+2}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{4n+4-4n-2}{4n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n+2} = \frac{1}{2} > -1$$, seri ıraksaktır.