

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

Örnek: Bir işletme iki ürün üretmek ve optimum üretim programını belirlemek istemektedir. Problem ile ilgili veriler aşağıda verilmiştir.

	A ürünü	B ürünü
Birim satış fiyatı	20	20
Birim değişken maliyet	16	14

Bir birim ürünün üretimi için gerekli makine saati	Toplam Kapasite		
	1. ürün	2. ürün	(Makine saati)
1. Makine	4	2	400
2. Makine	2	2	240
3. Makine	-	6	480

Toplam sabit maliyetler 560 pb'dir.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

İstenenler

1. Katkı payını maksimum yapan doğrusal programlama modelini kurunuz.
2. Kurduğunuz modelin dualini (ikincilini) alınız.
3. Dual modeli simpleks yöntemi ile çözünüz.
4. Çözüm sonuçlarını açıklayınız.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

$$Z = 4X_1 + 6X_2 \rightarrow \text{Maks.} \quad Z = 400Y_1 + 240Y_2 + 480Y_3 \rightarrow \text{Min.} \quad Z = 400Y_1 + 240Y_2 + 480Y_3 \rightarrow \text{Min.}$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$$4Y_1 + 2Y_2 \geq 4$$

$$-4Y_1 - 2Y_2 \leq -4$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 240$$

$$2Y_1 + 2Y_2 + 6Y_3 \geq 6$$

$$-2Y_1 - 2Y_2 - 6Y_3 \leq -6$$

$$6X_2 \leq 480$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$Z = 400Y_1 + 240Y_2 + 480Y_3 + 0S_1 + 0S_2 \rightarrow \text{Min.}$$

$$-4Y_1 - 2Y_2 + S_1 = -4$$

$$-2Y_1 - 2Y_2 - 6Y_3 + S_2 = -6$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, S_1, S_2 \geq 0$$

	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	P_0
S_1	-4	-2	0	1	0	-4
S_2	-2	-2	-6	0	1	-6
$z_j - c_j$	-400	-240	-480	0	0	0

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	P_0
S_1	-4	-2	0	1	0	-4
S_2	-2	-2	-6	0	1	-6
$z_j - c_j$	-400	-240	-480	0	0	0

$$|-400 / -2| = 200 \quad |-240 / -2| = 120 \quad |-480 / -6| = 80^*$$

	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	P_0
S_1	-4	-2	0	1	0	-4
Y_3	1/3	1/3	1	0	-1/6	1
$z_j - c_j$	-240	-80	0	0	-80	480

	-400	-240	-480	0	0	0
480	(1/3	1/3	1	0	-1/6	1)
	-400	-240	-480	0	0	0
	160	160	480	0	-80	480
	-240	-80	0	0	-80	480

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	S ₁	S ₂	P ₀
S ₁	-4	-2	0	1	0	-4
Y ₃	1/3	1/3	1	0	-1/6	1
z _j - c _j	-240	-80	0	0	-80	480

$$|-240 / -4| = 60 \quad |-80 / -2| = 40^*$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	S ₁	S ₂	P ₀
Y ₂	2	1	0	-1/2	0	2
Y ₃	-1/3	0	1	1/6	-1/6	1/3
z _j - c _j	-80	0	0	-40	-80	640

	1/3	1/3	1	0	-1/6	1
-1/3	(2	1	0	-1/2	0	2)
1/3	1/3	1/3	1	0	-1/6	1
-2/3	-1/3	0	1/6	0	-2/3	
-1/3	0	1	1/6	-1/6	1/3	

	-240	-80	0	0	-80	480
80	(2	1	0	-1/2	0	2)
-240	-80	0	0	-80	480	
160	80	0	-40	0	160	
-80	0	0	-40	-80	640	

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA İKİLİK (DUALİTE)

DUAL (İKİNCİL) MODELİN ÇÖZÜMÜ

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	S ₁	S ₂	P ₀
Y ₂	2	1	0	-1/2	0	2
Y ₃	-1/3	0	1	1/6	-1/6	1/3
z _j - c _j	-80	0	0	-40	-80	640

PRİMAL (BİRİNCİL) MODELİN ÇÖZÜMÜ

	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	P ₀
S ₁	0	0	1	-2	1/3	80
X ₁	1	0	0	1/2	-1/6	40
X ₂	0	1	0	0	1/6	80
z _j - c _j	0	0	0	2	1/3	640

Yorum: A ürününden 40, B ürününden 80 birim üreterek amaç fonksiyonunun maksimum katkı payı değeri olan 640 pb'ne ulaşılmıştır.

1. Makinede 80 saat atıl kapasite bulunmaktadır. 2. ve 3. makinelerin kapasiteleri tamamen kullanılmıştır.

2. Makine için gölge fiyat 2 birim, 3. Makine için gölge fiyat 1/3 birim olarak gerçekleşmiştir.

1. Bir üretim işletmesinde X_1 ve X_2 gibi iki ürün iki tür hammadde kullanılarak üretilmektedir. Üretimde kullanılan hammaddeler, haftalık kapasiteler ve ürünlerin birim karları aşağıdaki gibidir: **Ayrıca birinci üründen en az 100 br üretilmesi gerekmektedir.** Karı maksimum yapacak doğrusal programlama modelini kurup, simpleks yöntemi ile çözünüz ve çözüm sonuçlarını açıklayınız.

	X_1	X_2	Kapasite
1. hammadde	2	5	1000
2. hammadde	4	2	1200
Birim kar	100	300	

$Z_{maks} = 100X_1 + 300X_2$ $Z_{maks} = 100X_1 + 300X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0V_1 - M A_1$
 $2X_1 + 5X_2 \leq 1000$ $2X_1 + 5X_2 + S_1 = 1000 \rightarrow$
 $4X_1 + 2X_2 \leq 1200$ $4X_1 + 2X_2 + S_2 = 1200 \rightarrow$
 $X_1 \geq 100$ $X_1 - V_1 + A_1 = 100 \rightarrow$
 $X_1, X_2 \geq 0$ $-X_1 + S_3 = -100$

	100	300	0	0	0	-M		P_0
	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	A_1		
0 S_1	2	5	1	0	0	0	0	1000
0 S_2	4	2	0	1	0	0	0	1200
-M A_1	1	0	0	0	-1	1	1	100
Z_j	-M	0	0	0	M	-M		-100M
$Z_j - C_j$	-M-100	-300	0	0	M	0		

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		P_0
0 S_1	2	5	1	0	0		1000
0 S_2	4	2	0	1	0		1200
0 S_3	-1	0	0	0	1		-100
Z_j	0	0	0	0	0		0
$Z_j - C_j$	-100	-300	0	0	0		

2. $Z = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3 \rightarrow \text{Minimum}$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 500$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 300$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

- a. Yukarıda verilen **minimum** amaçlı doğrusal programlama modeli için simpleks **başlangıç tablosu** oluşturunuz.
- b. Yukarıdaki modelin **dualini** (ikincilini) alınız.

a. Başlangıç tablosu



$$+MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 500$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 300$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3 + 0V_1 + 0V_2 + 0S_1$$

$$\Rightarrow 2X_1 + 3X_3 - V_1 + A_1 = 200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 - V_2 + A_2 = 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 + A_3 = 500$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 300$$

		25	30	15	0	M	0	M	M	0	
		X_1	X_2	X_3	V_1	A_1	V_2	A_2	A_3	S_1	P_0
M	A_1	2	0	3	-1	1	0	0	0	0	200
M	A_2	1	1	3	0	0	-1	1	0	0	1000
M	A_3	3	2	1	0	0	0	0	1	0	500
0	S_1	2	1	3	0	0	0	0	0	1	300
	Z_j	6M	3M	7M	-M	M	-M	M	M	0	1700M
	$Z_j - C_j$	6M-25	3M-30	7M-15	-M	0	-M	0	0	0	

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 500$$

$$-2X_1 - X_2 - 3X_3 \geq -300$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$Z_{\max} = 200Y_1 + 1000Y_2 + 500Y_3 - 300Y_4$$

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 - 2Y_4 \leq 25$$

$$Y_2 + 2Y_3 - Y_4 \leq 30$$

$$3Y_1 + 3Y_2 + Y_3 - 3Y_4 \leq 15$$

$$Y_1, Y_2, Y_4 \geq 0$$

$$Y_3: \text{Serbest (sınırlanmamış)}$$

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3 \quad Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + 0S_3$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200 \Rightarrow -2X_1 - 3X_3 + S_1 = -200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000 \Rightarrow -X_1 - X_2 - 3X_3 + S_2 = -1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 500 \Rightarrow 3X_1 + 2X_2 + X_3 + A_1 = 500$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 300 \Rightarrow 2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_3 = 300$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, A_1, S_3 \geq 0$$

	25	30	15	0	0	M	0	
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	S_3	P_0
0 S_1	-2	0	-3	1	0	0	0	-200
0 S_2	-1	-1	-3	0	1	0	0	-1000
M A_1	3	2	1	0	0	1	0	500
0 S_3	2	1	3	0	0	0	1	300
Z_j	3M	2M	M	0	0	M	0	500M
$Z_j - C_j$	3M-25	2M-30	M-15	0	0	0	0	

b. Dual (İkincil) alma

Dual Alma

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3$$

$$Z_{\min} = 25X_1 + 30X_2 + 15X_3$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 200$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 500$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 500$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 300$$

$$-2X_1 - X_2 - 3X_3 \geq -300$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$Z_{\max} = 200Y_1 + 1000Y_2 + 500Y_3 - 300Y_4$$

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 - 2Y_4 \leq 25$$

$$Y_2 + 2Y_3 - Y_4 \leq 30$$

$$3Y_1 + 3Y_2 + Y_3 - 3Y_4 \leq 15$$

$$Y_1, Y_2, Y_4 \geq 0$$

$$Y_3: \text{serbest (sınırlanmamış)}$$