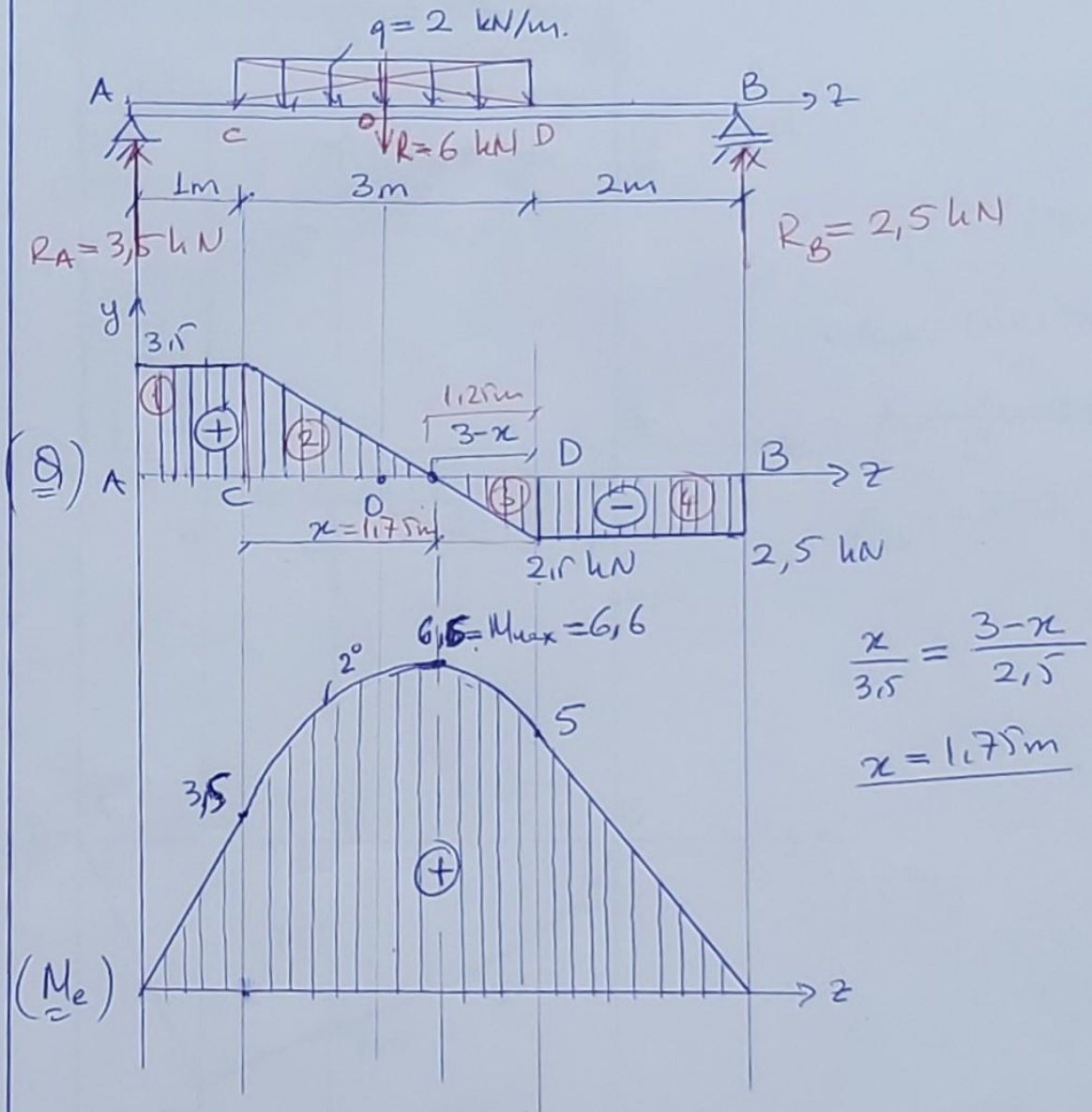


ALAN METODU İLE ÖRNEKLER

ÖRNEK 1)



Mesnet tepkileri: $R_B = 2.5 \text{ kN}$, $R_A = 3.5 \text{ kN}$

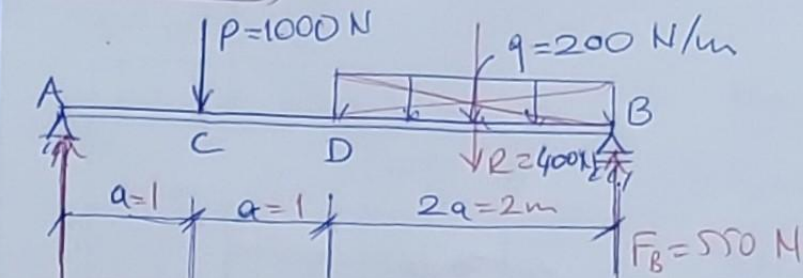
$$A_1 = (3.5)(1) = +3.5$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (3.5 \cdot 1.75) \approx 3.062 \approx 3.1$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} (2.5 \cdot 1.25) = -1.562 \approx -1.6$$

$$A_4 = - (2 \cdot 2.5) = -5$$

ÖRNEK: 6



$F_A = 850 \text{ N}$

$F_B = 550 \text{ N}$

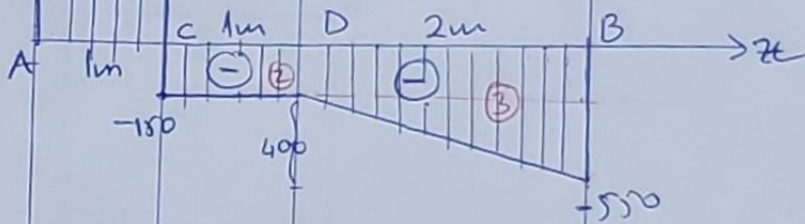
$$A_1 = + (850 \cdot 1) = +850$$

$$A_2 = - (100 \cdot 1) = -100$$

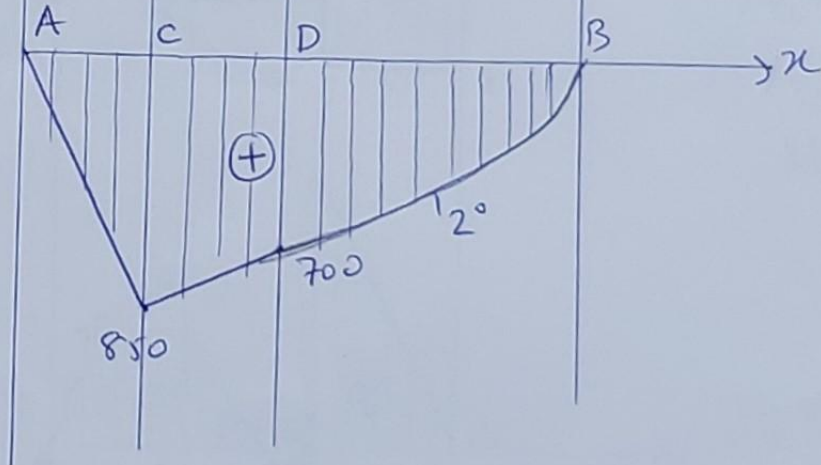
$$A_3 = - \left[\frac{1}{2} 400 \cdot 2 + 2 \cdot 100 \right]$$

$$A_3 = -700$$

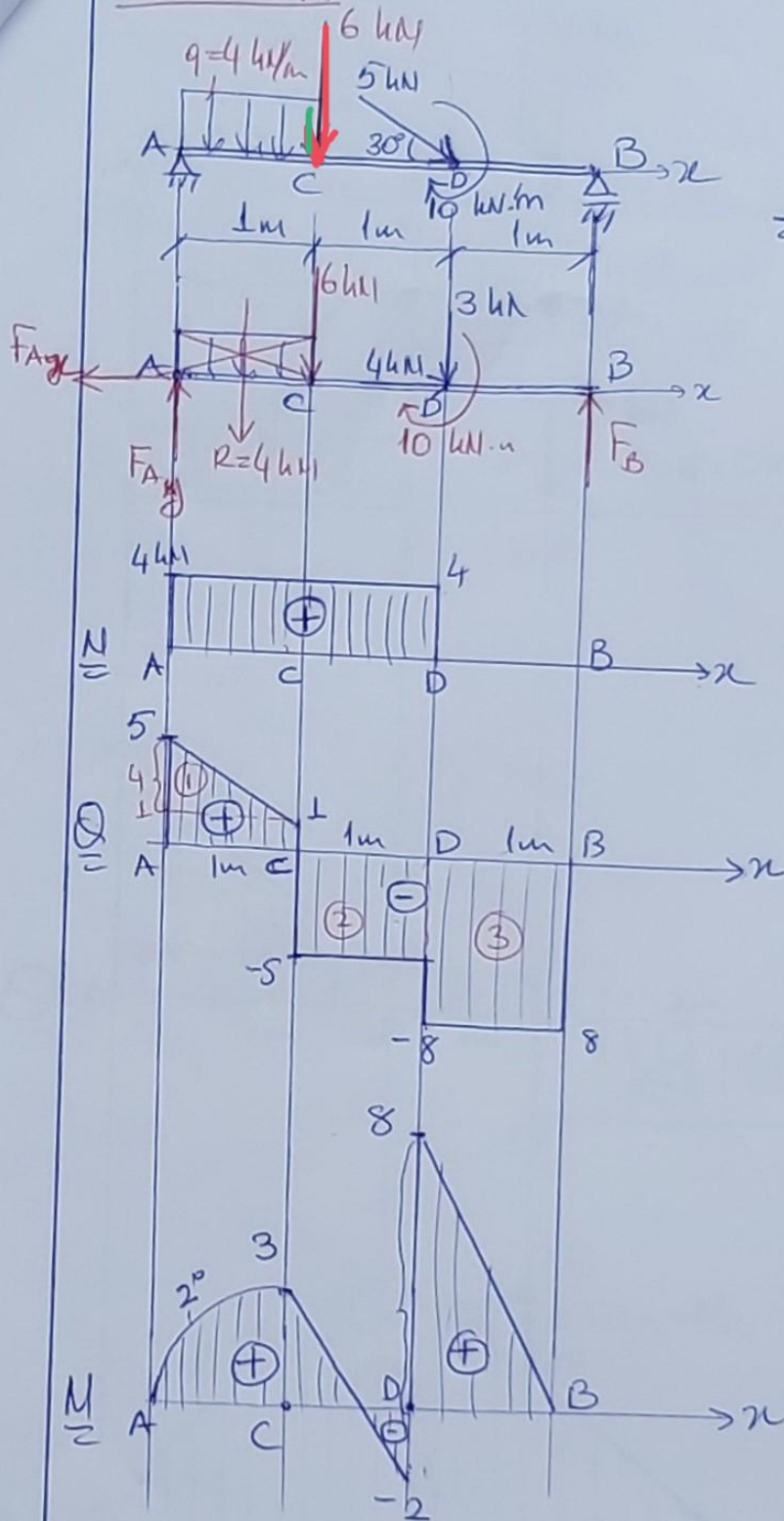
$\frac{Q}{2}$



$\left(\frac{M}{2} \right)$



ÖRNEK: 4)



Mesnet tepkileri

$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : F_B = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 : F_{Ay} = 5 \text{ kN}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (4 \cdot 1) + (1 \cdot 1)$$

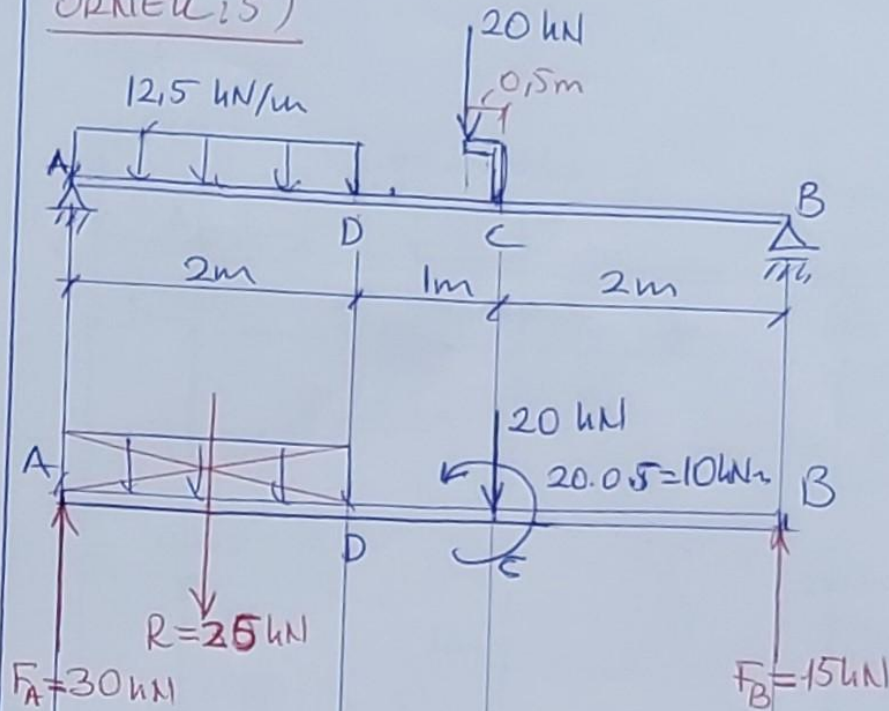
$$A_1 = +3$$

$$A_2 = -(5 \cdot 1) = -5$$

$$A_3 = -(8 \cdot 1) = -8$$

$$M_D = 10 \text{ kN.m}$$

ÖRNEK 15)



$$A_1 = \frac{1}{2} (2 \cdot 2) + 5 \cdot 2$$

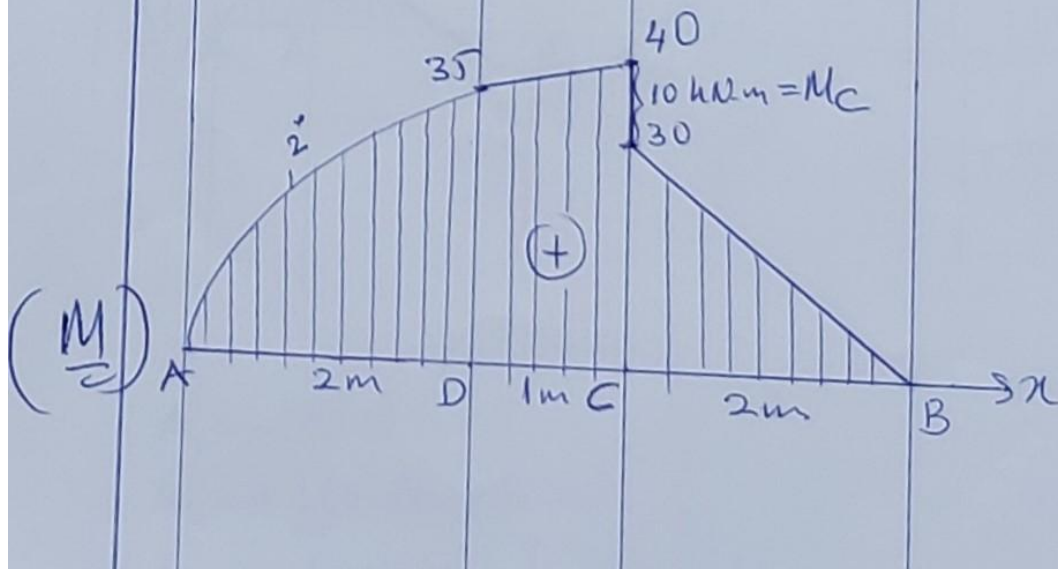
$$A_1 = 35$$

$$A_2 = + (5 \cdot 1) = +5$$

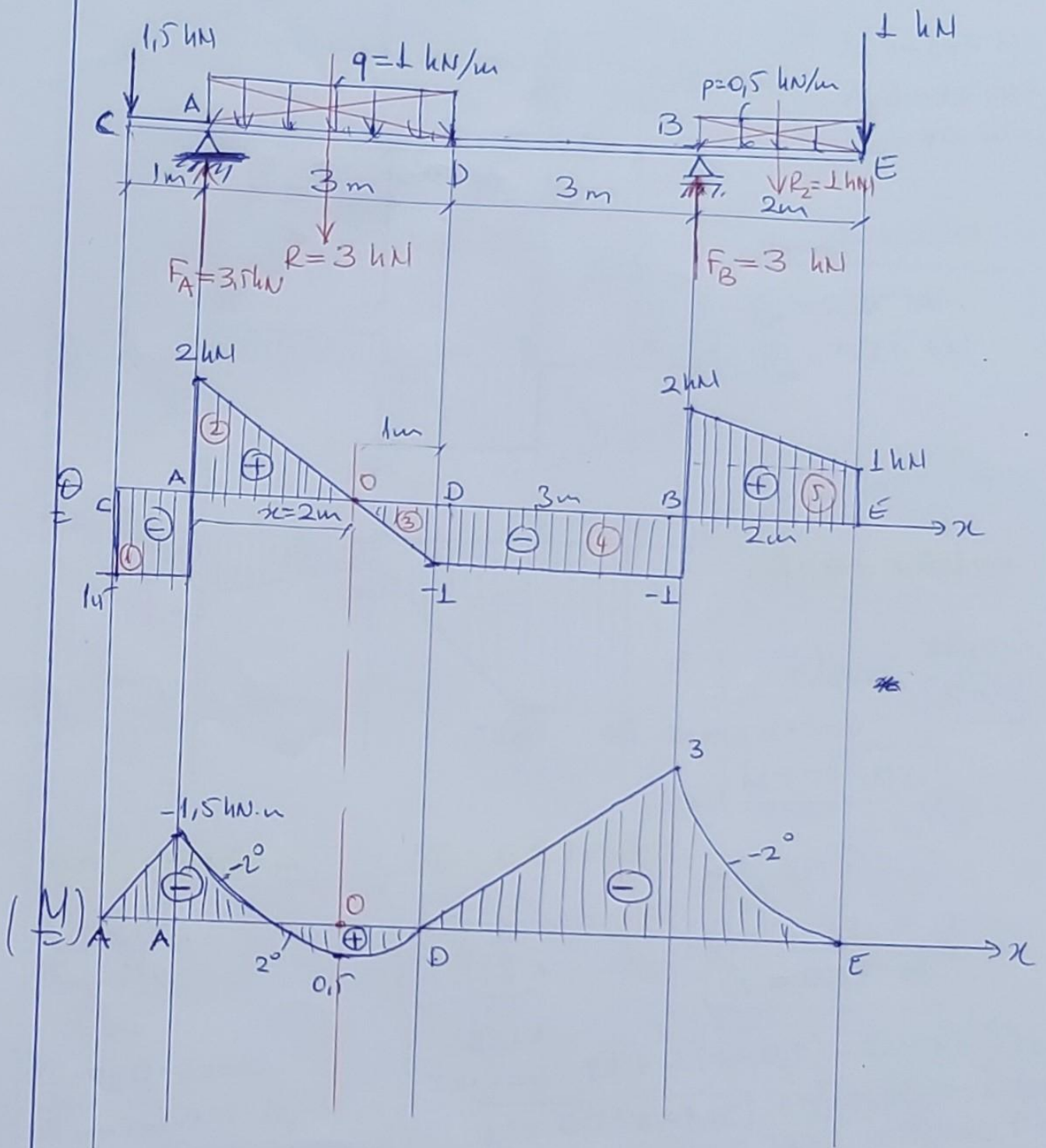
$$M_C = 10 \text{ kN.m} \leftarrow$$

$$A_3 = - (15 \cdot 2)$$

$$A_3 = -30$$



ÖRNEK 17)



$$A_1 = -(1.5 \cdot 1) = -1.5$$

$$A_2 = +\frac{1}{2}(2 \cdot 2) = +2$$

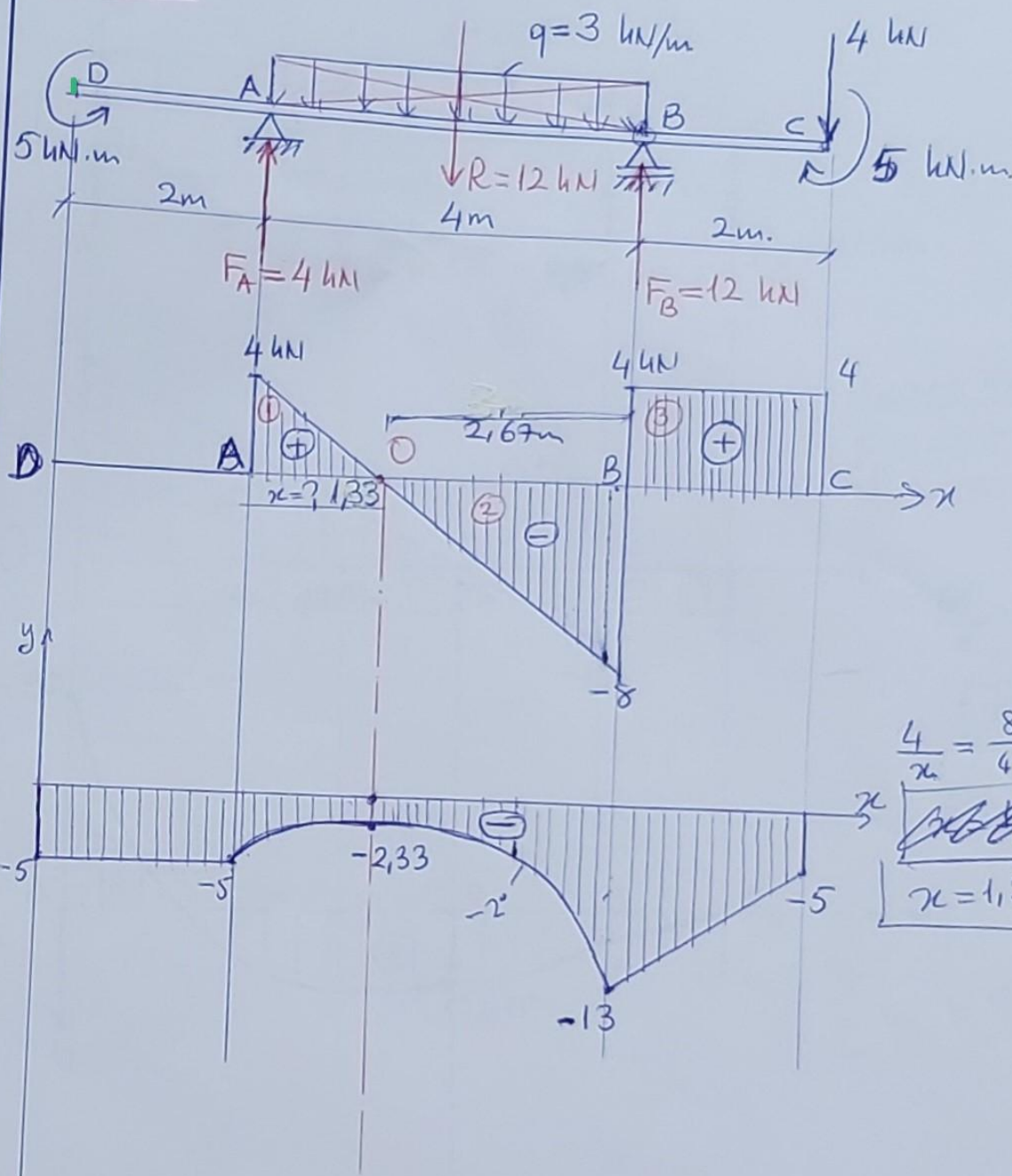
$$A_3 = -\frac{1}{2}(1 \cdot 1) = -\frac{1}{2}$$

$$A_4 = -(3 \cdot 1) = -3$$

$$A_5 = \frac{1}{2}[2 + 1] \cdot 2 = +3$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3-x}{1} \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ m}}$$

ÖRNEK:



~~$A_1 = + \frac{1}{2} (4 \cdot 2) = +2$~~

~~$A_2 = - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \right) = -12$~~

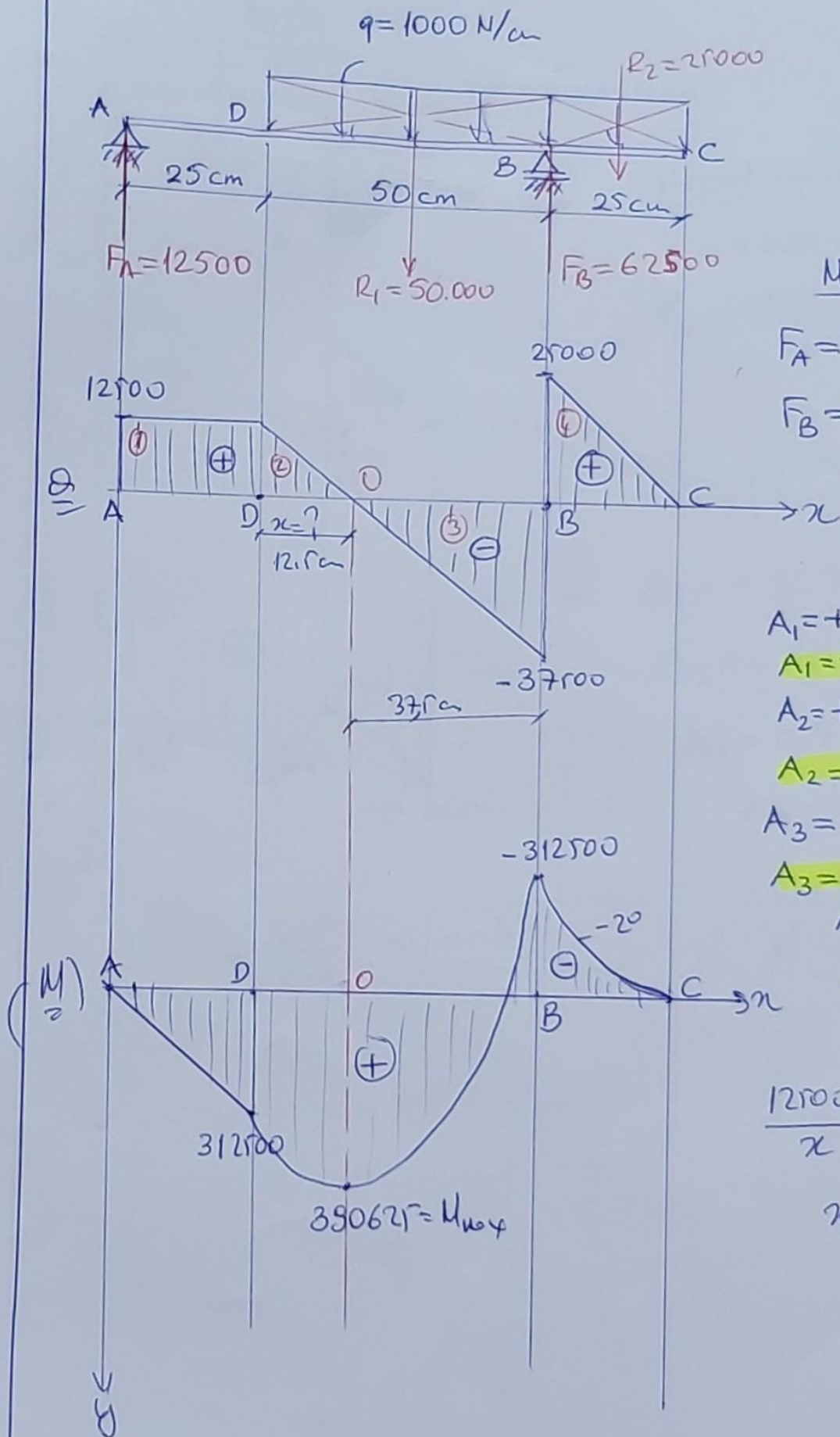
~~$A_3 = + (4 \cdot 2) = +8$~~

$$A_1 = \frac{1}{2} (4 \cdot 1.33) = +2.66 \approx +2.67$$

$$A_2 = - \frac{1}{2} (8 \cdot 2.67) = -10.68$$

$$A_3 = + (4 \cdot 2) = +8$$

ÖRNEK



Menet tepkileri

$$F_A = 12500 \text{ N}$$

$$F_B = 62500 \text{ N}$$

$$A_1 = +(12500 \cdot 25)$$

$$A_1 = +312500$$

$$A_2 = +\frac{1}{2}(12500 \cdot 12.5)$$

$$A_2 = +78125$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}(37500 \cdot 37.5)$$

$$A_3 = -703125$$

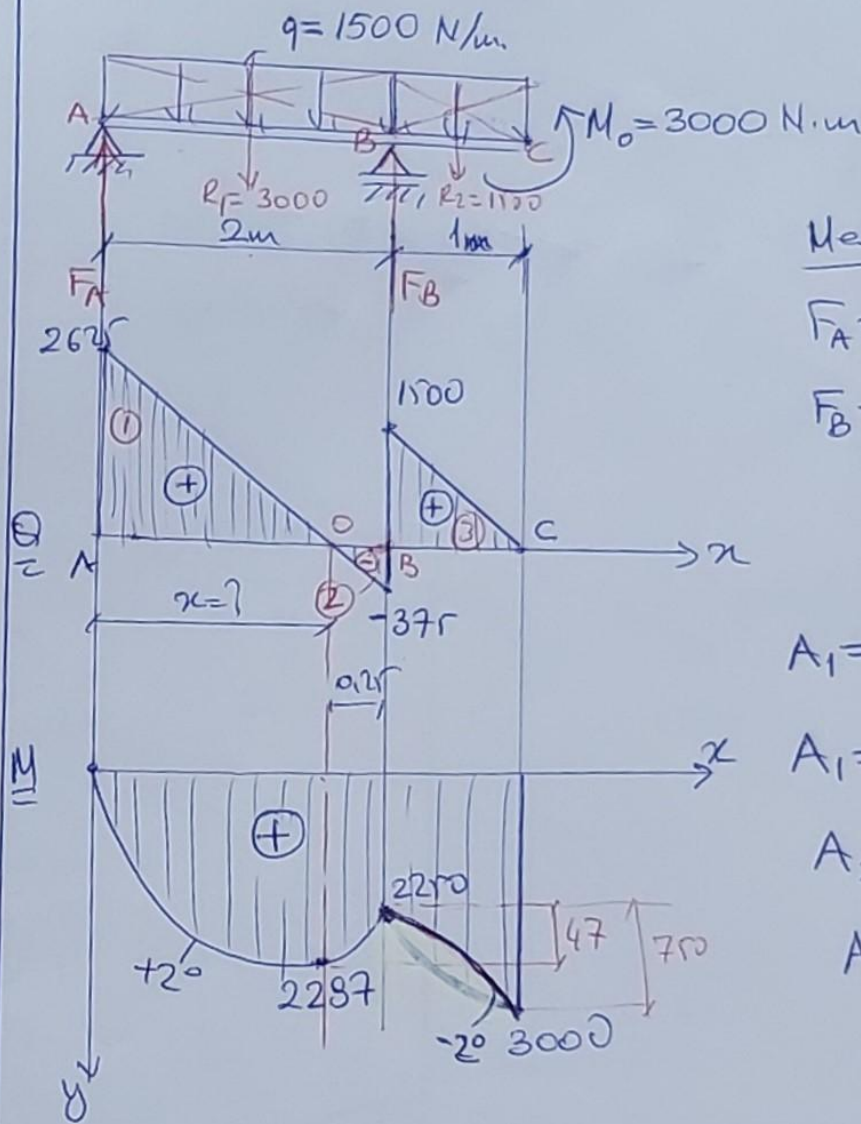
$$A_4 = +\frac{1}{2}(25000 \cdot 25)$$

$$A_4 = +312500$$

$$\frac{12500}{x} = \frac{37500}{50 - x}$$

$$x = 12.5 \text{ cm}$$

ÖRNEK



Mesnet tepkileri

$$F_A = 2625 \text{ N}$$

$$F_B = 1875 \text{ N}$$

$$A_1 = + \left(\frac{1}{2} (2625 \cdot 1.75) \right)$$

$$A_1 = + 2296.875 = +2297$$

$$A_2 = - \frac{1}{2} (375 \cdot 0.25)$$

$$A_2 = - 46.875 \approx -47$$

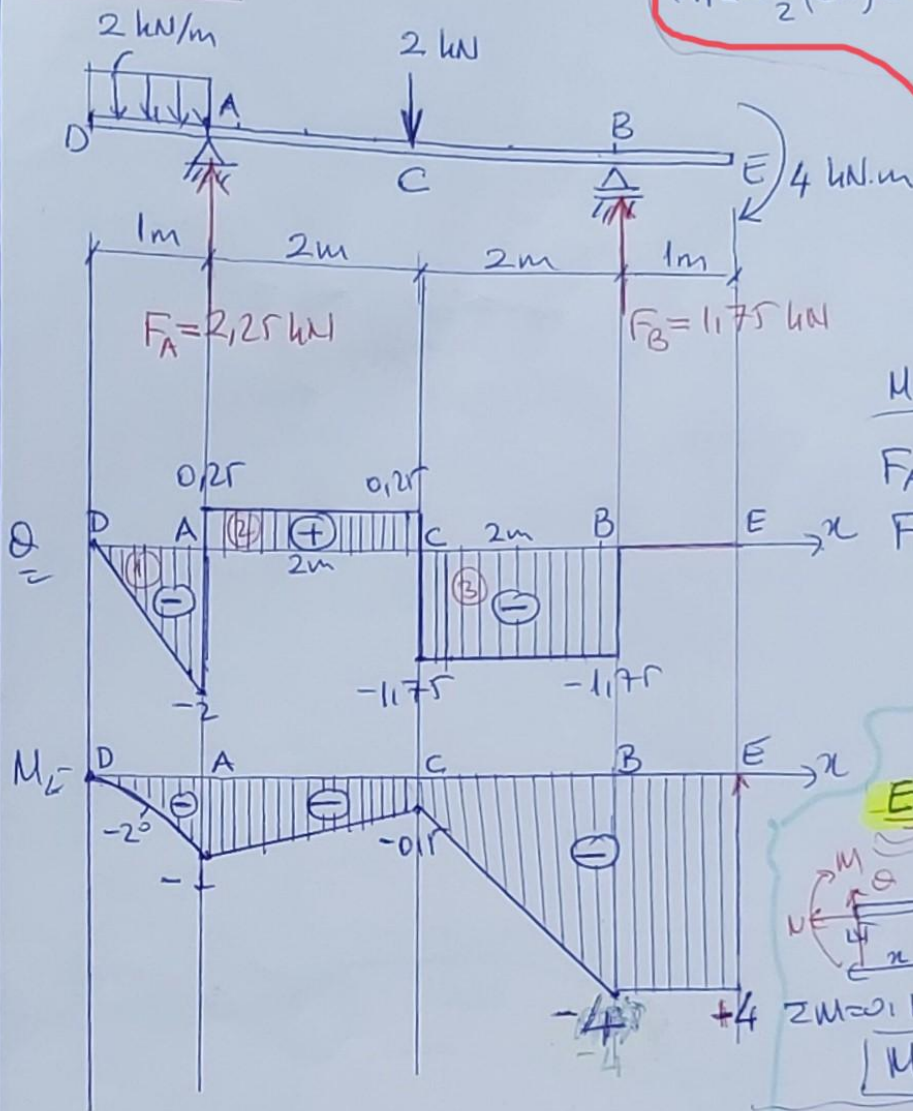
$$A_3 = \frac{1}{2} (1500 \cdot 1)$$

$$A_3 = +750$$

$$M_{C_0} = -3000 \text{ N.m}$$

$$\frac{2625}{x} = \frac{375}{2-x} \Rightarrow x = 1.75 \text{ m}$$

ÖRNEK 1



ALAN YÖZÜMÜ?

$$A_1 = -\frac{1}{2}(2 \cdot 1) = -1, \quad A_2 = +(0.25 \cdot 2) = +0.5$$

$$A_2 = +0.5$$

$$A_3 = -(1.75 \cdot 2)$$

$$A_3 = -3.5 \text{ kN.m}$$

$$U_E = +4 \text{ kN.m}$$

Mesnet tepkileri

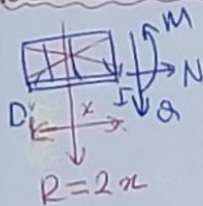
$$F_A = 2.25 \text{ kN}$$

$$F_B = 1.75 \text{ kN}$$

EB: $0 \leq x_4 \leq 1 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \\ Q = 0 \\ \sum M = 0: M + 4 = 0 \\ M = -4 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

DA: $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ m}$



$$\sum F_y = 0: Q + 2x = 0$$

$$Q = -2x$$

$$\sum M_D = 0:$$

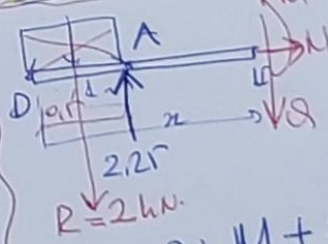
$$M + (2x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = -x^2$$

$$x = 1: M_A = -1 \text{ kN.m}$$

Parabol is bukey olarak

AC: $1 \leq x_2 \leq 3 \text{ m}$



$$\sum F_y = 0: Q + 2 - 2.25 = 0$$

$$Q = 0.25 \text{ kN}$$

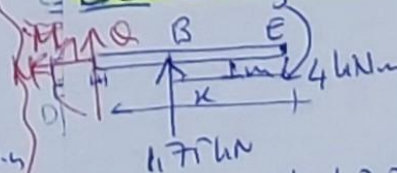
$$\sum M_D = 0: M + 2(x - 0.5) - 2.25(x - 1) = 0$$

$$M = 0.25x - 1.25$$

$$x = 1 \Rightarrow M_A = -1 \text{ kN.m}$$

$$x = 3 \Rightarrow M_C = -0.5 \text{ kN.m}$$

BC: $1 \leq x_3 \leq 3 \text{ m}$



$$\sum F_y = 0:$$

$$Q + 1.75 = 0$$

$$Q = -1.75$$

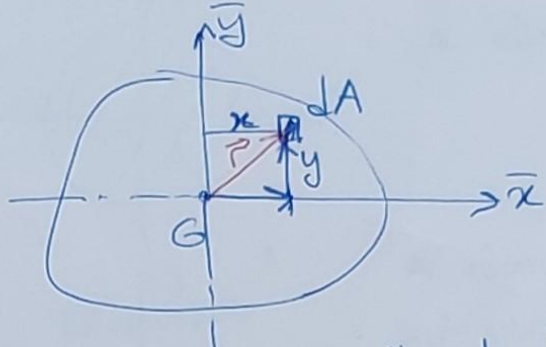
$$\sum M_D = 0: M - 1.75(x - 1) + 4 = 0$$

$$M = 1.75x - 5.75$$

$$x = 1: M_E = -4 \text{ kN.m}$$

$$x = 3: M_C = -0.5$$

ATALET MOMENTİ



$$I_{\bar{x}} = \int_A y^2 dA \quad (\bar{x} \text{ eksenine göre})$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A x^2 dA \quad (\bar{y} \text{ eksenine göre})$$

NOT: $I_{\bar{x}}$, $I_{\bar{y}}$ eğilmede kullanılır.
 $I_{\bar{x}}$ ve $I_{\bar{y}}$ daima sıfırdan farklı ve pozitiftir.

Boyutu: 4. mertebededir

$$[I] = [L]^2 \times [L]^2 = [L]^4 \quad \bar{I}, \text{ mertebededir.}$$

polar atalet momenti (I_o, I_r, I_p):

$$I_r = \int_A r^2 dA = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} \Rightarrow I_r = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}$$

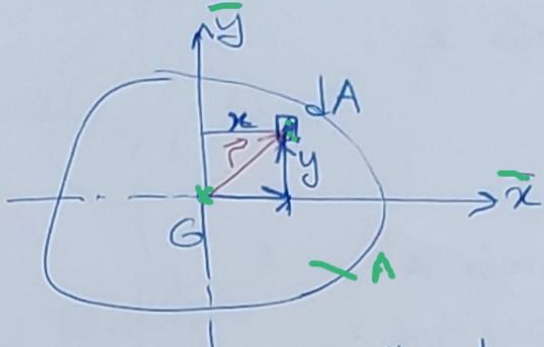
Silindirik millerin burulmasında kullanılır.
 Levhaların dönmesini konu alan problemlerde kullanılır.
 4. mertebededir

Çarpım Atalet Momenti (I_{xy}):

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad \text{--- 4. mertebededir. Pozitif, negatif veya sıfır olabilir}$$

Verilen kesit bir eksene göre simetrikse, $I_{xy} = 0$ dir.
 Eğilmede (simetrik olmayan kesitler için) kullanılır.

ATALET MOMENTİ



$$I_{\bar{x}} = \int_A y^2 dA \quad (\bar{x} \text{ eksenine göre})$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A x^2 dA \quad (\bar{y} \text{ eksenine göre})$$

NOT: $I_{\bar{x}}$, $I_{\bar{y}}$ eğilmede kullanılır.
 $I_{\bar{x}}$ ve $I_{\bar{y}}$ daima sıfırdan farklı ve pozitifdir.

Boyutu: 4. mertebededir

$$[I] = [L]^2 \times [L]^2 = [L]^4 \quad \underline{\text{IV. mertebededir.}}$$

polar atalet momenti (I_o, I_r, I_p):

$$I_r = \int_A r^2 dA = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} \Rightarrow I_r = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}$$

Silindirik millerin burulmasında kullanılır.
Levhaların dönmesini konu alan problemlerde kullanılır.

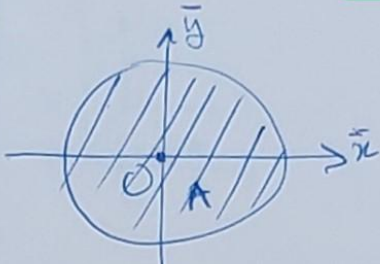
IV. mertebededir

Çarpım Atalet Momenti (I_{xy}):

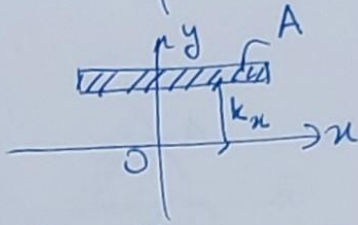
$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad \text{IV. mertebededir. Pozitif, negatif veya sıfır olabilir.}$$

Verilen kesit bir eksene göre simetrikse, $I_{xy} = 0$ dir.
Eğilmede (simetrik olmayan kesitler için) kullanılır.

Bir alanın atalet yarıçapı: (i_0, k)



x eksen. göre atalet momenti $I_{\bar{x}}$ olsun.



A alanını x eksenine paralel ince bir seritte topladığımızı düşünelim. Bu şekilde toplanan A alanı, $\bar{x}$ eksenine göre aynı $I_{\bar{x}}$ momentine sahipse, serit;

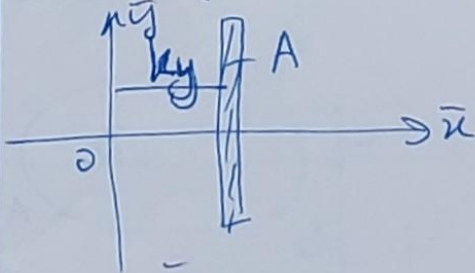
x ekseninden

$$I_{\bar{x}} = k_x^2 A$$

bağıntısı ile tanımlanan bir k_x uzaklığına konmalıdır.

$$I_{\bar{x}} = k_x^2 A \Rightarrow k_x = \sqrt{\frac{I_{\bar{x}}}{A}} \quad \bar{x} \text{ eksenine göre}$$

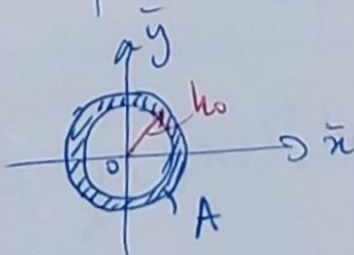
Benzer şekilde:



$$I_{\bar{y}} = k_y^2 A$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_{\bar{y}}}{A}}$$

y eksenine göre



$$I_r = k_0^2 A$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{I_r}{A}}$$

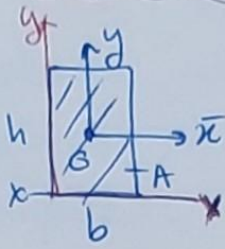
Polar atalet yarıçapı

$$k_0 \neq k_x + k_y$$

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Atalet yarıçapı; burkulmada kullanılır

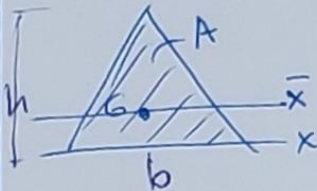
Geometrik şekillerin atalet momentleri



$$I_{\bar{x}} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{\bar{y}} = \frac{hb^3}{12}$$

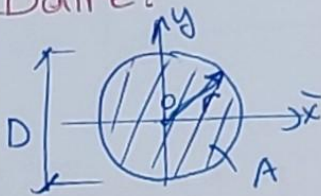
Takanden geçen
eşene göre: $I_x = \frac{bh^3}{3}, \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$

Üçgen:



$$I_{\bar{x}} = \frac{bh^3}{36}, \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Daire:



$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{\pi r^4}{4}$$

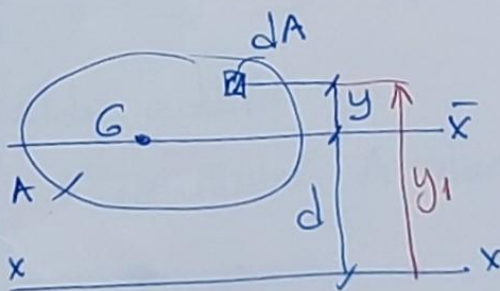
(yarıçap cinsinden)

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

(çap cinsinden)

PARALEL EKSENLER (STEINER) TEOREMİ

Birleşik alanların atalet momentlerinin bulunmasında kullanılır.



$$I_{\bar{x}} = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_A y_1^2 dA$$

$$I_x = \int_A (y+d)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yd + d^2) dA$$

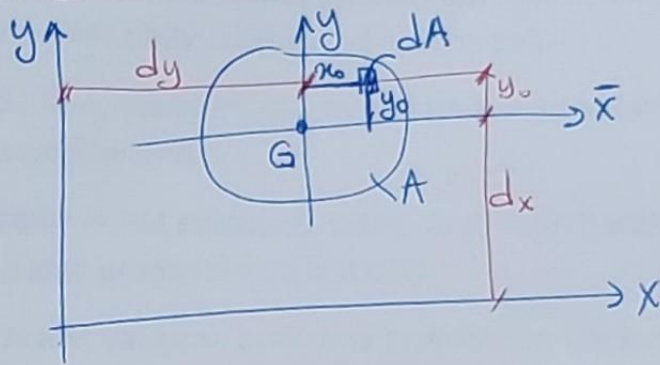
$$= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_{\bar{x}}} + 2d \underbrace{\int_A y dA}_{S_{\bar{x}}=0} + d^2 \underbrace{\int_A dA}_{d^2 A}$$

NOT: Şeklin ağırlık
merkezinden geçen
eşene göre: $S_{\bar{x}}=0$
çünkü: $y=0$ dir

$$I_x = I_{\bar{x}} + d^2 A$$

SONUÇ: Bir düzlemsel şeklin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti; o eksene paralel olan bütün eksenlere göre atalet momentlerinin en küçüğüdür.

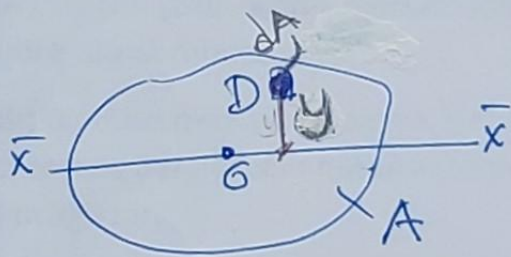
Çarpım atalet momenti için Steiner teoremi



$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int \bar{x}\bar{y} dA$$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + d_x d_y A$$

Mukavemet Momenti: (W)



Mukavemet momenti; atalet momentinin kesitin ağırlık merkezinden itibaren belirli bir yüksekliğe bölünmesiyle

elde edilir

Şekilli A alanının: $I_{\bar{x}} = \int y^2 dA$ olsun

$$W = \frac{I_{\bar{x}}}{y}$$

$$\text{Boyutu } [W] = \frac{[L]^4}{L} = [L]^3$$

Birimi: mm³, cm³, m³ gibi

NOT: Eğilmede, kermeli eğilmede kullanılır

NOTLAR

- 1-) Düzlem yüzeylerin ağırlık merkezlerini bulmak için **statik moment** , iç kuvvetlerin ve gerilmelerin hesabında **atalet momentleri** kullanılır.
- 2-) Atalet ve mukavemet momentleri maddenin cinsine değil, dikkate alınan kesitin yalnız büyüklüğüne ve şekline bağlıdır.
- 3-) I_x ve I_y atalet momentleri daima sıfırdan farklı ve pozitifdir ve boyutu ise IV. mertebededir.
- 4-) **Polar atalet momenti**, silindirik millerin burulması ve levhaların dönmesini konu alan problemlerde kullanılır.
- 5-) **Atalet yarıçapı**, burkulma problemlerinde kullanılır.
- 6-) **Paralel- eksenler teoremi**, birleşik alanların momentlerinin bulunmasında kullanılır.
- 7-) Verilen şekil , ağırlık merkezinden geçen eksene göre simetrik ise bu eksene göre **statik moment** sıfırdır. $I_{xy} = 0$.
- 8-) Bir düzlemsel şeklin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti, o eksene paralel olan bütün eksenlere göre atalet momentlerinin en küçüğüdür.
- 9-) Bir birleşik alanın atalet yarıçapı; birleşik alanların atalet yarıçaplarının toplamına eşit değildir.
Bir birleşik alanın atalet yarıçapını bulmak için, önce birleşik alanın ~~atalet~~ momentini hesaplamak gerekir.
- 10-) Kesiti simetrik olmayan düzlemsel kesitler , Çarpım çarpım atalet momentine (I_{xy} sahiptirler) . I_{xy} , pozitif, negatif veya sıfır olabilir.
- 11-) Kesit; eksenlerin birine göre simetrikse, çarpım atalet momenti sıfırdır.
- 12-) **Mukavemet momenti**; atalet momentinin kesitin ağırlık merkezinden itibaren belirli bir yüksekliğe bölünmesiyle elde edilir.