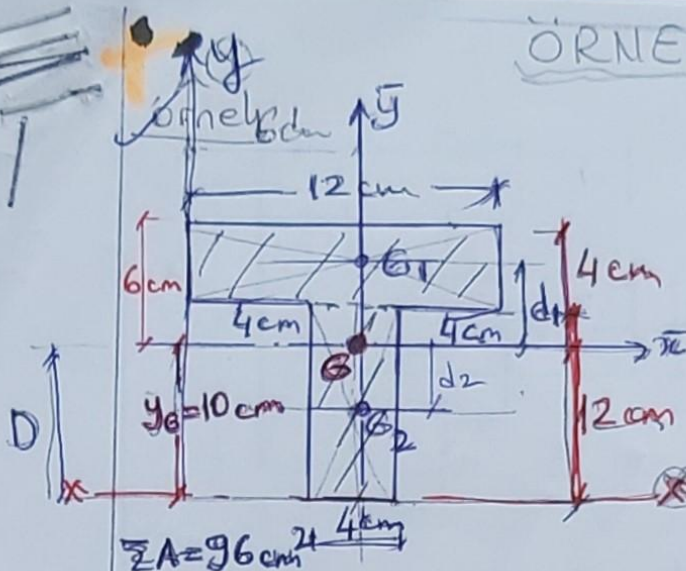


ÖRNEKLER



a) $I_{\bar{x}}, I_{\bar{y}}, I_o = ?$

$i_x, i_y, i_o = ?$

$G(\bar{x}; \bar{y}) = G(0; 10 \text{ cm})$

b) Tüm kesitin tabanından geçen eksen göre I_x atalet momentini bulunuz

a) $I_{\bar{x}} = I_{x_1} + I_{x_2} = \left[\frac{12 \cdot 4^3}{12} + 4^2(12 \cdot 4) \right] + \left[\frac{4 \cdot 12^3}{12} + 4^2(12 \cdot 4) \right]$
 $= 832 + 1344 \Rightarrow I_{\bar{x}} = 2176 \text{ cm}^4$

$I_{\bar{y}} = I_{\bar{y}_1} + I_{\bar{y}_2} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} + \frac{12 \cdot 4^3}{12} = 576 + 64 \Rightarrow I_{\bar{y}} = 640 \text{ cm}^4$

$I_o = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = 2176 + 640 \Rightarrow I_o = 2816 \text{ cm}^4$

$i_x = \sqrt{\frac{2176}{96}} \approx 4,76 \text{ cm}, i_y = \sqrt{\frac{640}{96}} \approx 2,58 \text{ cm}, i_o = \sqrt{\frac{2816}{96}} = 5,4 \text{ cm}$

b) $I_x = I_{\bar{x}} + D^2 \cdot A = I_{\bar{x}} + y_G^2(A)$

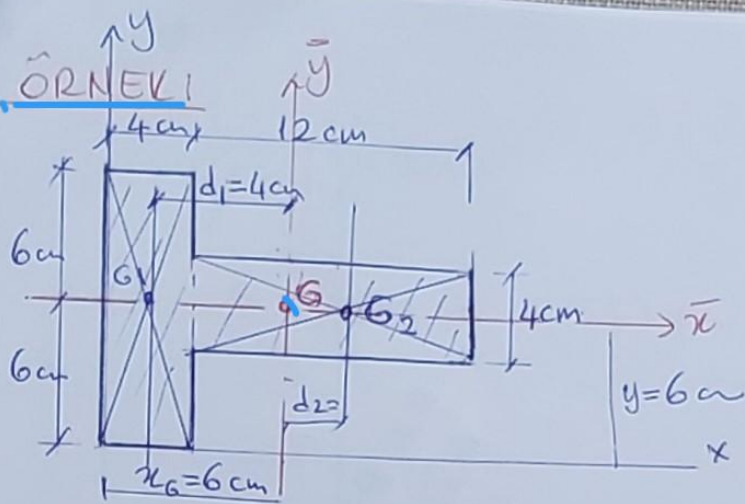
$I_x = 2176 + (10)^2(96)$

$= 2176 + 9600$

$I_x = 11776 \text{ cm}^4$

$I_y = I_{\bar{y}} + 6^2(96)$
 $= 640 + 3456$

$I_y = 4096 \text{ cm}^4$



a) $I_{\bar{x}} = ?$ $I_{\bar{y}} = ?$ $I_o = ?$

b) $i_x = ?$ $i_y = ?$ $i_o = ?$

c) $I_x = ?$ $I_y = ?$

ÇÖZÜM 2 Kesit $\bar{x}$ elin. göre simetridir. $G(\bar{x}_G; 0)$

$$\bar{x}_G = \frac{2(12 \cdot 4) + 10(12 \cdot 4)}{12 \cdot 4 + 12 \cdot 4} = \frac{576}{96} = 6 \text{ cm} \quad G(6 \text{ cm}; 0)$$

a) $I_{\bar{x}} = I_{x_1} + I_{x_2}$ (NOT: Ağırlık merkezleri $\bar{x}$ elin. üzerinde)

$$= \left[\frac{4(12)^3}{12} + \frac{12(4)^3}{12} \right] = 576 + 64 \Rightarrow \boxed{I_{\bar{x}} = 640 \text{ cm}^4}$$

$$I_{\bar{y}} = \left[\frac{12 \cdot 4^3}{12} + 4^2(12 \cdot 4) \right] + \left[\frac{4(12)^3}{12} + 4^2(12 \cdot 4) \right]$$

$$= 832 + 1344 \Rightarrow \boxed{I_{\bar{y}} = 2176 \text{ cm}^4}$$

$$I_o = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} \Rightarrow \boxed{I_o = 2816 \text{ cm}^4}$$

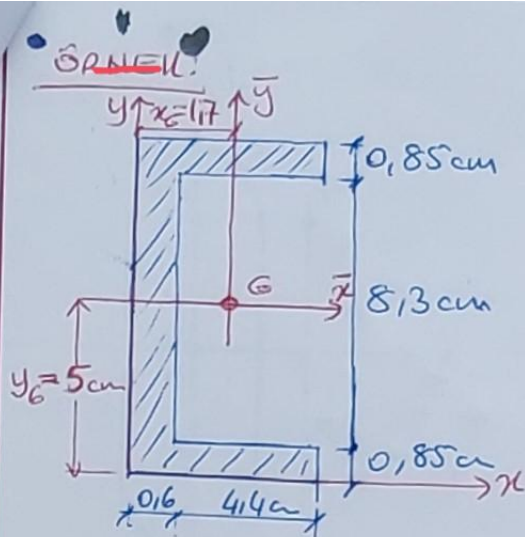
b) $i_x = \sqrt{\frac{640}{96}} = 2,58 \text{ cm}$, $i_y = \sqrt{\frac{2176}{96}} = 4,76 \text{ cm}$, $i_o = \sqrt{\frac{2816}{96}} = 5,4 \text{ cm}$

c) $I_x = I_{\bar{x}} + (x_G)^2 (\Sigma A)$

$$I_x = 640 + 6^2(96) \Rightarrow \boxed{I_x = 4096 \text{ cm}^4}$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + (x_G)^2 (\Sigma A)$$

$$= 2176 + 6^2(96) \Rightarrow \boxed{I_y = 5632 \text{ cm}^4}$$



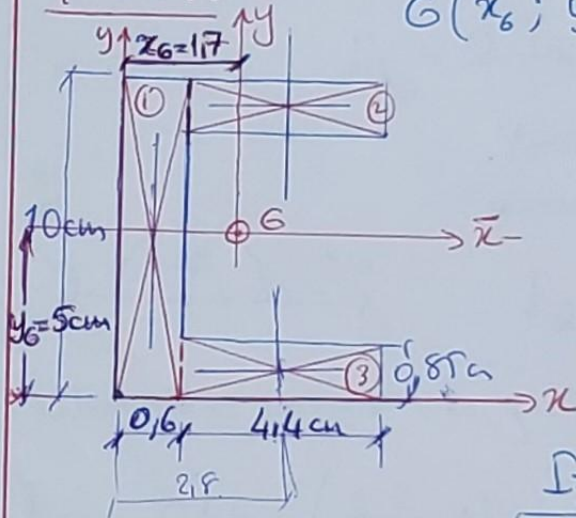
a) $(\bar{x}, \bar{y})$ eksenine göre,

$$I_{\bar{x}} = ? \quad I_{\bar{y}} = ?$$

b) (x, y) eksenine göre,

$$I_x = ? \quad I_y = ?$$

ÇÖZÜM:



$$G(\bar{x}_G; \bar{y}_G) = G(1,7 \text{ cm}; 5 \text{ cm})$$

$$I_{\bar{x}} = I_{x_1} + 2 I_{x_2}$$

$$I_{\bar{x}} = \left[\frac{(0,6)(10)^3}{12} \right] + 2 \left[\frac{(4,4)(0,85)^3}{12} + \left(5 - \frac{0,85}{2} \right)^2 (4,4 \times 0,85) \right]$$

$$I_{\bar{x}} = (50) + 2(0,226 + 78,28)$$

$$I_{\bar{x}} = 207 \text{ cm}^4$$

$$I_{\bar{y}} = I_{y_1} + 2 I_{y_2}$$

$$= \left[\frac{10(0,6)^3}{12} + (1,7 - 0,3)^2 (10 \cdot 0,6) \right] + 2 \left[\frac{0,85(4,4)^3}{12} + (2,8 - 1,7)^2 (4,4 \cdot 0,85) \right]$$

$$= (0,18 + 11,76) + 2(6,034 + 4,5254)$$

$$I_{\bar{y}} = 11,94 + 21,12 \Rightarrow I_{\bar{y}} \approx 33 \text{ cm}^4$$

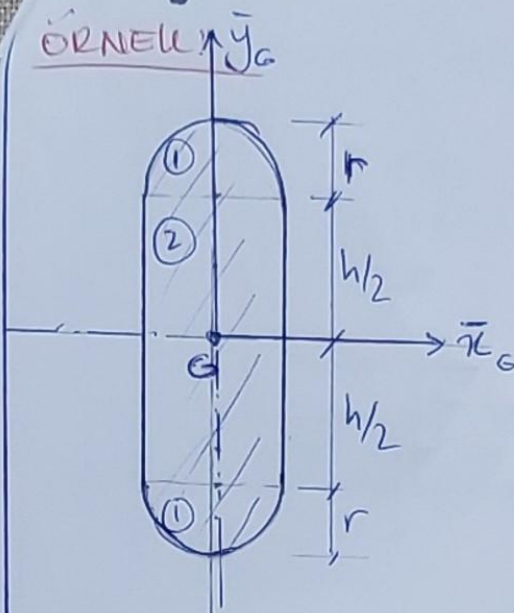
b) $I_x = I_{\bar{x}} + y_G^2 (ZA) \Rightarrow I_x = 207 + 5^2 (13,48)$

$$I_x = 544 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + x_G^2 (ZA) \Rightarrow I_y = 33 + (1,7)^2 (13,48)$$

$$I_y \approx 72 \text{ cm}^4$$

ÖRNEK



Verilen kesitin $\bar{x}_G$ eksenine göre atalet momentini hesaplayınız
($I_{\bar{x}_G} = ?$)

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

ÇÖZÜM:

$$I_{\bar{x}_G} = 2 I_{\bar{x}_1} + I_{\bar{x}_2}$$

Yarımdairenin ^{kendi} ağırlık merkezinden geçen $I_{\bar{x}_1} = \frac{\pi r^4}{8}$ dir.

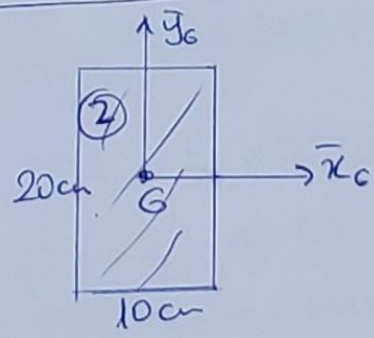


$$I_{\bar{x}_1} = \frac{\pi (5)^4}{8} \approx 246 \text{ cm}^4$$

Tabanından geçen ekn. göre: $I_{x_1} = I_{\bar{x}_1} + \left(\frac{4r}{3\pi} + 10 \right)^2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right)$

$$I_{\bar{x}_1} = 246 + \underbrace{\left(\frac{4 \cdot 5}{3\pi} + 10 \right)^2}_{147} \underbrace{\left(\frac{\pi \cdot 5^2}{2} \right)}_{39,3} = 246 + (147 \cdot 39,3)$$

$$I_{\bar{x}_1} \approx 6019 \text{ cm}^4$$



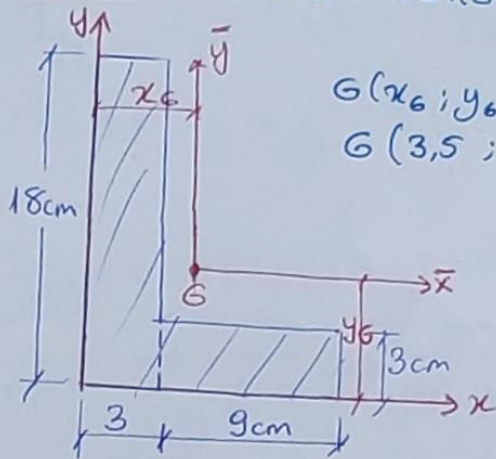
$$I_{\bar{x}_2} = I_{\bar{x}_G} = \frac{10 (20)^3}{12} = 6666,66$$

$$I_{\bar{x}_2} \approx 6667 \text{ cm}^4$$

$$I_{\bar{x}_G} = 2 I_{\bar{x}_1} + I_{\bar{x}_2} = 2 (6019) + 6667$$

$$I_{\bar{x}_G} = 18705 \text{ cm}^4$$

ÖRNEK: Şekilde verilen kesiti,



$$G(x_G; y_G)$$

$$G(3,5; 6,5) \text{ cm}$$

b) $I_{\bar{x}} = ?$ $I_{\bar{y}} = ?$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = ?$

$I_o = ?$ $i_{\bar{x}} = ?$ $i_{\bar{y}} = ?$ $i_o = ?$

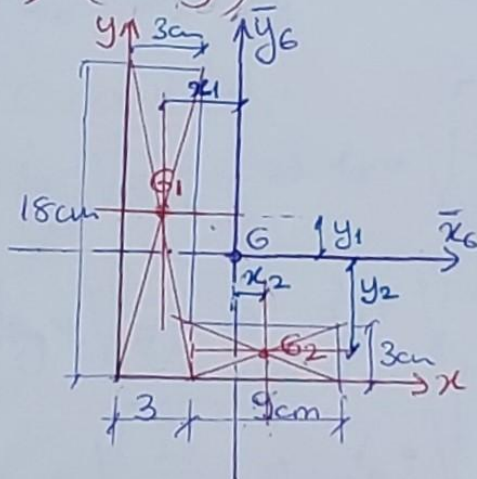
a) (xoy) ekr. takımına göre;

$I_x = ?$ $I_y = ?$ $I_{xy} = ?$

$I_o = ?$

ÇÖZÜM:

a) (xoy) ekr. takımına göre;



$$I_x = \frac{3(18)^3}{3} + \frac{9 \cdot 3^3}{3} = 5832 + 81$$

$$I_x = 5913 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{18 \cdot 3^3}{3} + \left[\frac{3 \cdot 9^3}{12} + (3+4,5)^2 (9 \cdot 3) \right]$$

$$= 162 + [182,25 + 1518,75]$$

$$= 1701$$

$$I_y = 162 + 1701 \Rightarrow I_y = 1863 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = (1,5)(9)(3 \cdot 18) + (3+4,5)(1,5)(9 \cdot 3)$$

$$I_{xy} = 729 + 303,75 \Rightarrow I_{xy} = 1032,75 \text{ cm}^4 \approx 1033 \text{ cm}^4$$

$$I_o = I_x + I_y = 5913 + 1863 \Rightarrow I_o = 7776 \text{ cm}^4$$

b) $(\bar{x}_o \bar{y}_o)$ ağırlık merkezinden geçen ekr. tak. göre

$$x_1 = 3,5 - 1,5 = 2 \text{ cm } (-)$$

$$y_1 = 9 - 6,5 = 2,5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - 3,5 = 4 \text{ cm}$$

$$y_2 = 6,5 - 1,5 = 5 \text{ cm } (-)$$

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{x}} + (\bar{y}_G)^2 (Z A)$$

$$5913 = I_{\bar{x}} + (6,5)^2 (18 \cdot 3 + 9 \cdot 3) \Rightarrow I_{\bar{x}} \approx 2491 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + (\bar{x}_G)^2 (\Sigma A)$$

$$1863 = I_{\bar{y}} + (3,5)^2 (18,3 + 9,3) \Rightarrow \boxed{I_{\bar{y}} \cong 871 \text{ cm}^4}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = (-2)(2,5)(3,18) + (4)(-5)(3,9) \Rightarrow \boxed{I_{\bar{x}\bar{y}} = -810 \text{ cm}^4}$$

veya: $I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + (\bar{x}_G \cdot \bar{y}_G) (\Sigma A)$
 $1033 = I_{\bar{x}\bar{y}} + (3,5 \cdot 6,5)(81) \Rightarrow I_{\bar{x}\bar{y}} = -810 \text{ cm}^4$

$$I_o = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = 2491 + 871 = \boxed{3362 \text{ cm}^4}$$

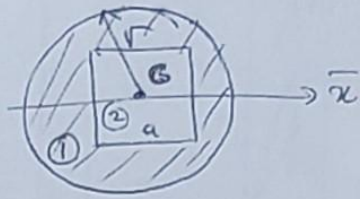
Tüm kareli içi:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{\bar{x}}}{\Sigma A}} \Rightarrow i_x = \sqrt{\frac{2491}{81}} \cong 5,6 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{\bar{y}}}{\Sigma A}} \Rightarrow i_y = \sqrt{\frac{871}{81}} \cong 3,3 \text{ cm}$$

$$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{\Sigma A}} \Rightarrow i_o = \sqrt{\frac{3362}{81}} \cong 6,5 \text{ cm}$$

neh 1



$$r = 125 \text{ mm}$$
$$a = 150 \text{ mm}$$

$$I_{\bar{x}} = ?$$

$$I_o = ?$$

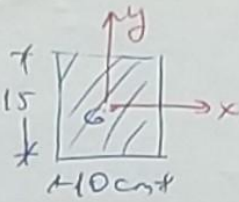
$$I_{\bar{x}} = I_{x_1} - I_{x_2}$$

$$= \frac{\pi r^4}{4} - \frac{a^4}{12} = \frac{\pi (125)^4}{4} - \frac{(150)^4}{12} = 14.956.009,5 \text{ mm}^4$$

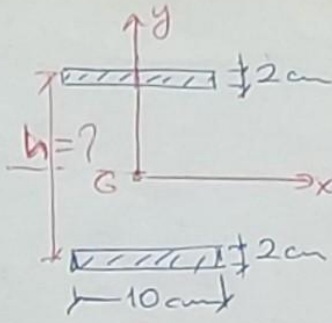
$$I_{\bar{x}} \approx 14956 \text{ cm}^4$$

$$I_o = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = 2 \cdot (14956) = 29912 \text{ cm}^4$$

ÖRNEK 1



①



②

x eksenine göre atalet momentlerinin eşit olması istenmektedir. $\bar{I}_x$ kenti kalınlığının küçük olduğunu kabul ederek h uyarı ile bulunuz ($h=?$).

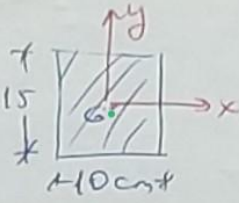
ÇÖZÜM:

$$\bar{I}_{x_1} = \frac{10(15)^2}{12} = 2812,5 \text{ cm}^4$$

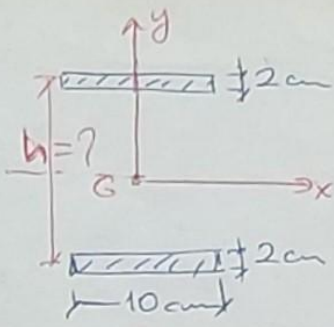
$$\bar{I}_{x_2} = 2 \left[\frac{10 \cdot 2^3}{12} + \left(\frac{4}{2} \right)^2 (10 \cdot 2) \right] = 13,33 + 10h^2 = 2812,5$$

$$2812,5 - 13,3 = 10h^2 \Rightarrow h^2 = 279,92 \Rightarrow \boxed{h = 16,73 \text{ cm}}$$

ÖRNEK 1



①



②

x eksenine göre atalet momentlerinin eşit olması istenmektedir. $\bar{I}_x$ kenti kalınlığının küçük olduğunu kabul ederek h uyarı ilgini bulunuz ($h=?$).

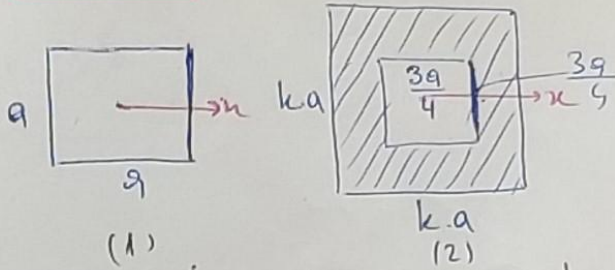
ÇÖZÜMÜ:

$$\bar{I}_{x_1} = \frac{10(15)^2}{12} = 2812,5 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{x_2} = 2 \left[\frac{10 \cdot 2^3}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 (10 \cdot 2) \right] = 13,33 + 10h^2 = 2812,5$$

$$2812,5 - 13,3 = 10h^2 \Rightarrow h^2 = 279,92 \Rightarrow \boxed{h = 16,73 \text{ cm}}$$

Soru: 1) k



Sekildeki iki kesitin x eksenine göre atalet momentlerinin aynı olması için k ne olmalıdır? Bu tektörde mal-

zeme ekono mi yürdesi kaç olur?

Cöüm: 1)

$$(1) \rightarrow I_{x_1} = \frac{a^4}{12}$$

$$(2) \Rightarrow I_{x_2} = \frac{(ka)(ka)^3}{12} - \frac{1}{12} \frac{3a}{4} \cdot \left(\frac{3a}{4}\right)^3 = \frac{81a^4}{48 \times 64} + \frac{k^4 a^4}{12}$$

Atalet momentlerini, $I_{x_1} = I_{x_2}$ olması için:

$$\frac{a^4}{12} = \frac{k^4 a^4}{12} - \frac{81a^4}{48 \times 64}$$

$$k^4 = 1,316 \Rightarrow \boxed{k = 1,07}$$

Malzemeden yapılan tasarruf:

$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = k^2 a^2 - \frac{9}{16} a^2 = 0,583 a^2$$

$\rho =$ ekono mi yürdesi

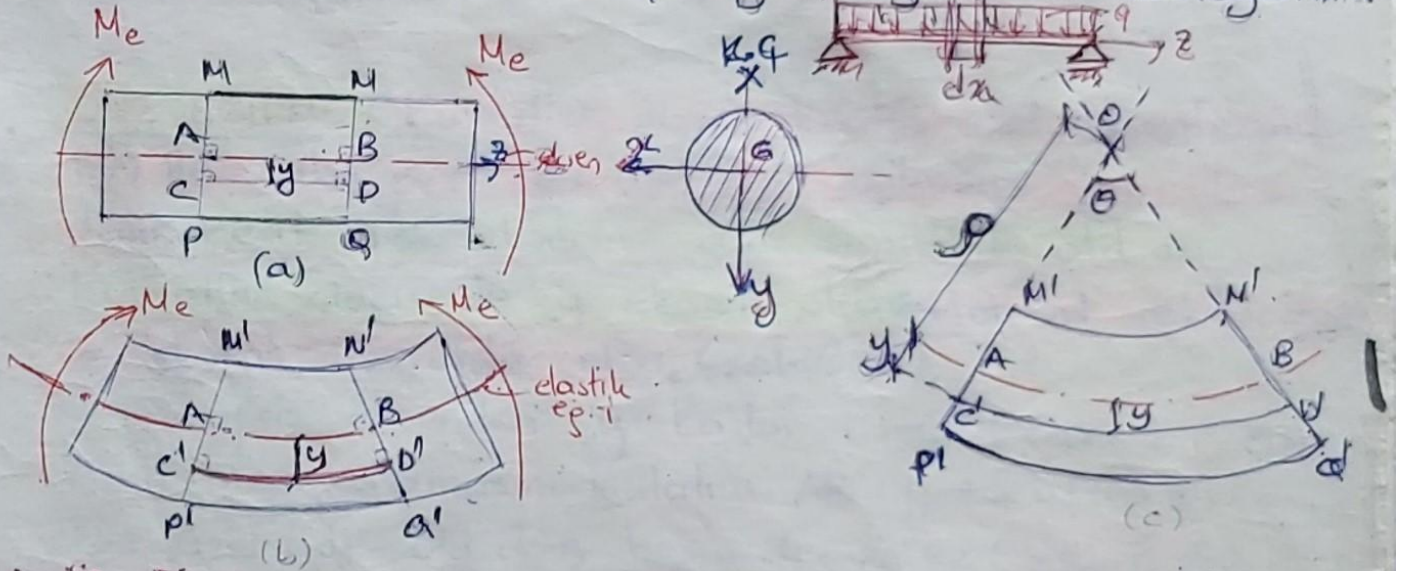
$$\rho = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1} = 1 - \frac{0,583 a^2}{a^2} = 0,417$$

$$\boxed{\rho = \%41,7}$$

BASİT EĞİLME

Bir prizmatik çubuk yalnız eğilme momentinin etki etmesi halinde çubukta "basit eğilme" meydana gelir. Basit eğilmede çubukta etkiyen kuvvetler, çubuk ekseninden geçen bir düzlem içinde bulunurlar. Bu düzleme "kuvvetler düzlemi" denir. Kuvvetler düzlemi ile çubuk kesitinin arakesiti kesitin ağırlık merkezinden geçen bir doğrudur, ve "kuvvetler çizgisi" olarak adlandırılır. Kuvvetler çizgisi her zaman kesite etkiyen M_e eğilme momentine diktir.

Şekilde görülen her iki ucundan yalnızca M_e eğilme momentine maruz bir çubuğun eğilmesini inceleyelim.



A) DÜZ EĞİLME

ŞEKİL 1

Moment etkisinin altındaki çubuk eğrisel bir çubuk olacaktır. Eğrisel çubuğun eksen eğrisine "elastik eği" denir. Eğilme sonucunda çubuğu meydana getiren liflerin boyları değişir (PQ lifi $\rightarrow$ P'Q' lifine, MN lifide M'N' lifine dönüşür). Bu arada boy değiştirmeyen liflerde vardır (AB lifi). Bunlara "tarafsız lifler" denir. Tarafsız lifler kesit ağırlık merkezinden geçen bir düzlem belirtirler. Bu düzleme "tarafsız düzlem" denir. Tarafsız düzlem ile çubuk kesitinin arakesitine "tarafsız eksen" de

Eğilmede, çubuk liflerinin boylarının değişmesine sebep olan gerilmeler, çubuk kesitine dik doğrultudaki normal gerilmelerdir. Alt liflerde çekme, üst liflerde ise basınç olan bu gerilmeler, tarafsız ekseninde sıfır değerini alır. Gerilme dağılımını bulmak için çubuk kesitlerinin şekil değiştirmeden sonra nasıl bir duruma geldiklerini bilmek lazımdır.

Gerilme ve şekil değiştirme hesabı için Bernoulli-Navier tarafından ileri sürülen iki temel varsayım kullanılmaktadır. Bu varsayımlar:

1. Dik kesitler eğilmeden sonra da düzlem kalırlar,
2. Dik kesitler eğilmeden sonra da elastik eğriye dik kalırlar.

DÜZ EĞİLME: Kuvvetler çizgisi kesiti asal eksenlerinden biri ile çakışıyorsa bu durumda eğilmeye "düz eğilme" denir. Kesit y eksenine göre simetrik old. dan kuvvetler çizgisi de y eksenidir. Moment vektörü de x ekseninde olur. (Şekil: 2).

Tarafsız ekseninden y kadar uzaklıktaki bir CD lifinin birim uzamasını bulalım. AB lifi tarafsız eksenin tam üzerinde old. dan boyu değişmez (Şekil: 1).

ρ : eğrilik yarıçapı

Başlangıçta: $\Rightarrow CD = AB = \rho \theta$, $C'D' = (\rho + y) \theta$
 $A'B' = AB = \rho \theta$

CD lifinin uzaması:

$$e = \frac{\Delta l}{l}$$

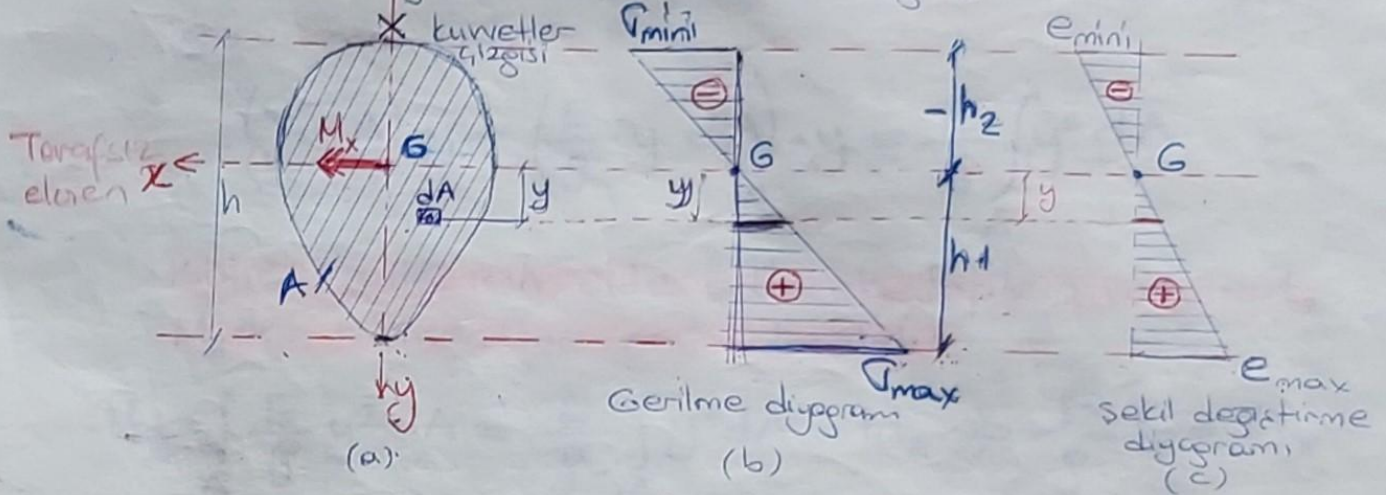
$$e = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{(\rho + y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (1)$$

Hooke kanunundan faydalanarak, tarafsız ekseninden y kadar uzaklıktaki bir lifte meydana gelen normal gerilme:

$$e = \frac{\sigma}{E}, e = \frac{y}{\rho} \quad \left\{ \quad \sigma = Ee = \frac{E}{\rho} y \quad \right. \quad (2)$$

Kesitin simetrisi veya eksenlerin asal eksen olması dolayısıyla düz eğilmede x eksenini tarafsız eksen olmaktadır. Ancak, düz eğilme halinde tarafsız eksen ile moment vektörü üst üste düşer. Düz eğilme halinde gerilme, şekil değiştirme ve elastik eğrinin ρ eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi bulunur.

Normal gerilmelerin kesitte dağılışı lineerdir.



ŞEKİL: 2 -

Gubugun kesitine tesir eden iç kuvvetlerin, M_x momentini dengeleyecek bir kuvvet çifti teşkil etmeleri gerekir.

Tarafsız eksen den y kadar uzaklıkta dan bir dA elemanına tesir eden kuvvet: $\sigma = \frac{P}{dA} \Rightarrow \sigma \cdot dA$ dur.

Kuvvet çiftinde bileşkenin sıfır olmasından dolayı kesite tesir eden kuvvetler toplamı $= 0$ olmalıdır.

$$\int_A \sigma \cdot dA = \int_A \left(\frac{E}{\rho} y \right) dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad \text{olmalıdır}$$

T.E. göre kesitin statik momenti

Kesitin tarafsız eksene göre statik momentinin $\left(\int y dA = 0 \right)$ sıfır olması için tarafsız eksen ağırlık merkezinden geçmelidir.