

$$\tau_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad \tau_z = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}$$

Kesmeli eğilme halinde kesitin boyutlandırılması:
Momentin maksimum olduğu kesitte; τ_{max} ;
Kesme kuvvetinin maksimum olduğu kesitte de; τ_{max} hesaplanır.
Genellikle τ_{max} ile τ_{max} 'ın kesit içinde bulundukları noktalar farklı farklıdır. Bu nedenle kesit kontrolü:

$$\tau_{max} \leq \tau_{em}$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{em}$$

----- (4)

şartlarının ikisi de sağlanacak şekilde yapılır.

I, T, C gibi kesitlerde kesit kalınlığı bazı noktalarda ani olarak değişir. Kalınlığın ani olarak değiştiği bu noktalara "BOYUN NOKTALARI" denir. Boyun noktalarında τ_z gerilmesi ile τ_z kayma gerilmeleri birlikte bulunurlar. Burada bir "düzlem gerilme hali" söz konusu olup, asal gerilmeler:

$$\tau_1 = \frac{\tau_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tau_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}, \quad \tau_2 = \frac{\tau_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tau_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

formülleri ile hesaplanırlar. Bu durumda maksimum kayma gerilmesi, bicim değiştirme enerjisi veya Coulomb kırılma hipotezlerine göre kontrol yapılmalıdır.

$$\tau_1 > 0, \quad \tau_2 < 0, \quad \tau_3 = 0 \text{ olduğu için!}$$

1.) ^(sünek malzemelerin) Maksimum kayma gerilmesi hipotezinde: $\tau_1 - \tau_2 < \tau_{em}$

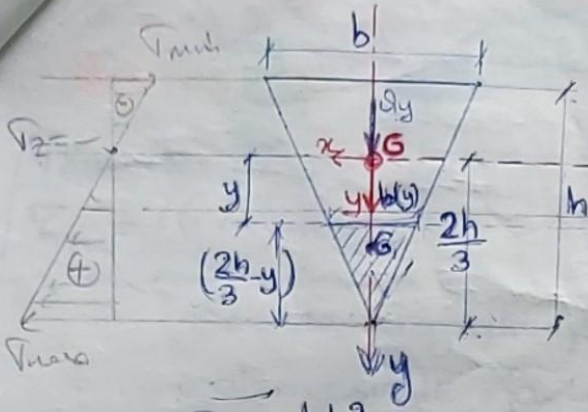
2.) ^{enerji yığılması esas alır.)} Bicim değiştirme enerjisi hipotezinde: $\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 \tau_2 < \tau_{em}^2$

3.) Coulomb kırılma hipotezinde: $\frac{\tau_1}{\tau_{f(em)}} + \frac{\tau_2}{\tau_{k(em)}} = 1$

formülleri kullanılır.

(Aşağıda sağda hipotezlerin karşılaştırılması
tablosu var.)

Üçgen kesit için kayma gerilmesi dağılımı



$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b(y)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

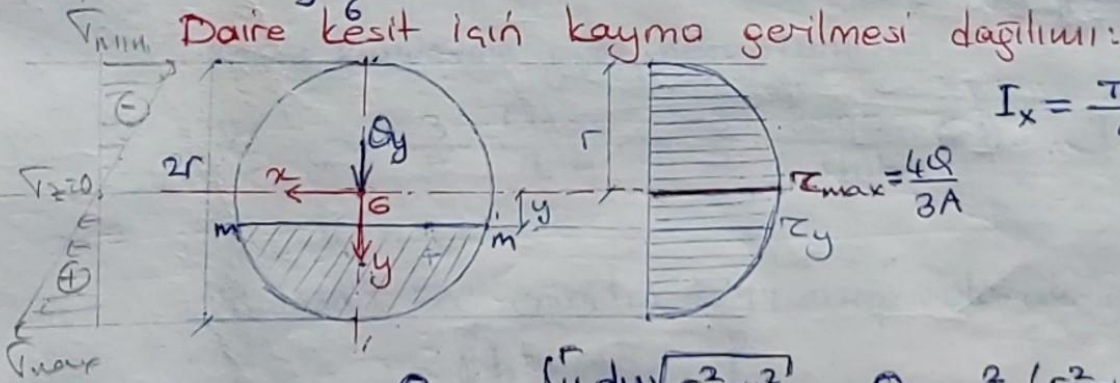
$$\tau_{zy}(y) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{\frac{1}{2} b(y) \cdot \left(\frac{2h}{3} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{3} \left(\frac{2h}{3} - y\right)\right]}{b(y)}$$

$$\tau_{zy}(y) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{1}{27} (2h - 3y)(h + 3y)$$

$\frac{d}{dy} \tau_{zy}(y) = 0$ hesaplanırsa: τ_{max} 'in yeri bulunur

$$\left. I_x = \frac{bh^3}{36} \right\} -3(h + 3y) + 3(2h - 3y) = 0 \Rightarrow y_1 = +\frac{h}{6} \Rightarrow \tau = \tau_{max} \text{ olur}$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_y \cdot 36}{bh^3} \cdot \frac{1}{27} \left(2h - 3 \cdot \frac{h}{6}\right) \left(h + 3 \cdot \frac{h}{6}\right) = \frac{3Q_y}{b \cdot h} = \tau_{max}$$



$$I_x = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\tau_{zy}(y) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{\int_0^m u \, du \sqrt{r^2 - u^2}}{2\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{\frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2}}{2\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$\tau_{zy}(y) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{1}{3} (r^2 - y^2)$$

(y eksenini üzerindeki noktalar için geçerlidir.)

$$y = \pm r \text{ için: } \tau_{zy} = 0$$

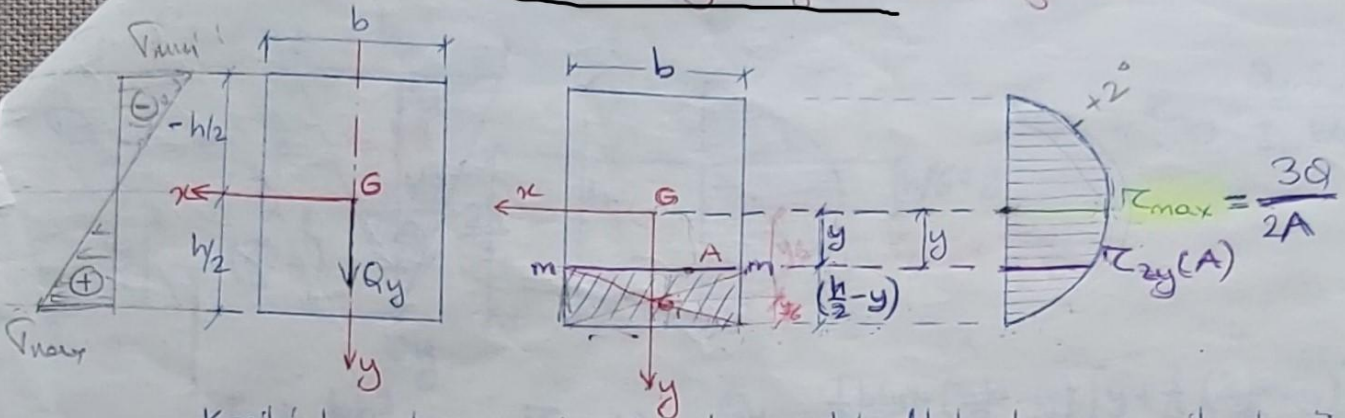
$$y = 0 \text{ için: } \tau_{zy} = \tau_{max} = \frac{4Q}{3A}$$

$$\tau = \frac{Q_y}{3I_x} \sqrt{(r^2 - y^2)^2 + y^2 x^2}$$

Daire kesit üzerinde herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi.

5

Dikdörtgen kesit için kayma gerilmesi dağılımı:



Kesitin kenarları simetri eksenine paralel oldan kayma gerilmelerinin doğrultuları her noktada y eksenine paraleldir.
İki kenarın y eksenine paralel olması nedeniyle kesitte yalnız τ_{zy} kayma gerilmesi meydana gelir.

$$\tau_z = \tau_{zy}(y) = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b(y)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad b(y) = b$$

S_x : A'dan geçen x eksenine paralel kesitin altında kalan taraflı alanın statik momenti.

Taraflı alanın statik momenti:

$$S_x = \underbrace{b \left(\frac{h}{2} - y \right)}_A \cdot \underbrace{\left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right]}_{y_G} = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Bu değerler $\tau_{zy}(y)$ de yerine yazılırsa;

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{zy}(y) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = \pm \frac{h}{2} \text{ için: } \tau = 0$$

$$y = 0 \text{ için: } \tau = \tau_{\max}$$

Kayma gerilmeleri dağılımı parabolik olup ikinci derece bir eğridir.

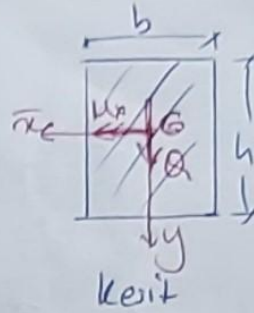
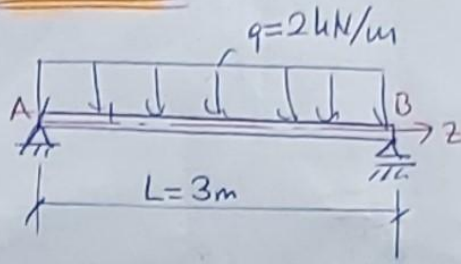
$A = b \cdot h$, $y = 0$ ve $I_x = \frac{bh^3}{12}$ konularak; $\tau_{\max}$ bulunur.

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2A}$$

Dikdörtgen kesitte kayma gerilmelerinin dağılımı normal gerilme dağılımının tam tersidir. Kayma gerilmeleri tarafsız eksende maksimum, kesitin alt ve üst uçlarında sıfırdır.

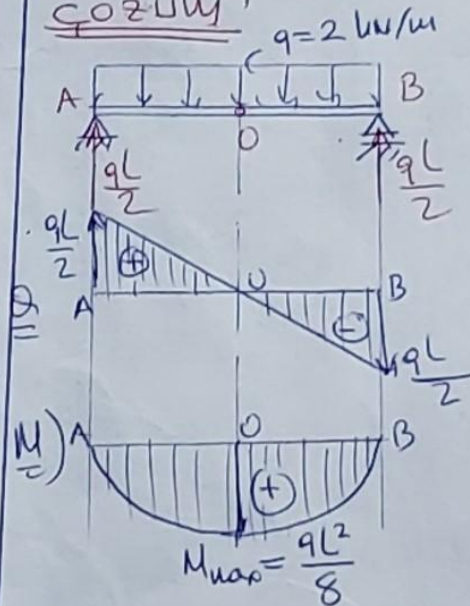
KESME Lİ EĞİLME ÖRNEK PROBLEMLER

ÖRNEK 1



Sekilde boyutları, kesiti, yükleme durumu verilen kiriş malzemesinde; $\tau_{em} = 10^2 \text{ N/cm}^2$, $Z_{em} = 16 \text{ N/cm}^2$ olarak verilmiştir. $\frac{b}{h} = 0,5$ olarak sekilde kesiti boyutlandırınız

ÇÖZÜMÜ



$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{2 \cdot 3^2}{8} = 2,25 \text{ kN.m} = 2,25 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$$

$$Q_{max} = \frac{qL}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ kN} = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$$

1) Eğilmeye göre:

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq \tau_{em}$$

$$\frac{2,25 \cdot 10^5}{\frac{b(2b)^2}{6}} \leq 10^2 \Rightarrow b = 15 \text{ cm}$$

$$b \times h = 15 \times 30 \text{ cm}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{3} = \frac{2}{3} b^3$$

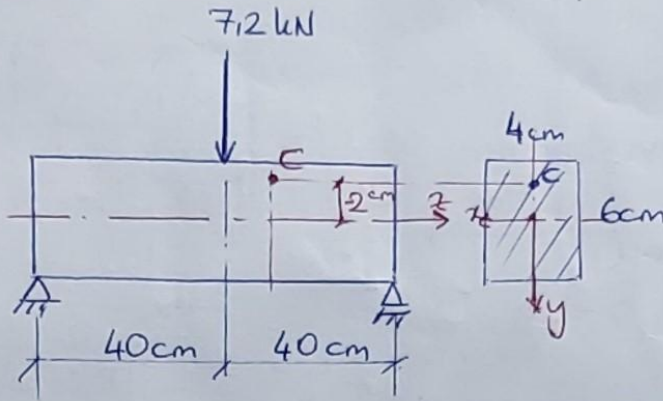
2) Kesmeye göre: $\tau_{max} = \frac{3 Q_{max}}{2A} \leq \tau_{em}$

$$\frac{3 \cdot (3 \cdot 10^3)}{2(b \cdot 2b)} \leq 16 \Rightarrow b = 11,86 \text{ cm} \Rightarrow b \approx 12 \text{ cm}$$

$$b \times h = 12 \times 24 \text{ cm}$$

Emniyetli boyutları: $b \times h = 15 \times 30 \text{ cm}$

ÖRNEK: 2) Şekilde görüldüğü gibi yüklü kirişte;

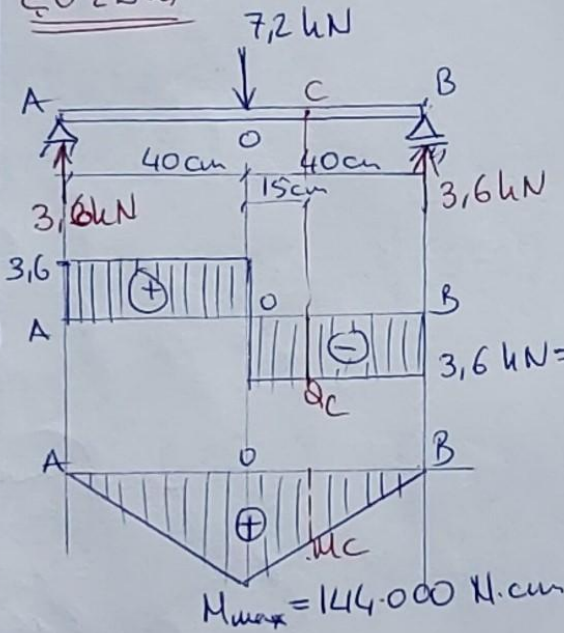


a) C noktasındaki $\tau_c = ?$ $\sigma_c = ?$

b) $\tau_{max} = ?$
 $\sigma_{max} = ?$

(Kiriş $Q + M_x$ etkilindedir)

ÇÖZÜM:



$$F_A = F_B = 3,6 \text{ kN} = 3600 \text{ N}$$

$$Q_{max} = 3600 \text{ N}$$

$$M_{max} = 144.000 \text{ N.cm}$$

$$Q_c = -3600 \text{ N.}$$

$$\frac{144000}{M_c} = \frac{40}{25}$$

$$M_c = +90.000 \text{ N.cm.}$$

$$I_x = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ cm}^4, \quad Q_c = -3600 \text{ N}$$

$$y_c = -2 \text{ cm}$$

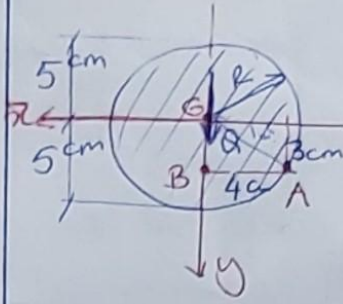
$$a) \tau_c = \frac{Q_c}{2 I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{-3600}{2(72)} \left(\frac{6^2}{4} - (-2)^2 \right) = -125 \text{ N/cm}^2$$

$$b) \tau_{max} = \frac{3 Q_{max}}{2 A} = \frac{3(3600)}{2(4 \cdot 6)} = 225 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} = \frac{144.000}{\frac{4 \cdot 6^2}{6}} = 6000 \text{ N/cm}^2$$

$$a) \sigma_c = \frac{M_c}{I_x} y_c = \frac{90.000}{72} (-2) = -2500 \text{ N/cm}^2$$

ÖRNEK: 3)



Şekilde verilen ve 62500 N luk kesme kuvvetinin etkisinde olan daire kesitte A ve B noktalarındaki kayma gerilmelerini ve τ_{max} gerilmesini hesaplayınız ($R=5cm$)

ÇÖZÜM:

$$\tau = \frac{Q}{3I_z} \sqrt{(R^2 - y^2)^2 + y^2 x^2}$$

$$A(4; 3cm)$$

$$B(0; 3)$$

$$\tau_A = \frac{62500}{3 \frac{\pi 5^4}{4}} \sqrt{(5^2 - 3^2)^2 + 3^2 4^2} \approx 850 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_B = \frac{62500}{3 \frac{\pi 5^4}{4}} \sqrt{(5^2 - 3^2)^2 + 3^2 \cdot 0} \approx 680 \text{ N/cm}^2$$

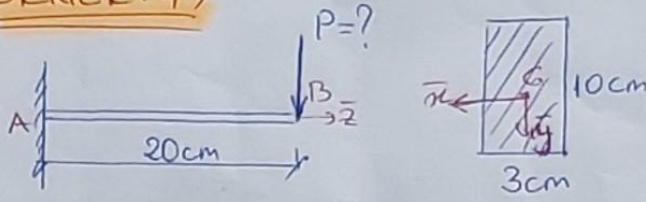
$$\text{Diğer, } \tau_B = \frac{Q}{I_z} \cdot \frac{1}{3} (r^2 - y^2)$$

$$\tau_B = \frac{62500}{3 \frac{\pi 5^4}{4}} (5^2 - 3^2) \approx 680 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{max} = ?$$

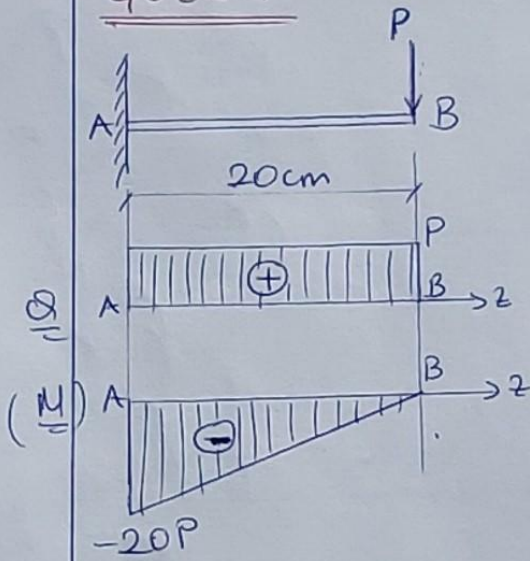
$$\tau_{max} = \frac{4Q_{max}}{3A} = \frac{4(62500)}{3(\pi 5^2)} \approx 1061 \text{ N/cm}^2$$

ÖRNEK 14)



Şekilde yükleme durumu verilen ankastre kirişin emniyetle taşıyabileceği P yükünü bulunuz. Kiriş malzemesi ahşap olup, $\tau_{em} = 10^3 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{em} = 10^2 \text{ N/cm}^2$ dir.

ÇÖZÜM:



$$Q_{max} = P, \quad M_{max} = -20P$$

1) Eğilmeye göre:

$$\tau_{em} = \frac{M_{max}}{W}$$

$$10^3 = \frac{-20P}{\frac{3(10)^2}{6}} \Rightarrow \boxed{P = 2500 \text{ N}} \text{ (I)}$$

2) Kaymaya göre:

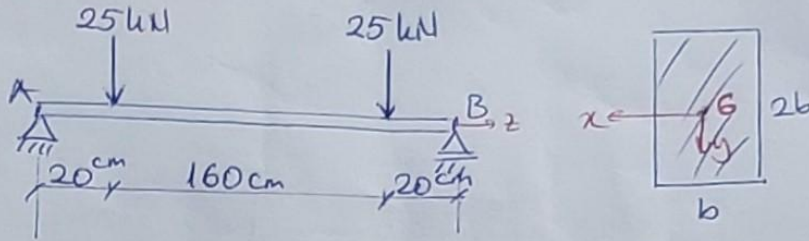
$$\tau_{max} = \frac{3Q_{max}}{2A} < \tau_{em}$$

$$10^2 = \frac{3P}{2(3 \cdot 10)} \Rightarrow \boxed{P = 2000 \text{ N}} \text{ (II)}$$

Sistemin taşıyacağı emniyetli P kuvveti:

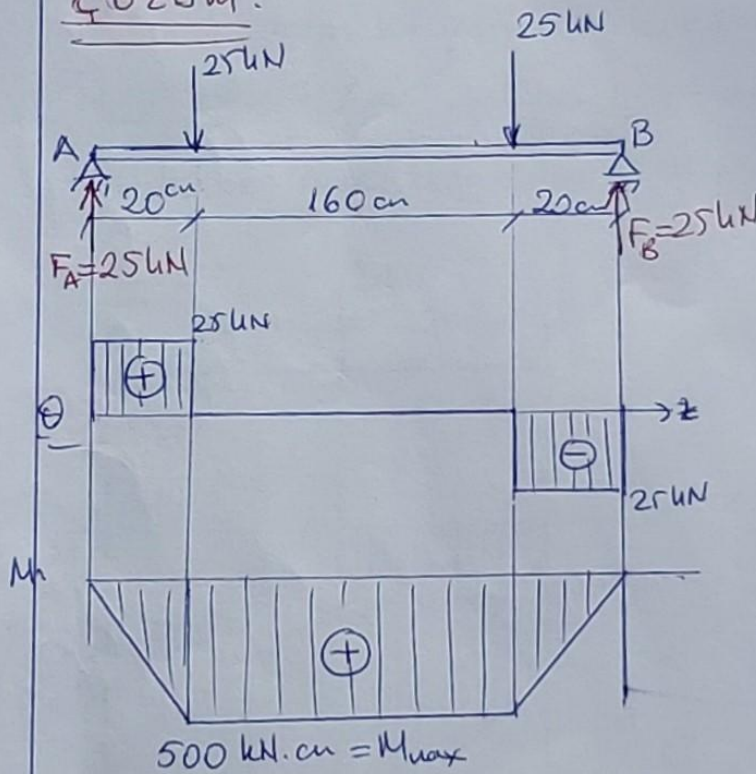
$$\boxed{P = 2000 \text{ N}}$$

ÖRNEK 5)



Ahşaptan yapılmış bir kiriş şekildeki gibi yüklenmiştir. $\tau_{em} = 750 \text{ N/cm}^2$ ve $\tau_{em} = 75 \text{ N/cm}^2$ old göre; emniyetli kesit boyutlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:



$$Q_{max} = 25 \text{ kN} = 25 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{max} = 500 \text{ kN.cm} = 5 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$$

1) Eğilmeye göre: $\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} \leq \tau_{em}$

$$\frac{5 \cdot 10^5}{\frac{b(2b)^2}{6}} \leq 750 \Rightarrow b^3 = 1000$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$b \times h = 10 \times 20 \text{ cm}$$

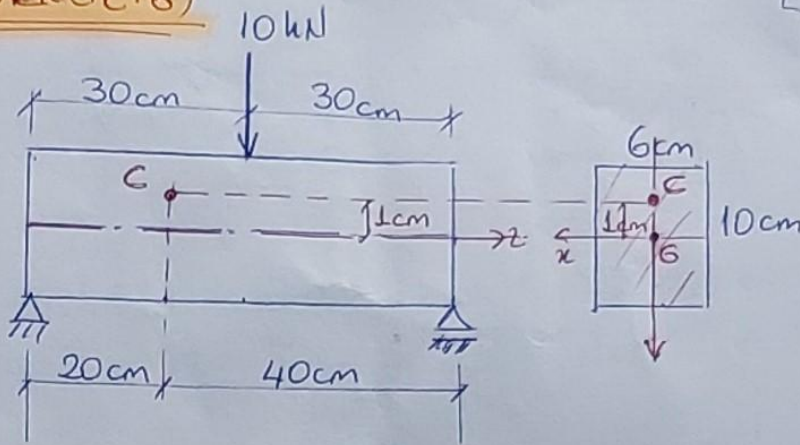
2. Kesmeye göre: $\tau_{max} = \frac{3Q_{max}}{2A} \leq \tau_{em}$

$$\frac{3(25 \cdot 10^3)}{2(b \cdot 2b)} \leq 75 \Rightarrow b^2 \leq 250 \Rightarrow b \approx 16 \text{ cm}$$

$$b \times h = 16 \times 32 \text{ cm}$$

$$\text{EMNİYETLİ KESİT: } b \times h = 16 \times 32 \text{ cm}$$

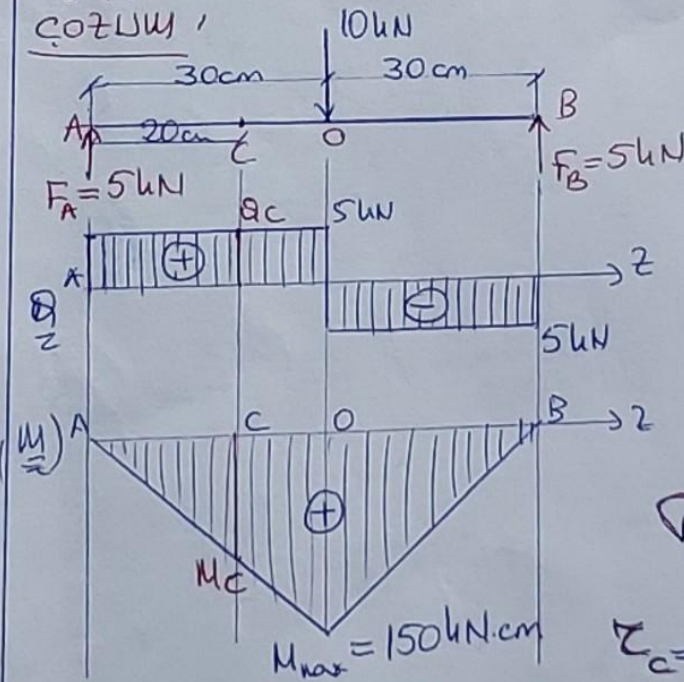
ÖRNEK 16)



$$I_z = \frac{b}{12} (h^3 - y^3)$$

Şekildeki basit kirişin C noktasında asal gerilmeleri ve maksimum kayma gerilmesini hesaplayınız.
 $(\tau_{em})_a = 500 \text{ N/cm}^2$, $(\tau_{em})_b = -300 \text{ N/cm}^2$, $\tau_{em} = 200 \text{ N/cm}^2$ verildiğine göre kontrolünü yapınız.

ÇÖZÜM /



$$Q_c = 5 \text{ kN} = 5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$y_c = -1 \text{ cm}$$

$$\frac{M_c}{150} = \frac{20}{30} \Rightarrow M_c = 100 \text{ kN.cm}$$

$$M_c = 10^5 \text{ N.cm}$$

$$I_x = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ cm}^3$$

$$\tau_c = \frac{M_c}{I_x} y = \frac{10^5}{500} (-1) = -200 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_c = \frac{5000}{2(500)} \left(\frac{10^2}{4} - (-1)^2 \right) = 120 \text{ N/cm}^2$$

$$\text{Asal gerilmeleri } \tau_{1,2} = \frac{-200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200}{2} \right)^2 + (120)^2} = -\frac{200}{2} \pm \tau_{\max} = 156$$

$$\tau_1 = 56 \text{ N/cm}^2, \tau_2 = -256 \text{ N/cm}^2, \tau_{\max} = 156 \text{ N/cm}^2$$

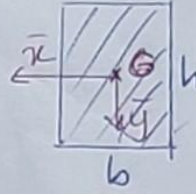
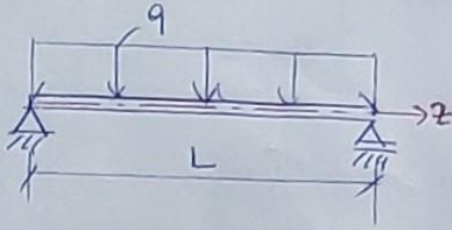
Kontrol: $\tau_1 - \tau_2 < \tau_{em}$ -- (Maximum kayma gerilmesi hipotenüs)

$$56 - (-256) < 500 \Rightarrow 312 < 500 \text{ -- EMNİYETLİ}$$

$$\text{Bicim değeri: } \tau_1^2 - \tau_2^2 - \tau_1 \tau_2 < \tau_{em}^2 : (56)^2 - (-256)^2 - (56)(-256) < (500)^2$$

$$83 \cdot 10^3 < 250 \cdot 10^3 \text{ -- EMNİYETLİ}$$

ÖRNEK: 7)



Şekildeki dikdörtgen kesitli ahşap kirişte emniyet gerilme-
lerinin oranı: $\frac{\sigma_{em}}{\tau_{em}} = \frac{1}{10}$ olarak verilmiştir.

$\frac{h}{L}$ oranının hangi değeri için eğilme ve kesmeye göre
hesaplar aynı sonucu verir?

ÇÖZÜM: $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$, $Q_{max} = \frac{qL}{2}$ dir.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\frac{qL^2}{8}}{\frac{bh^3}{12}} \left(\frac{h}{2}\right) \leq \tau_{em}$$

$$\frac{qL^2}{8} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} \leq \tau_{em} \Rightarrow \frac{3}{4} \frac{qL^2}{bh^2} \leq \tau_{em}$$

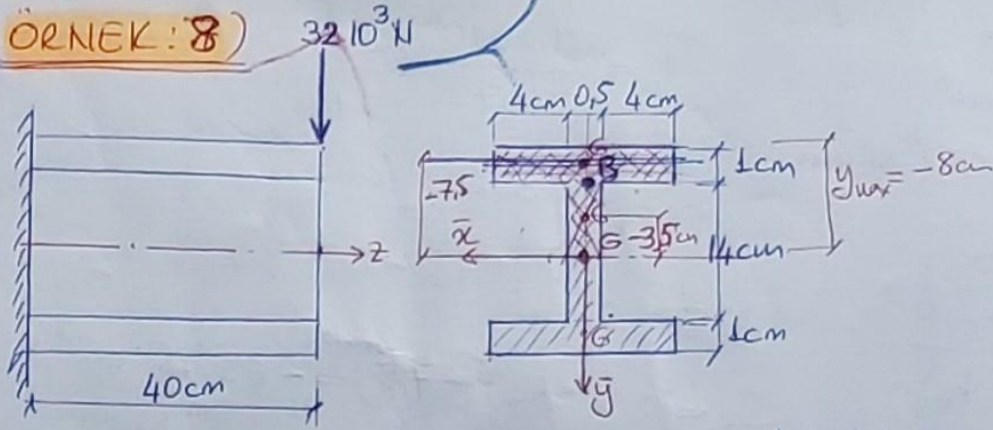
$$\tau_{max} = \frac{3Q_{max}}{2A} = \frac{3\left(\frac{qL}{2}\right)}{2(b \cdot h)} \leq \sigma_{em}$$

$$\frac{3qL}{2} \cdot \frac{1}{2bh} \leq \sigma_{em} \Rightarrow \frac{3}{4} \frac{qL}{bh} \leq \sigma_{em}$$

$$\frac{\sigma_{em}}{\tau_{em}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} \frac{qL}{b \cdot h}}{\frac{3}{4} \frac{qL^2}{bh^2}} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{\frac{h}{L} = \frac{1}{10}} \text{ olmalıdır}$$

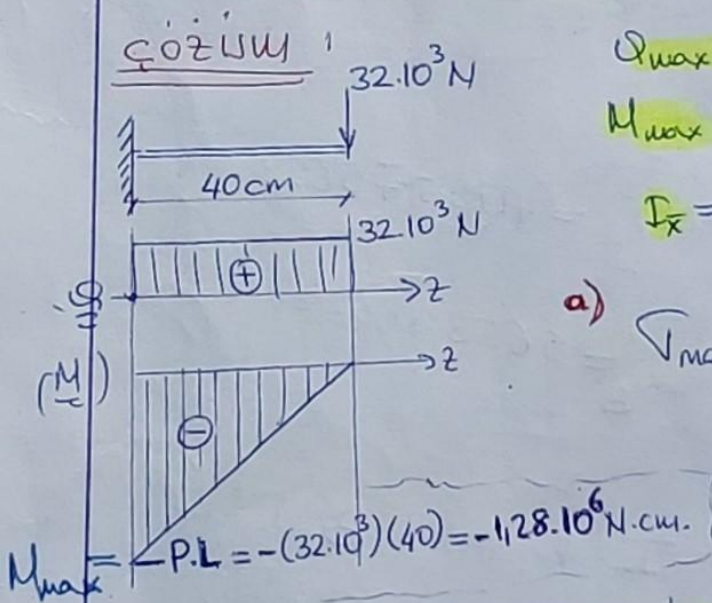
ÖRNEK: 8)



Şekilde verilen I kesitli ankastre kırışta;

- Maxmum normal gerilmeyi ve maxmum kayma gerilmesini bulunuz.
- Bu değerleri kesitin B boyun noktasındaki τ_1 ve τ_{max} ile karşılaştırınız.

ÇÖZÜM



$$Q_{max} = 32 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$y_{max} = -8 \text{ cm}$$

$$M_{max} = -1,28 \cdot 10^6 \text{ N.cm}$$

$$I_x = \frac{8,5(16)^3}{12} - 2 \left[\frac{4(14)^3}{12} \right] \approx 1072 \text{ cm}^4$$

$$a) \quad \tau_{max} = \frac{Q_{max}}{I_x} y_{max} = \frac{-1,28 \cdot 10^6}{1072} (-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ankastre} \\ \text{oldu} \end{array} \right.$$

$$\tau_{max} \approx 9553 \text{ N/cm}^2$$

τ_{max} değeri; T.E. de meydana gelir.

$$\text{T.E. üzerindeki alanının: } S_x = (8,5 \times 1)(7,5) + (7 \times 0,5)(-3,5) = -76 \text{ cm}^3$$

$$b_y = 0,5 \text{ cm}$$

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot b_y} = \frac{(32 \cdot 10^3)(-76)}{(1072)(0,5)} \approx -4538 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{max} \approx -4538 \text{ N/cm}^2$$

a)

TÜM KESİT İÇİN!

$$\tau_{max} = 9553 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{max} = -4538 \text{ N/cm}^2$$

elde edilir.

B boyun noktası için değerleri

b) $y_B = -7 \text{ cm}$

$I_{\bar{x}} = 1072 \text{ cm}^4$

$M_{\text{max}} = -1,28 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{cm}$

$\sigma_B = \frac{-1,28 \cdot 10^6}{1072} (-7)$

$\sigma_B \approx 8359 \text{ N/cm}^2$

$\tau_B = \frac{Q \cdot S_{x_B}}{I_{\bar{x}} (b_B)}$

$b_B = 0,5 \text{ cm}$

$S_{x_B} = (8,5 \times 1) (-7,5) = -63,75 \text{ cm}^3$

Boyun noktasının üstünde kalanın statik momenti

$\tau_B = \frac{(32 \cdot 10^6) (-63,75)}{(1072) (0,5)}$

$\tau_B \approx -3806 \text{ N/cm}^2$

$\sigma_B \approx 8359 \text{ N/cm}^2$
 $\tau_B \approx -3806 \text{ N/cm}^2$

B boyun noktasındaki gerilmeleri

B'deki ASAL GERİLMELER

$\sigma_{B1} = \frac{8359}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8359}{2}\right)^2 + (-3806)^2} = 4179,5 \pm 5653$

$\sigma_{B1} \approx 9833 \text{ N/cm}^2$

$\tau_{\text{max}B} = 5653 \text{ N/cm}^2$

$\sigma_{B2} = -1473,5 \text{ N/cm}^2$

Bu sonuçlar bize gösteriyor ki, I kesiti için B boyun noktası kesitin en çok zorlandığı yerdir. Çünkü, burada düzlem gerilme hali söz konusudur. Bu yüzden Kesit Analizi yapılırken; hesaplar boyun noktasına göre yapılmalıdır.

Tüm kesit için $\tau_{\text{max}} = |-4538| < \tau_{\text{max}B} = 5653$
 $\sigma_{\text{max}} = 9553 < \sigma_{B1} = 9833$