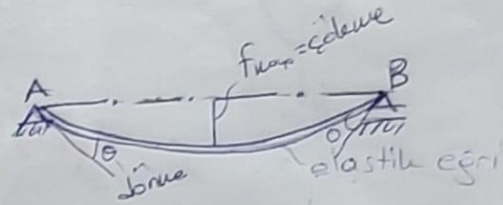
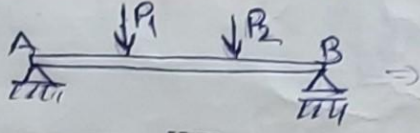
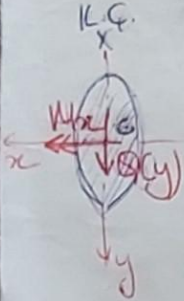


ELASTİK EĞRİ

Dogru eksenli taşıyıcı çubuk sistemlerde, kuvvetler etkisi altında şekil değişimi olur. Çubuk ekseninin yeni şekline "ELASTİK EĞRİ" denir.



Elastik eğri oluşurken çubuk yalnız eğilme momenti ve kesme kuvvetinin etkisi altındadır.

Elastik eğri yardımıyla kuvvetler etkisi altında çubukun herhangi bir noktasındaki yerdeğiştirme ve kesitteki dönme miktarı bulunabilir. Aynı zamanda elastik eğri statikçe belirsiz sistemlerin hesabında önemli rol oynar.

Elastik eğri hesabı çeşitli yöntemlerle yapılabilir:

Kesitin simetrik olması hali halinde:

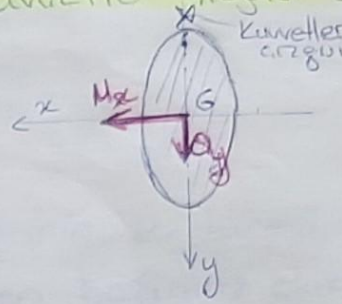
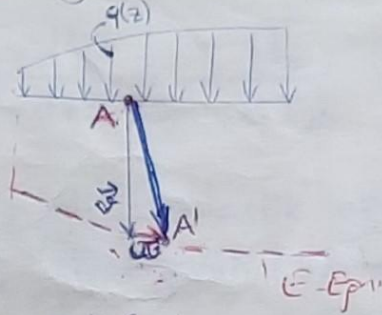
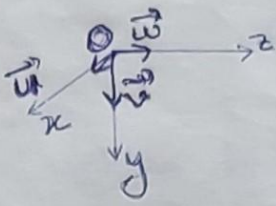
- 1) İntegrasyon yöntemi, ✓
- 2) Başlangıç Değerleri yöntemi, ✓
- 3) Mohr Yöntemi, ✓
- 4) Süperpozisyon yöntemi, ✓
- 5) Konsol Kiriş yöntemi, ✓

- Kesme kuvvetinin elastik eğriye etkisi,

- Elastik eğride genel hal.

1. KESİTİN SİMETRİK OLMASI HALİ:

Simetrik eksenleri aynı zamanda kuvvetler eksenleri olsun.



Şekil: 1

(y-z) : Kuvvetler düzlemi

Simetri nedeniyle elastik eğri bu düzlemin içindedir.

A: Çubuk elemanı üzerinde herhangi bir nokta.

A': Şekil değişiminden sonra A noktasının konumu.

$\vec{AA'}$: A noktasının yer değiştirme vektörü

$\vec{v}, \vec{w}$: $\vec{AA'}$ vektörünün bileşenleri.

$v(z)$ ve $w(z)$ fonksiyonlarının kendileri ve 1. türevleri yeteri kadar küçük kabul edilecektir.

$\vec{w}$: boyuna yer değiştirme (yatay)

$\vec{v}$: düşey yer değiştirme

$\vec{w}$: $\vec{v}$ 'nin yanında bir merteye daha küçüktür. Bu nedenle $\vec{w} \approx 0$ alınacaktır.

Dolayısıyla elastik eğri fonksiyonu dediğimiz

$$v = v(z) \quad (3.1)$$

fonksiyonu hesaplamak yeterli olacaktır.

Basit eğilme halinde:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (3.2)$$

ρ : eğrilik yarıçapıdır.

Eğrilik, $v(z)$ fonksiyonu ile ifade edilirse:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2v/dz^2}{[1 + (dv/dz)^2]^{3/2}} \quad (3.3)$$

olar. dv/dz gerçekte çok küçük olup, karesi 1'in yanında ihmal edilebilir.

Pozitif moment ile pozitif eğrilik ters yönlere olduklarından,
(3.2) ifadesi:

$$Q'' = \frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x} \quad (3.4)$$

şekline dönüşür. Böylece elastik eğrinin 2. türevi elde edilmiş olur. EI_x rijidliğinin (z) den bağımsız olması halinde:

$$\textcircled{4} \underline{Q''} = \frac{d^3 v}{dz^3} = - \frac{Q_y}{EI_x}, \quad \textcircled{1} (\text{ÇÖKME}) = Q(z), \quad (3.5)$$

$$\textcircled{5} \underline{Q'''} = \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q_y}{EI_x}, \quad \textcircled{2} (\text{DÖNME}) = Q'(z)$$

$$\textcircled{3} \underline{Q''} = - \frac{1}{\rho} = - \frac{u(x)}{EI_x}$$

bağıntıları elde edilir

Buna göre bir elastik eğri fonksiyonunda:

$$Q(z) = \text{Çökme}$$

$$Q'(z) = \text{Dönme}$$

$$-EI_x v''(z) = M_x, \text{ eğilme momentini}$$

$$-EI_x v'''(z) = Q_y, \text{ kesme kuvvetini}$$

$$EI_x v^{(4)}(z) = q_y, \text{ yayıcı yükün birim yük değerini göstermektedir}$$

$$\begin{cases} \frac{dM_e}{dz} = Q \\ \frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = -q \end{cases}$$

$$1... v(z) = Q(z): \text{Çökme (Sehim)}$$

$$2... \frac{dv}{dz} = Q'(z): \text{Dönme (Eğim)}$$

$$3... \frac{d^2 v}{dz^2} = Q''(z): + \frac{1}{\rho} = - \frac{M_z}{EI_z} \quad (\text{Eğilme Momenti ver}) \quad (3.5)$$

$$4... \frac{d^3 v}{dz^3} = Q'''(z): \frac{d^3 v}{dz^3} = - \frac{Q_y}{EI_z} \quad (\text{Kesme K. ver})$$

$$5... \frac{d^4 v}{dz^4} = Q^{(4)}(z): \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q_y}{EI_z} \quad (\text{Birim yükü ver})$$

I. İNTEGRASYON YÖNTEMİ:

M_x : Eğilme momenti

EI_x : rijitlik

ise: (3.4) ifadesi olan

$$Q'' = \frac{d^2 Q}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x} = - \frac{1}{\delta} \quad (3.4)$$

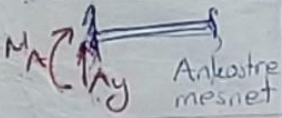
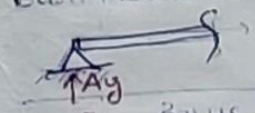
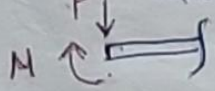
formül iki defa integre edilirse:

$$\frac{dQ}{dz} = - \int \frac{M_x}{EI_x} dz + C_1$$

$$v(z) = - \int \left(\int \frac{M_x}{EI_x} dz \right) dz + C_1 z + C_2$$

olarak elastik eğri fonksiyonu bulunur. Buradaki C_1 ve C_2 sabitleri sınır koşullarından hesaplanır.

Eğer (3.5)₂ ifadesi kullanılırsa, arka arkaya dört kez integral alınarak $v(z)$ fonksiyonu dört integral sabitine bağlı olarak bulunur. Bu integral sabitleri de geometrik ve dinamik sınır koşulları kullanılarak hesaplanır.

Mesnet tipi	SINIR KOŞULLARI	
	2 türevli ifade	4 türevli ifade
 Ankastre mesnet	$v = v' = 0$	$v = v' = 0$ $-EIv'' = M_A, -EIv''' = A_y$
 Basit mesnet	$v = 0$	$v = 0$ $v'' = 0, -EIv''' = A_y$ $(M_A = 0)$
 Bazı us	—	$-EIv'' = M, -EIv''' = -P$

Şekil 3.2 - Çeşitli mesnetler için sınır koşulları

$v(z)$ ve $v'(z)$ üzerine yazılan koşullara "geometrik sınır koşulları", $v''(z)$ ve $v'''(z)$ üzerine yazılan koşullara da "Dinamik sınır koşulları" denir.

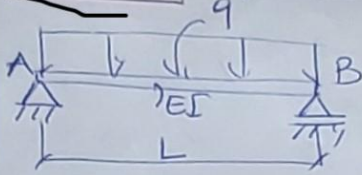
Taşıyıcı sistem üzerinde tekil yük, ara mesnet, ara mafsall bulunması, yayılı yükün başladığı veya bittiği, rigitliğin atlamaya yaptığı noktalarda elastik eğrinin yapısı da değişecektir. Bu tür noktaların iki tarafında elastik eğri fonksiyonları v_1 ve v_2 ise bu fonksiyonlar arasında süreklilik koşulları vardır.

Farklı bölgeli problemlerde integral ^(sabitlenmesi) değişmezlerinin hesabını da sınır koşullarına ilave olarak süreklilik koşullarında kullanılır.

SÜREKSİZLİK ($I_x=I$)	$z=z_A$ daki süreklilik koşulları
	$v_1 = v_2, \quad v_1' = v_2'$ $(EI)_1 v_1'' = (EI)_2 v_2''$ $-(EI)_2 v_2''' + (EI)_1 v_1''' = P$
	$v_1 = v_2 = 0, \quad v_1' = v_2'$ $(EI)_1 v_1'' = (EI)_2 v_2''$ $-(EI)_2 v_2''' + (EI)_1 v_1''' = A_y$
	$v_1 = v_2, \quad v_1'' = v_2'' = 0$ $EI_1 v_1''' = EI_2 v_2'''$
	$v_1 = v_2, \quad v_1' = v_2', \quad (EI)_1 v_1'' = (EI)_2 v_2''$ $(EI)_1 v_1''' = (EI)_2 v_2'''$
	$v_1 = v_2, \quad v_1' = v_2', \quad (EI)_1 v_1'' = (EI)_2 v_2''$ $(EI)_1 v_1''' = (EI)_2 v_2'''$

Şekil: 3.3. Süreklilik koşulları

ÖRNEK:



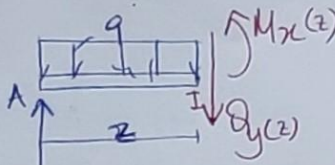
Şekilde boyutları ve yükleme durumu verilen kiriste; "INTEGRAL METODU" kullanılarak

- Elastik eğri denklemini bulunuz.
- Maximum çökme değerini ve yerini bulunuz.
- A ve B'deki dönme değerlerini bulunuz.

(NOT: EI_x rijitliği kiriş boyunca sabittir.)

ÇÖZÜM: Simetriden: $Q_A = Q_B = \frac{qL}{2}$

$0 \leq z \leq L$... (AB)



$$\sum M_{x_S} = 0: M_x - \frac{qL}{2}z + (q \cdot z)\left(\frac{z}{2}\right) = 0$$

$$M_x = \frac{qL}{2}z - \frac{q}{2}z^2$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x} = +\frac{1}{EI} \left[\frac{q}{2}z^2 - \frac{qL}{2}z \right]$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{6}z^3 - \frac{qL}{2}z^2 + C_1 \right]$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{24}z^4 - \frac{qL}{12}z^3 + C_1z + C_2 \right]$$

Sınır koşulları: $z=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow C_2=0$
 $z=L \Rightarrow v=0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24}$

a) Buna göre elastik eğri denklemini:

$$v = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{24}z^4 - \frac{qL}{12}z^3 + \frac{qL^3}{24}z \right]$$

--- ELASTİK EĞRİ DENK.

b) NOT: $v_{\max}$ için: $\frac{dv}{dz} = 0$ eşitlenir.

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{6}z^3 - \frac{qL}{4}z^2 + \frac{qL^3}{24} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{L}{2} \quad \begin{matrix} \text{maximum} \\ \text{çökmenin} \\ \text{yeri} \end{matrix}$$

$$v_{\max} \Big|_{z=\frac{L}{2}} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} = 0,013 \frac{qL^4}{EI}$$

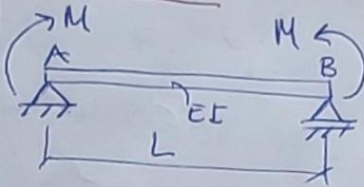
c) A ve B deki dönmeler için

$$\theta_A = v'_A(z) = \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=0} = \frac{qL^3}{24EI} \Rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{qL^3}{24EI}}$$

$$\theta_B = v'_B(z) = \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=L} = -\frac{qL^3}{24EI} \Rightarrow \boxed{\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI}}$$

ÖRNEK:

Sekildaki sistemde, B noktasının dönmesi ve maksimum sönme değeri bulunuz.
(INTEGRAL METOD İLE BULUNUZ)



ÇÖZÜM: $\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{Mx}{EIx}$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{dv}{dz} = -\frac{M}{EI} [z + C_1]$$

$$v = -\frac{M}{EI} \left[\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \right] \dots (1)$$

Sınır şartları:

$$z=0 \Rightarrow v(z)=0 \Rightarrow \boxed{C_2=0} \dots (1)$$

$$z=L \Rightarrow v(z)=0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{L}{2}} \dots (2)$$

$$v(z) = -\frac{M}{EI} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{L}{2} z \right] \Rightarrow v(z) = \frac{M}{2EI} [-z^2 + Lz]$$

$$v(z) = \frac{M}{2EI} [Lz - z^2] \text{ . ELASTİK EĞRİ DENKLEMİ}$$

Simetriden dolayı, en büyük sönme kirişin ortasında gelir.

$$\frac{dv}{dz} = 0 \Rightarrow -\frac{M}{EI} \left[z - \frac{L}{2} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{L}{2}}$$

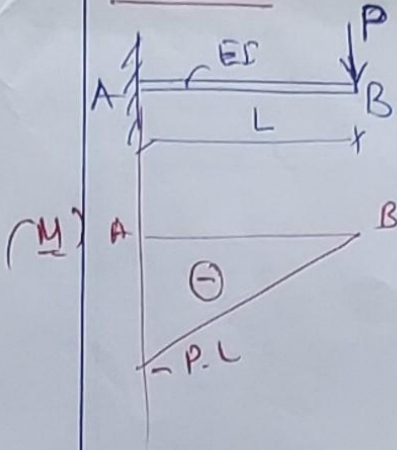
$$v_{\max} = v \Big|_{z=\frac{L}{2}} = \frac{M}{2EI} \left[-\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L\left(\frac{L}{2}\right) \right] = \boxed{\frac{ML^2}{8EI}} \text{ Maksimum sönme}$$

$$v'_B = \theta_B = v' \Big|_{z=L} = -\frac{M}{EI} \left[L - \frac{L}{2} \right] = -\frac{ML}{2EI} \dots \text{B'deki dönme}$$

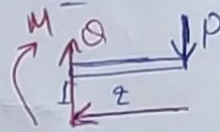
$$v'_A = \theta_A = v' \Big|_{z=0} = -\frac{M}{EI} \left[0 - \frac{L}{2} \right] = +\frac{ML}{2EI} \dots \text{A'daki dönme}$$

SORU:

"İNTEGRAL METOD" ile B deli çökme ve dönmeyi bulunur.



AB: $0 \leq z \leq L$



$$\sum M = 0 : M + P \cdot z = 0$$

$$M = -P \cdot z$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} [z]$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^2}{2} + C_1 \right] \Rightarrow v = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2 \right]$$

Sınır Şartları:

$$v' \Big|_{z=L} = 0 : \frac{L^2}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{L^2}{2}$$

$$v \Big|_{z=L} = 0 : \frac{L^3}{6} - \frac{L^2}{2} \left(\frac{L}{2} \right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{L^3}{3}$$

Buna göre: $\frac{dv}{dz} = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right]$... Dönme denkli

$$v = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{6} - \frac{L^2}{2} z + \frac{L^3}{3} \right]$$
 ... Çökme Elastik eğri

$$\theta_B = v' \Big|_{z=0} = \frac{P}{EI} \left[-\frac{L^2}{2} \right] \Rightarrow \theta_B = v' \Big|_{z=0} = -\frac{PL^2}{2EI}$$
 B deli Dönme

$$v \Big|_{z=0} = \frac{P}{EI} \left[\frac{L^3}{3} \right] \Rightarrow v_B = \frac{PL^3}{3EI}$$
 B deli Çökme

I. İNTEGRASYON YÖNTEMİ:

M_x : Eğilme momenti

EI_x : rijitlik

ise: (3.4) ifadesi olan

$$Q'' = \left[\frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x} \right] = - \frac{1}{\rho} \quad (3.4)$$

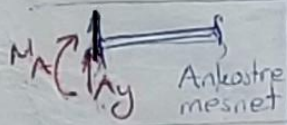
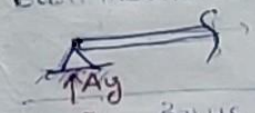
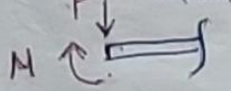
formül iki defa integre edilirse:

$$\left[\frac{dv}{dz} = - \int \frac{M_x}{EI_x} dz + C_1 \right]$$

$$v(z) = - \int \left(\int \frac{M_x}{EI_x} dz \right) dz + C_1 z + C_2$$

olarak elastik eğri fonksiyonu bulunur. Buradaki C_1 ve C_2 sabitleri sınır koşullarından hesaplanır.

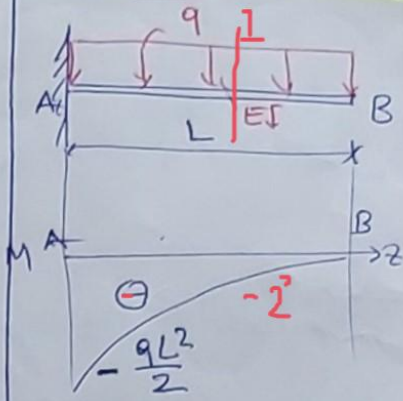
Eğer (3.5)₂ ifadesi kullanılırsa, arka arkaya dört kez integral alınarak $v(z)$ fonksiyonu dört integral sabitine bağlı olarak bulunur. Bu integral sabitleri de geometrik ve dinamik sınır koşulları kullanılarak hesaplanır.

Mesnet tipi	2 türevli ifade	4 türevli ifade
 Ankastre mesnet	$v = v' = 0$	$v = v' = 0$ $-EIv'' = M_A, -EIv''' = A_y$
 Basit mesnet	$v = 0$	$v = 0$ $v'' = 0, -EIv''' = A_y$ $(M_A = 0)$
 Bölge	$—$	$-EIv'' = M, -EIv''' = -P$

Şekil 3.2 - Çeşitli mesnetler için sınır koşulları

$v(z)$ ve $v'(z)$ üzerine yazılan koşullara "geometrik sınır koşulları", $v''(z)$ ve $v'''(z)$ üzerine yazılan koşullara da "Dinamik sınır koşulları" denir.

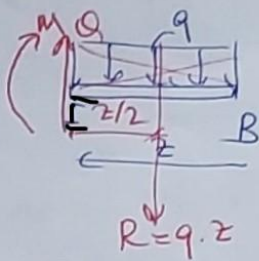
SORU! "İNTÉGRAL METODU" kullanarak;



- Konsol birisin elastik eğri denklemini elde ediniz.
- B uçundaki dönmeyi ve çökmeyi bulunuz.



ÇÖZÜM : Tek bölgeli bir problemdir.



$$\underline{AB} : 0 \leq z \leq L$$

$$\sum M_F = 0 : M + (q \cdot z) \left(\frac{z}{2} \right) = 0$$

$$M = -\frac{q z^2}{2}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{q}{EI} \left[\frac{z^2}{2} \right]$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{q}{EI} \left[\frac{z^3}{6} + C_1 \right] \Rightarrow \frac{dv}{dz} = \frac{q}{EI} \left[\frac{z^3}{6} - \frac{L^3}{6} \right]$$

$$v = \frac{q}{EI} \left[\frac{z^4}{24} + C_1 z + C_2 \right] \Rightarrow v = \frac{q}{EI} \left[\frac{z^4}{24} - \frac{L^3}{6} z + \frac{L^4}{8} \right]$$

ELASTİK EĞRİ DENKLEMİ

C_1 ve C_2 integral sabitlerinin bulunması;

$$v|_{z=L} = 0 \Rightarrow \frac{L^4}{24} + C_1 L + C_2 = 0 \quad \dots (1)$$

$$v'|_{z=L} = 0 \Rightarrow \frac{L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{L^3}{6} \quad \dots (2)$$

$$(1) \text{ deni: } \frac{L^4}{24} - \frac{L^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{3L^4}{24} \Rightarrow C_2 = \frac{L^4}{8}$$

B deli çökme ve dönme değerleri

$$v_B(z=0) = \frac{q}{EI} \left[\frac{L^4}{8} \right] \Rightarrow v_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \text{B deli çökme}$$

$$\theta_B = v'_B(z=0) = \frac{q}{EI} \left[-\frac{L^3}{6} \right] \Rightarrow \theta_B = v'_B = -\frac{qL^3}{6EI} \quad \text{B deli Dönme}$$