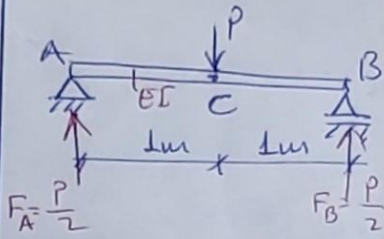


ÖRNEK:



Şekilde boyutları ve yükleme durumu verilen kırıste, "INTEGRAL METODU" kullanarak;

- Elastik eğri denklemini bulunuz.
- $v_{max} = ?$
- A ve B de dönmeleri hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Simetriden: $F_A = F_B = \frac{P}{2}$

AC: $0 \leq x \leq 1m$

$$\begin{aligned} \sum M_F = 0: \\ M_1 - \frac{P}{2} \cdot x = 0 \\ \boxed{M_1 = \frac{P}{2} x} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = - \frac{M_1}{EI}$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = - \frac{M_1}{EI} = \frac{P}{EI} \left[-\frac{1}{2} x \right]$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^2}{4} + C_1 \right]$$

$$v_1 = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2 \right]$$

CB: $1 \leq x \leq 2m$

$$\begin{aligned} \sum M_F = 0: \\ M_2 + P(x-1) - \frac{P}{2} x = 0 \\ \boxed{M_2 = +P \left(-\frac{1}{2} x + 1 \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = - \frac{M_2}{EI}$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = - \frac{M_2}{EI} = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{2} x - 1 \right]$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^2}{4} - x + D_1 \right]$$

$$v_2 = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + D_1 x + D_2 \right]$$

Integral sabitlerinin bulunması

$$x=0 \Rightarrow v_1=0 \Rightarrow C_2=0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x=L \Rightarrow v_2 \Big|_{x=2m} = 0 \Rightarrow D_2 = -2D_1 + \frac{4}{3} \quad \text{--- (2)}$$

$$v_1 \Big|_{x=1} = v_2 \Big|_{x=1} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3} + D_1 + D_2 \quad \text{--- (3)}$$

$$v_1' \Big|_{x=1} = v_2' \Big|_{x=1} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} + D_1 \quad \text{--- (4)}$$

(1), (2), (3) ve (4) den integral sabitleri

$$C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = \frac{3}{4}, \quad D_2 = -\frac{1}{6} \quad \text{bulunur.}$$

AC : $0 \leq x_1 \leq 1m$ için:

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \right] \dots \text{Dönme}$$

$$v_1 = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x \right] \dots \text{Çökme (E.E.)}$$

CB : $1 \leq x_2 \leq 2m$ için,

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^2}{4} - x + \frac{3}{4} \right]$$

$$v_2 = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{6} \right]$$

b) Simetriden, kirişin orta noktasında v_{max} oluşur.

$$v_1 \Big|_{x=1} = v_{max} = \frac{P}{EI} \left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right]$$

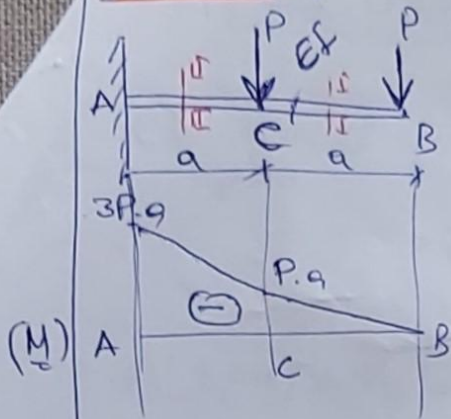
$$v_{max} = \frac{P}{6EI}$$

c) A ve B'deki dönmeleri

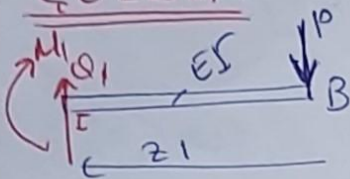
$$\theta_A = \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{4} \right] = \frac{P}{4EI}$$

$$\theta_B = \frac{dv_2}{dx} \Big|_{x=2} = \frac{P}{EI} \left[\frac{2^2}{4} - 2 + \frac{3}{4} \right] = -\frac{P}{4EI}$$

Şekildeki kirişin B uandaki
çökme ve dönmeyi " **INTEGRAL**
METOD" ile bulunuz.



ÇÖZÜM:



BC: $0 \leq z_1 \leq a$

$$\sum M_1 = 0: M_1 + P \cdot z_1 = 0$$

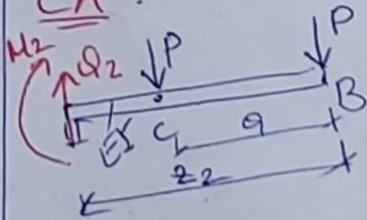
$$M_1 = -P \cdot z_1 = -P(z_1)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{P}{EI} [z_1]$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{P}{EI} \left(\frac{z^2}{2} + C_1 \right)$$

$$v_1 = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2 \right]$$

CA: $a \leq z_2 \leq 2a$



$$\sum M_2 = 0: M_2 + P \cdot z_2 + P(z_2 - a) = 0$$

$$M_2 = P(-2z_2 + a)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dz^2} = -\frac{M_2}{EI} = \frac{P}{EI} [2z - a]$$

$$\frac{dv_2}{dz} = \frac{P}{EI} \left[z^2 - a \cdot z + D_1 \right]$$

$$v_2 = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{a}{2} z^2 + D_1 z + D_2 \right]$$

$\Rightarrow$

1) -2, D₁ ve D₂ katsayılarının bulunması,

$$v_2|_{z_2=2a} = 0 : \frac{(2a)^3}{3} - \frac{a}{2} (2a)^2 + D_1 (2a) + D_2 = 0$$

$$\frac{2a^3}{3} + 2a D_1 + D_2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$v_1(z_1=a) = v_2(z_2=a)$$

$$\frac{a^3}{6} + a C_1 + C_2 = a D_1 + D_2 \quad \dots\dots (2)$$

$$v_1'(z_1=a) = v_2'(z_2=a)$$

$$\frac{a^2}{2} + C_1 = a^2 - a^2 + D_1 \Rightarrow D_1 = C_1 + \frac{a^2}{2} \quad \dots\dots (3)$$

$$v_2'(z_2=2a) = 0$$

$$(2a)^2 - 2a^2 + D_1 = 0 \Rightarrow \boxed{D_1 = -2a^2} \quad \dots\dots (4)$$

(1), (2), (3) ve (4) den:

$$\boxed{C_1 = -\frac{5}{2}a^2, \quad C_2 = \frac{7}{2}a^3, \quad D_1 = -2a^2, \quad D_2 = \frac{10}{3}a^3}$$

BUNA GÖRE:

$$\underline{BC} : 0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{6} - \frac{5}{2}a^2 z + \frac{7}{2}a^3 \right] \\ v_1' = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{5}{2}a^2 \right] \end{cases}$$

$$\underline{CA} : a \leq z_2 \leq 2a \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{P}{EI} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{a}{2} z^2 - 2a^2 z + \frac{10}{3}a^3 \right] \\ v_2' = \frac{P}{EI} \left[z^2 - a z - 2a^2 \right] \end{cases}$$

B ucundaki dönme ve çökme

$$\theta_B = v_1'|_B (z_1=0) = \frac{P}{EI} \left[-\frac{5}{2}a^2 \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_B = v_1'|_B = -\frac{5}{2} \frac{Pa^2}{EI}} \quad \begin{matrix} B \text{ deki} \\ \text{Dönme} \end{matrix}$$

$$v_1|_B (z_1=0) = \frac{P}{EI} \left[\frac{7}{2}a^3 \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta_B = v_1|_B = \frac{7}{2} \frac{Pa^3}{EI}} \quad \begin{matrix} B \text{ deki} \\ \text{Çökme} \end{matrix}$$

3. MOHR YÖNTEMİ

Bu yöntemde işlemler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

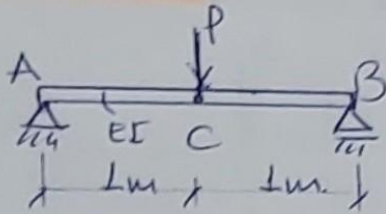
1. Sistemin eğilme momenti diyagramı çizilir.
2. Sistemin Mohr sistemi veya eşlenik sistemi adı verilen bir sisteme, bulunan $M_x(z)$ değerleri $E(z)I_x(z)$ değerlerine bölünerek elde edilen büyüklük, yayılı yük olarak yüklenir. Mohr sisteminin seçimindeki esaslar Şekil 3.5'te açıklanmıştır.
3. Mohr sisteminde $\frac{M_x(z)}{E(z)I_x(z)}$ yayılı yükü etkisi altında hesaplanan eğilme momenti $M_x(z)$ ve kesme kuvveti $Q_y(z)$ değerleri gerçek sistemdeki çökme ve dönme değerlerini verir. Gerçek sistemin eksen boyutları ile Mohr sisteminin eksen boyutları aynıdır.

Gerçek sistem	eşlenik sistem (Mohr sistemi)
Kenar Mesnet	Kenar mesnet
Ankastre mesnet	Boş uç Ankastre mesnet
Boş uç	Ankastre mesnet
Ara mesnet	Ara mafsal
Ara mafsal	Ara mesnet

Şekil 3.5-

Kayıcı mesnet için de ; sabit mesnet için geçerli olan koşullar geçerlidir. Mohr yöntemi sisteminde tehiit yüklerinin bulunması ve EI_x eğilme rijitliğinin sabit olması hallerinde özellikle kullanışlıdır. Ayrıca belli noktalarda χ çökme ve dönme değerleri. ~~burada~~ bundan önce açıklanan yöntemlere göre daha az işlemle bulunur.

ÖRNEK: • "MOHR YÖNTEMİ"ni kullanarak,



- a) $v_{max} = ?$ ve yerini bulunuz
b) $\theta_A = ?$ $\theta_B = ?$

ÇÖZÜM:

Mesnet tepkileri:

$$F_A = F_B = \frac{P}{2} \quad (\uparrow)$$

$$M_C = \frac{P}{2}$$

MOHR SİSTEMİNDEN:

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2EI} \cdot 1 \right) = \frac{P}{4EI}$$

$$\sum M_A = 0: R_1 \left(\frac{2}{3} \right) + R_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - V_B (2) = 0$$

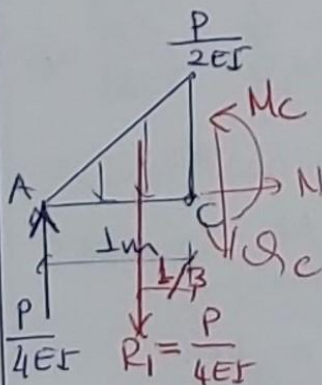
$$\left(\frac{P}{4EI} \right) \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{P}{4EI} \left(\frac{4}{3} \right) = 2V_B$$

$$\frac{P}{6EI} + \frac{P}{3EI} = 2V_B$$

$$2V_B = \frac{3P}{6EI} \Rightarrow V_B = \frac{P}{4EI}$$

$$V_A = V_B = \frac{P}{4EI}$$

A ve B'deki
DÖNME DEĞERLERİ



$$Q_C = 0: \text{ (Kirişin orta noktası)}$$

$$\sum M_C = 0: M_C - \frac{P}{4EI} (1) + \left(\frac{P}{4EI} \cdot \frac{1}{3} \right) = 0$$

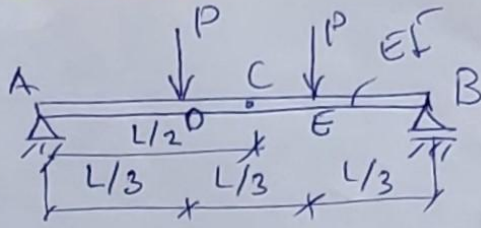
$$M_C = \frac{P}{4EI} - \frac{P}{12EI} = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2P}{12EI}$$

$$v_C = M_C = \frac{P}{6EI}$$

$$v_C = \frac{P}{6EI}$$

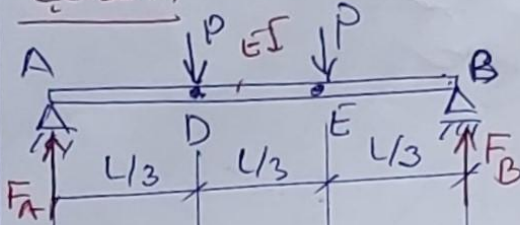
C'deki
ÇÖKME
DEĞERLERİ

SORU:



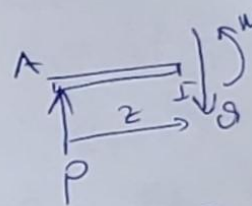
"MOHR YÖNTEMİ" ile D'deki
çökme ve dönme değerlerini
bulunuz.

ÇÖZÜM:



Mesnet tepkileri simetriden;
 $F_A = F_B = P$

$$0 \leq z \leq \frac{L}{3} : AD$$



$$\sum M = 0$$

$$M - P \cdot z = 0$$

$$M = P \cdot z$$

$$z = \frac{L}{3} : M = \frac{PL}{3}$$

Mohr Sisteminden,

$$R_1 = R_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{3EI} \cdot \frac{L}{3} \right) = \frac{PL^2}{18EI}$$

$$R_2 = \frac{PL}{3EI} \cdot \frac{L}{3} = \frac{PL^2}{9EI}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_3 \cdot \left(\frac{L}{3} \cdot \frac{2L}{3} \right) + R_2 \cdot \left(\frac{L}{2} \right) + R_1 \left(\frac{2L}{3} + \frac{1L}{3} \right) - V_A \cdot L = 0$$

$$-V_A \cdot L = 0$$

$$V_A \cdot L = \frac{PL^2}{18EI} \left(\frac{2L}{3} \right) + \left(\frac{PL^2}{9EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + \left(\frac{PL^2}{18EI} \right) \left(\frac{7L}{3} \right)$$

$$V_A = V_B = \frac{162}{1458} \frac{PL^2}{EI} \quad \text{A ve B'deki} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{PL^2}{9EI}$$

$$\sum F_y = 0 : Q_D + R_1 - V_A = 0 \Rightarrow Q_D = \frac{25}{9} \frac{PL^2}{EI} - \frac{PL^2}{18EI} \Rightarrow Q_D = \frac{40}{18} \frac{PL^2}{EI}$$

D'deki DÖNME

$$\sum M_D = 0 : M_D + R_1 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3} \right) - V_A \left(\frac{L}{3} \right) = 0$$

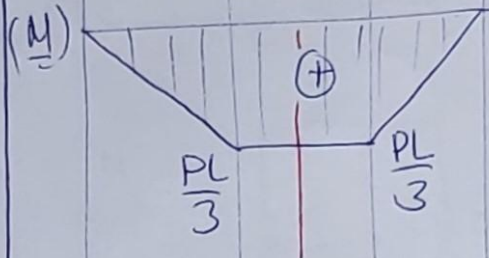
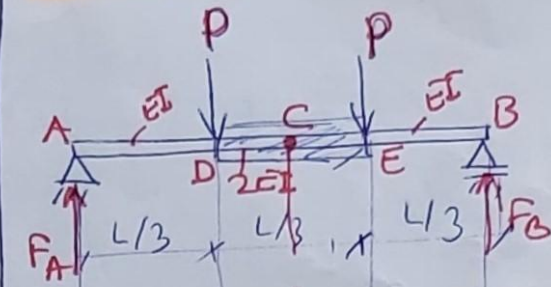
$$\cancel{M_D = \frac{162}{1458} \frac{PL^3}{EI}}$$

D'deki ÇÖKME

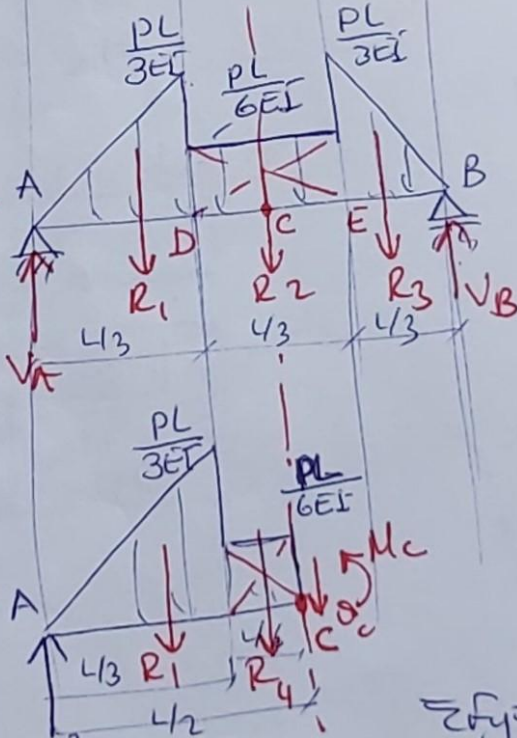
$$f_D = M_D = \frac{5}{162} \frac{PL^3}{EI}$$

MOHR
SİST.

örnekle,



Mohr
SİST.



$$V_A = \frac{PL^2}{12EI}$$

$$\sum F_y = 0: Q_C + R_4 + R_1 - V_A = 0$$

$$Q_C = \frac{PL^2}{12EI} - \frac{PL^2}{36EI} - \frac{PL^2}{18EI} \Rightarrow Q_C = 0$$

orta noktada
dönme
sıfırdır.

$$\sum M_C = 0: M_C + R_4 \left(\frac{L}{12} \right) + R_1 \left(\frac{L}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3} \right) - V_A \left(\frac{L}{2} \right) = 0$$

$$M_C = \frac{31}{1296} \frac{PL^3}{EI} = 0,024 \frac{PL^3}{EI} \quad \left| \begin{array}{l} C \text{ orta noktadaki} \\ \text{çökme değeri} \end{array} \right.$$

'MOHR YÖNTEMİ'ni kullanarak
kirişin C orta noktasındaki
çökmeği bulunuz

ÇÖZÜM

$$F_A = F_B = P \quad (\text{Simetriden})$$

$$\text{Mohr sisteminde}$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{3EI} \cdot \frac{L}{3} \right) = \frac{PL^2}{18EI}$$

$$R_1 = R_3$$

$$R_2 = \frac{PL}{6EI} \cdot \frac{L}{3} = \frac{PL^2}{18EI}$$

$$\sum M_A = 0: R_1 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{3} \right) + R_2 \left(L + \frac{L}{6} \right) + R_3 \left(2 \cdot \frac{L}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3} \right) - V_B \cdot L = 0$$

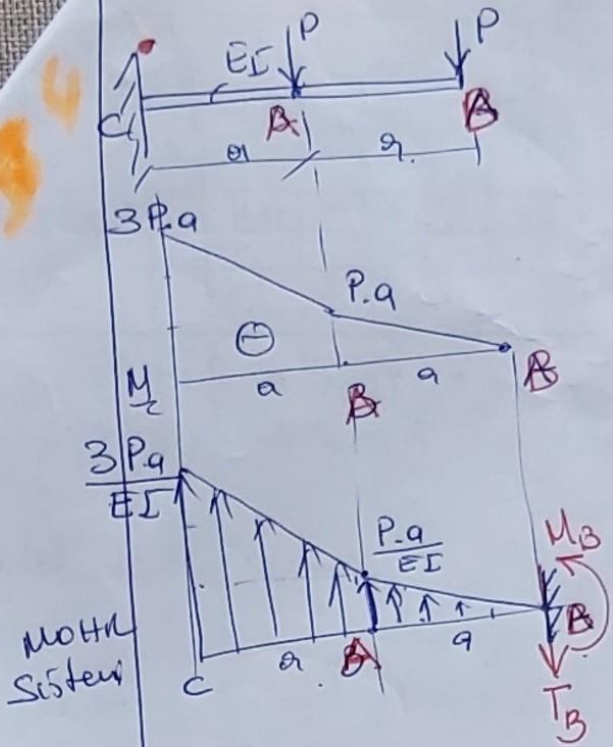
$$V_A = V_B = \frac{PL^2}{12EI} \quad \text{A ve B'deki}$$

dönme

$$R_4 = \frac{PL}{6EI} \cdot \frac{L}{6} = \frac{PL^2}{36EI}$$

Mohr Yöntemi ile!

B'deki eğilme ve dönme = ?



$$\sum F_y = 0 \quad T_B = \frac{\frac{3Pa}{EI} + \frac{Pa}{EI}}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a$$

$$\theta_B = T_B = \frac{5}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

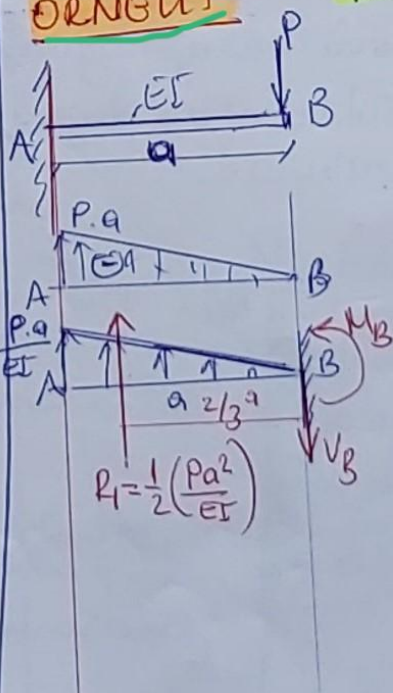
$$\sum M_B = 0$$

$$M_B = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} \cdot a \left(\frac{2}{3} a \right) + \frac{Pa}{EI} \cdot a \left(a + \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2Pa}{EI} a \left(a + \frac{2}{3} a \right)$$

$$v_B = M_B = \frac{7}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

ÖRNEK 1

Mohr Yöntemi ile $v_B = ?$ $v'_B = \theta_B = ?$



Mohr sisteminde

$$\sum F_y = 0 \quad v_B - \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} = 0$$

$$v_B = \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI} \quad \begin{matrix} B \text{ deki} \\ \text{Dönme} \end{matrix}$$

$$\sum M_B = 0 \quad M_B - \left(\frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \right) \left(\frac{2}{3} a \right) = 0$$

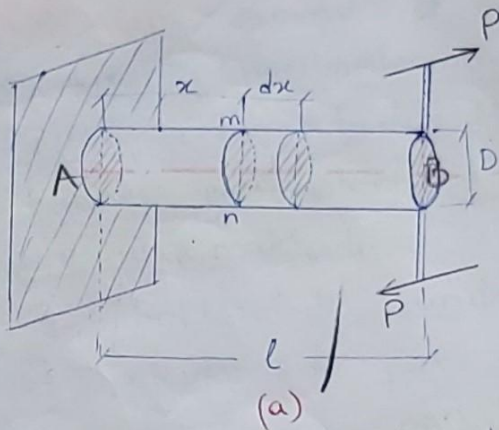
$$M_B = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \begin{matrix} B \text{ deki} \\ \text{Gökme} \end{matrix}$$

BÖLÜM: 7

BURULMA

MİLLERİN BURULMASI:

Şekilde bir ucundan ankastre, diğer ucuyla kuvvet çifti vasıtasıyla bir burulma momentine maruz kalan daire kesitli bir çubuk görülmektedir. Uygulanan kuvvet çifti, çubuk eksenine dik düzlem üzerinde bulunmaktadır. Burulma bağıntılarının çıkarılmasına geçmeden önce yapılan kabuller:

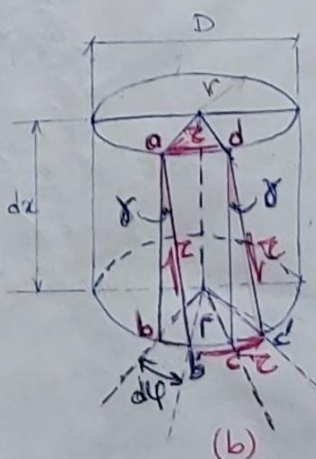


1) Dairesel kesitler, burulmadan sonra yine dairesel kalırlar.

2) Düzlem kesitler, hiçbir değişikliğe uğramadan yine düzlem kalırlar.

3) Kesit üzerindeki radyal çizgiler, doğrusal kalırlar.

4) Burulmaya maruz çubuğun ağırlık eksenini etrafında döndüğü kabul edilir. Şekilde verilen ve ucuyla bir M_b burulma momentine maruz milin m-n kesitinden dx uzunluğunda alınan bir dilimi inceleyelim.



$$\begin{aligned} ab &= dx \\ bb' &= r d\phi \\ d\phi &= \frac{bb'}{r} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\tan \gamma = \gamma = \frac{bb'}{ab} \quad \text{Kayma açısı}$$

$$\gamma = \frac{r d\phi}{dx} = r \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \Rightarrow \gamma = r \theta \quad \text{--- (1)}$$

birim dönme açısı $= \theta$ ile gösterilir.

(abcd) elemanındaki şekil değişimiyi meydana getiren τ kayma gerilmesi şekil b de görülen yönerdedir. (1) bağıntısı $\tau = \gamma G$ şeklindeki Hooke kanununda yerine konursa:

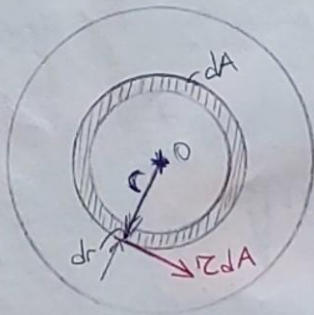
$$\tau = r \theta G \quad (2)$$

elde edilir. Milin dış yüzeyindeki (abcd) elemanı için bulunan bu ifade, mil ekseninden r uzaklıktaki bütün yüzeyler için geçerlidir. θ ve G sabit değerler olduklarına göre, kayma gerilmelerinin r ile doğru orantılı olarak değiştiği görülmektedir. Milin ekseninde sıfır olan τ kayma gerilmeleri, milin dış yüzeyinde maximum değere ulaşmaktadır.

$$r=0 \Rightarrow \tau=0$$

$$r=r \Rightarrow \tau_{max} = r \theta G$$

(2) denklemi ile burulmadan dolayı kayma gerilmesi hesabı, uygulamada pek geçerli değildir. O halde uygulanan M_b burulma momenti ile oluşan τ kayma gerilmeleri arasında bir bağlantı bulmak gereklidir. Şekilde görülen dA elemanına (alanına) tesir eden τ kayma gerilmesinin meydana getirdiği τdA kuvvetinin milin eksenine göre momenti $M_b = \tau dA \cdot r$



$$\tau = r \theta G$$

$$M_b = (\tau dA) \cdot r = G \theta r^2 dA \text{ olup bunu}$$

0 ile $D/2$ sınırları arasındaki integrali uygulanan M_b burulma momentine eşit olmalıdır. Buna göre:

$$M_b = \int_0^{D/2} G \theta r^2 dA = G \theta \int_0^{D/2} r^2 dA = G \theta I_p = M_b \quad (3)$$

I_p : dairesel kesitin polar atalet momentidir. (3) denkleminde

(θ) birim dönme açısı:

$$\theta = \frac{M_b}{G I_p} = \frac{32 M_b}{G \pi D^4} \quad (4)$$

olarak bulunur.

$$M_b = G \theta I_p$$

$$\theta = \frac{M_b}{G I_p}$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow I_p = \frac{\pi D^4}{32}, r = \frac{D}{2}$$