

(abcd) elemanındaki şekil değişimiyi meydana getiren τ kayma gerilmesi şekil b de görülen yönerdedir. (1) bağıntısı $\tau = \gamma G$ şeklindeki Hooke kanununda yerine konursa:

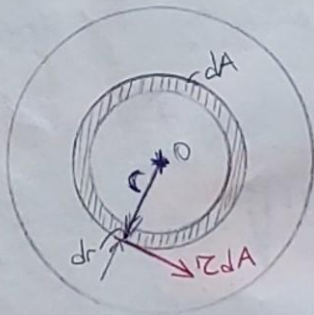
$$\tau = r \theta G \quad (2)$$

elde edilir. Milin dış yüzeyindeki (abcd) elemanı için bulunan bu ifade, mil ekseninden r uzaklıktaki bütün yüzeyler için geçerlidir. θ ve G sabit değerler olduklarına göre, kayma gerilmelerinin r ile doğru orantılı olarak değiştiği görülmektedir. Milin ekseninde sıfır olan τ kayma gerilmeleri, milin dış yüzeyinde maximum değere ulaşmaktadır.

$$r=0 \Rightarrow \tau=0$$

$$r=r \Rightarrow \tau_{max} = r \theta G$$

(2) denklemi ile burulmadan dolayı kayma gerilmesi hesabı, uygulamada pek geçerli değildir. O halde uygulanan M_b burulma momenti ile oluşan τ kayma gerilmeleri arasında bir bağıntı bulmak gereklidir. Şekilde görülen dA elemanına (alanına) tesir eden τ kayma gerilmesinin meydana getirdiği τdA kuvvetinin milin eksenine göre momenti $M_b = \tau dA \cdot r$



$$\tau = r \theta G$$

$$M_b = (\tau dA) \cdot r = G \theta r^2 dA \text{ olup bunu}$$

θ ile $D/2$ sınırları arasındaki integrali uygulanan M_b burulma momentine eşit olmalıdır. Buna göre:

$$M_b = \int_0^{D/2} G \theta r^2 dA = G \theta \int_0^{D/2} r^2 dA = G \theta I_p = M_b \quad (3)$$

I_p : dairesel kesitin polar atalet momentidir. (3) denkleminde

(θ) birim dönme açısı:

$$\theta = \frac{M_b}{G I_p} = \frac{32 M_b}{G \pi D^4} \quad (4)$$

olarak bulunur.

$$M_b = G \theta I_p$$

$$\theta = \frac{M_b}{G I_p}$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} \Rightarrow I_p = \frac{\pi D^4}{32}, r = \frac{D}{2}$$

Relatif Dönme (ϕ)

Milin uzunluğu (l) olduğuna göre toplam burulma açısı: ϕ_{AB} (3)
 ϕ_{AB} : Görününe alınan iki kesit birbirine göre dönme açısı (radyan)
 ϕ : toplam burulma açısı (radyan) (5).

$$\phi_{AB} = \theta l = \frac{M_b l}{G I_r} \text{ (rad.)}$$

$$\phi_{AB} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \frac{M_b l}{G I_r} \text{ (°)}$$

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{1 \text{ rad}}{\pi}$$

$$\theta = \frac{M_b}{G I_r}$$

dir. θ nin denklem (4) deki değeri, denklem (2) de yerine konursa:

$$\tau = r \theta = r \frac{M_b}{G I_r}$$

$$\tau = \frac{M_b \cdot r}{I_r}$$

formülü elde edilir. $r = \frac{D}{2}$ ve $I_r = \frac{\pi D^4}{32}$ değerleri konularak maksimum kayma gerilmesi: (içi dolu bir mil için)

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{16 M_b}{\pi D^3} \text{ İÇİ DOLU MIL İÇİN} \quad (7)$$

bulunur. İçi dolu bir milde, M_b burulma momentinden dolayı meydana gelen $\tau_{\max}$ in kayma gerilmesi $\tau_w = \tau_{\max}$ yi aşmaması gerekir. Buna göre: emniyetli mil çapı:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{em} \text{ den emniyetli mil çapı:}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{em} = \tau_w \text{ (emniyetli bir yüklemeye dayanması için)}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_b}{\pi \tau_{em}}} \quad (8)$$

dur.

Mil çapının nakledilen güç cinsinden hesabı:

Mil çapı, pratikte genellikle nakledilen beygir gücü (BG) cinsinden hesaplanır.

n : milin dakikadaki devir sayısı (dev/dak)

H : Beygir gücü (B.G.'nin, bir saniyede yaptığı iş)

ω : açısal hız :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$M_b \cdot \omega = (75 \cdot 100) \cdot H$$

$$M_b = \frac{2\pi n}{60} = 7500 \cdot H$$

$$M_b = 71620 \frac{H}{n} \text{ (kg.cm)} \Rightarrow M_b = 716200 \frac{H}{n} \text{ (N.cm)}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_b}{\pi \tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{16 (716200 \frac{H}{n})}{\pi \cdot \tau_{em}}} \dots \text{MİL ÇAPI (dolgu)}$$

örnek: Gücü 200 BG olan, dakikada 120 devir yapan bir makinenin milinin emniyetli çapını bulunuz ($\tau_{em} = 2100 \text{ N/cm}^2$).

Çözüm: $M_b = 716200 \frac{200}{120} = 1193667 \text{ N.cm}$

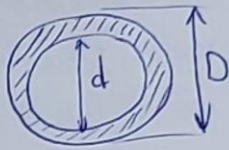
$$D = \sqrt[3]{\frac{16 (1193667)}{\pi (2100)}} = 14,256 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{D = 14,25 \text{ cm}}$$

emniyetli mil çapı

İçi boş millerin burulması:

İçi dolu bir milde maksimum kayma gerilmesi dış yüzünde meydana gelir. İç kısımlardaki malzeme, daha küçük gerilmelerin etkisindedir. Ekonomi sağlamak amacıyla veya ağırlığın azaltılması gereken hallerde (uçak ve gemilerdeki transmisyon milleri gibi), İçi boş miller kullanılır.

İçi dolu mil halindeki hipotezler, içi boş millerde de aynen geçerlidir.



$$\tau = \frac{M_b}{I_r} r$$

$$r = \frac{D}{2}$$
$$I_r = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_b}{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}} \cdot \frac{D}{2} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_b \cdot D}{\pi(D^4 - d^4)}$$

$$\varphi = \theta \cdot L = \frac{M_b}{G \cdot I_r} \cdot L = \left(\frac{M_b}{G \cdot \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}} \right) \cdot L$$

$$\varphi = \frac{32 M_b \cdot L}{G \pi(D^4 - d^4)} \text{ --- (radyan)}$$

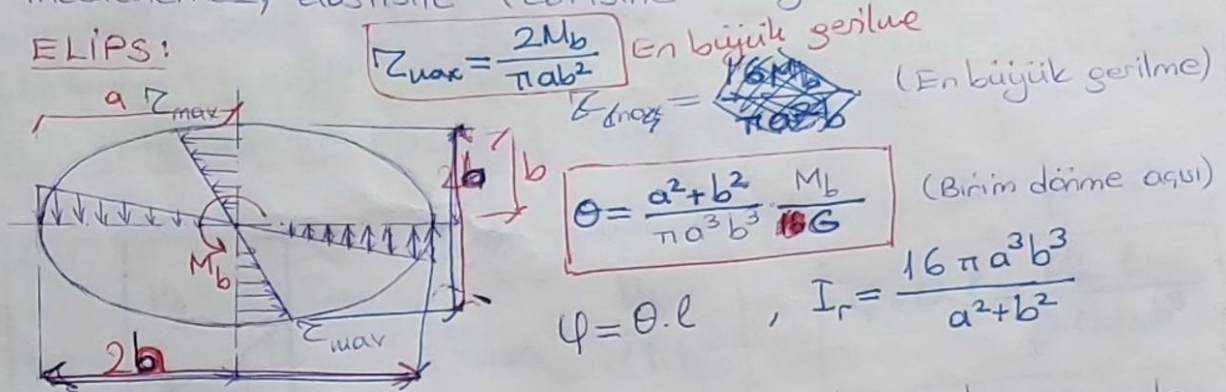
$$\varphi^\circ = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \frac{32 M_b \cdot L}{G \pi(D^4 - d^4)} \text{ --- } (^\circ)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \cdot 180^\circ \\ \cancel{\pi} \cdot \cancel{\pi} \\ x = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,3 \end{array} \right\}$$

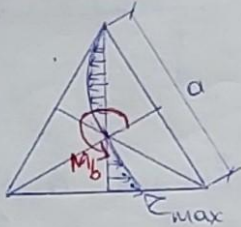
DAİRE KESİTLİ OLMAYAN MİLLERİN BURULMASI:

Böyle dan kesitlerin burulması elementer yollarla incelenemez, elastisite teorisine ihtiyaç vardır

ELİPS:



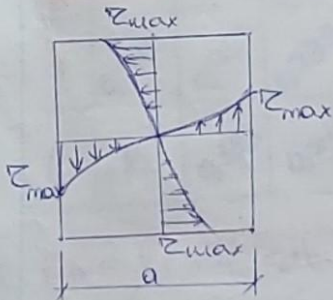
EŞKENAR ÜÇGEN: En büyük kayma gerilmesi kenar ortalarında meydana gelir.



$$\tau_{max} = \frac{20 M_b}{a^3} \quad I_r = \frac{\sqrt{3} a^4}{80}$$

$$\theta = \frac{80 M_b}{\sqrt{3} G a^4} \Rightarrow \varphi = \theta \cdot l$$

KARE: En büyük kayma gerilmesi kenar ortasında meydana gelir.

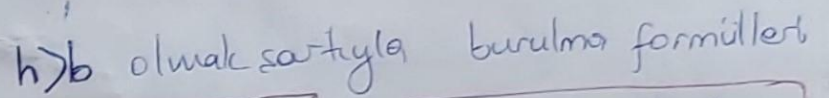


$$\tau_{max} = \frac{M_b}{0,208 a^3}$$

$$\theta = \frac{M_b}{0,1416 a^4} \Rightarrow \varphi = \theta \cdot l$$

13

h) b olma şartıyla bulma formüller



$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_b \cdot l}{\beta \cdot G \cdot h \cdot b^3}$$

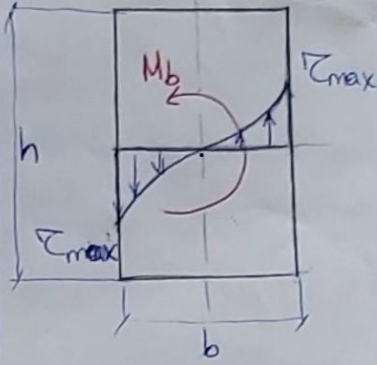
İçin bu değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir

- 7 -

Dikdörtgen kesitli şubukların burulması:

(13)

Dikdörtgen kesitlerin burulması karışıktır. Çünkü burulma esnasında kesit distorsiyona uğrar. Kenarları h ve b olan dikdörtgen kesitte en büyük kayma gerilmesi uzun kenarın ortasındadır. Köşelerde kayma gerilmesi sıfırdır.



$h > b$ olmak şartıyla burulma formülleri

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{\alpha \cdot h \cdot b^2}$$

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_b \cdot l}{\beta \cdot G \cdot h \cdot b^3}$$

Burada; α ve β sargınal sarpantları, kenarların oranı $\frac{h}{b}$ ye bağlıdır. Gevstli oranlar

için bu değərler aşağıdaki tabloda verilmiştir

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,253	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	$\frac{1}{3}$
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	$\frac{1}{3}$

ÖRNEK: Bir haddehanenin güs nakleden içi dolu şaftı (mili), 100 dev/dak ile dönmekte olup 30 BG gücündedir. $\tau_{em} = 4200 \text{ N/cm}^2$ ve şaftın boyu 3m olduğuna göre; bu şaftın burulma açısının $5,73^\circ$ yi geçmemesi istendigiine göre, emniyetli mil çapı ne olmalıdır? $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ dir.

ÇÖZÜM: $L = 3 \cdot 10^2 \text{ cm}$, $n = 100 \text{ dev/dak}$, $H = 30 \text{ BG}$, $\tau_{em} = 4200 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$

$$M_b = 716200 \frac{H}{n} = 716200 \frac{30}{100} = 214860 \text{ N.cm}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 (214860)}{\pi (4200)}} \approx 6,4 \text{ cm}, \quad I_r = \frac{\pi (6,4)^4}{32} \approx 165 \text{ cm}^4$$

$$\varphi^\circ = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \frac{M_b \cdot L}{G I_r} = (57,3^\circ) \cdot \frac{(214860) (3 \cdot 10^2)}{(8 \cdot 10^6) (165)} \approx 2,8^\circ$$

$$\boxed{\varphi^\circ = 2,8^\circ} \Rightarrow 2,8^\circ < 5,73^\circ, \quad \boxed{D = 6,4 \text{ cm}} \text{ emniyetli çap}$$

NOT: $\varphi = 5,73^\circ$ yi taşıyan çap hesabı: $d'_{min} = ?$

$$M_b = 716200 \frac{30}{100} \Rightarrow M_b = 214860 \text{ N.cm}$$

$$5,73^\circ = \frac{M_b \cdot L}{G \cdot I_r} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \Rightarrow 5,73^\circ = \frac{(214860) (3 \cdot 10^2)}{(8 \cdot 10^6) \frac{\pi \cdot d^4}{32}}$$

$$d_{min} = 5,36 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{d_{min} = 5,4 \text{ cm}} \text{ olmalıdır}$$

minimum emniyetli çap

$$\varphi^\circ = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \frac{M_b \cdot L}{G I_r}, \quad I_r = \frac{\pi D^4}{32}$$

ÖRNEK: İki boş milin boyu 4 m dir. Mil malzemesi çelik olup, $3 \cdot 10^5$ N.cm'lik bir burulma momentinin etkisindedir. Milin burulma açısının $\varphi = 3^\circ$ ve $\tau_{max} = 8 \cdot 10^3$ N/cm² yi geçmemesi için, milin iç ve dış çapları ne olmalıdır? ($G = 8 \cdot 10^6$ N/cm²)

ÇÖZÜM:

$$\varphi = \frac{32 M_b}{G \pi (D^4 - d^4)} \cdot L, \quad \tau_{max} = \frac{16 M_b \cdot D}{\pi (D^4 - d^4)}$$

$$L = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$$

$$M_b = 3 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$$

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\varphi = 3^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) 3^\circ \text{ (rad)}$$

$$\varphi = 3^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 3^\circ \text{ rad. olduğundan}$$

$$3^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{32 (3 \cdot 10^5) (400)}{(8 \cdot 10^6) \pi (D^4 - d^4)} \Rightarrow D^4 - d^4 = 2918 \dots (1)$$

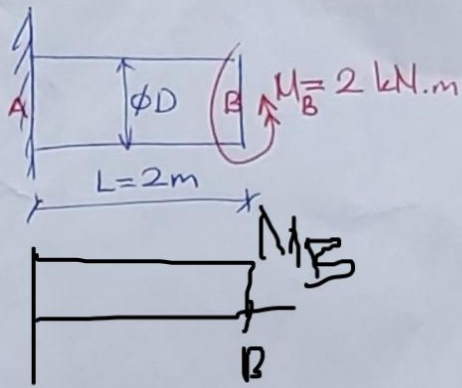
$$\tau_{max} = 8 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2 \text{ yi geçmeyecek!}$$

$$8 \cdot 10^3 = \frac{16 (3 \cdot 10^5) D}{\pi (D^4 - d^4)} \Rightarrow D^4 - d^4 = 191 D \dots (2)$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den: } 2918 = 191 D \Rightarrow \boxed{D \approx 15,3 \text{ cm.}}$$

$$(1) \text{ den: } (15,3)^4 - d^4 = 2918 \Rightarrow d^4 = 51880 \Rightarrow \boxed{d \approx 15,1 \text{ cm}}$$

ÖRNEK: 1)



Şekilde gösterilen milin;
a) Verilen $M_B = 2 \text{ kN.m}$ lik burulma momentini taşıyabilmesi için milin çapı ne olmalıdır?

b) $\tau_{em} = 10^3 \text{ N/cm}^2$, $G = 8 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$ ise, B'nin A'ya göre dönmesini hesaplayınız ($\varphi_{BA} = ?$)

ÇÖZÜM: Milde M_b her yerde aynıdır. $M_b = M_B = 2 \text{ kN.m}$

a) $M_B = 2 \text{ kN.m} = 2 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$

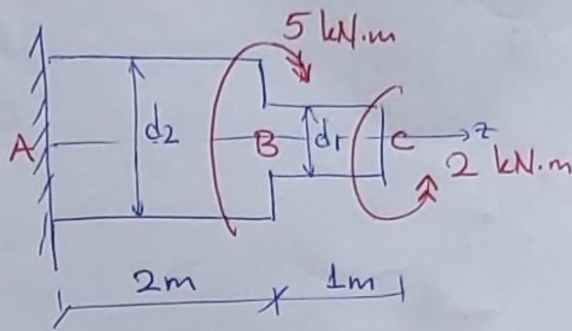
$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_B}{\pi \tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{16 (2 \cdot 10^5)}{\pi (10^3)}} = 10,06 \Rightarrow \boxed{D = 10,1 \text{ cm}}$$

b) $\varphi = \theta \cdot L = \left(\frac{32 M_b}{G \pi D^4} \right) \cdot L \quad \text{-- (rad)}$

$$\varphi = \frac{32 \cdot (2 \cdot 10^5)}{(8 \cdot 10^5) \pi (10,1)^4} \cdot (2 \cdot 10^2) \approx \boxed{0,04894 \text{ radyan}}$$

$$\varphi^\circ = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \cdot (0,04894) \approx \boxed{2,8^\circ}$$

ÖRNEK: 2)



Şekilde verilen kürsü;

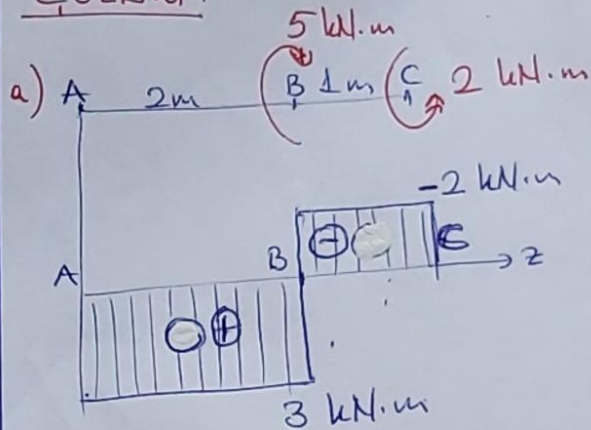
a) M_b diy. giriniz. $\text{ve } d_1 = ? d_2 = ?$

b) $\varphi_{CA} = ?$

$$\tau_{em} = 900 \text{ N/cm}^2$$

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2 \text{ veriliyor}$$

ÇÖZÜM:



$$M_{b1} = 2 \text{ kN.m} = 2 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$$

$$M_{b2} = 3 \text{ kN.m} = 3 \cdot 10^5 \text{ N.cm}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (2 \cdot 10^5)}{\pi \cdot (900)}} = 10,42 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d_1 \approx 10,5 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (3 \cdot 10^5)}{\pi \cdot (900)}} = 11,929 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d_2 \approx 12 \text{ cm}$$

b) $\varphi_{CA} = +\varphi_{AB} - \varphi_{BC}$

$$= \frac{32}{(8 \cdot 10^5) \pi} \left[+ \frac{(3 \cdot 10^5)}{(12)^4} (2 \cdot 10^2) - \frac{(2 \cdot 10^5)}{(10,5)^4} (10^2) \right]$$

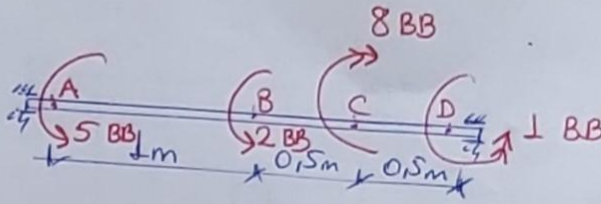
$$\varphi = \frac{32 M_b \cdot L}{G \pi D^4} = \frac{32}{G \pi} \left[\frac{M_{b1} L_1}{d_1^4} - \frac{M_{b2} L_2}{d_2^4} \right]$$

$$\varphi_{CA} = \frac{32 \cdot 10^7}{(8 \cdot 10^5) \pi} \left[+ \frac{3 \cdot 2}{(12)^4} - \frac{2}{(10,5)^4} \right] = +0,01588 \text{ radian}$$

$$\varphi_{CA} = +0,01588 \text{ rad.} = 0,91^\circ$$

$$\begin{cases} \varphi_{CA} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) 0,01588 \\ \varphi_{CA} = 0,91^\circ \end{cases}$$

ÖRNEK: 4)



Şekilde gösterilen güç aktaran bir milin yapıldığı malzemedeki;
 $\tau_{em} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2$,
 $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ dir.

Mil, $n = \frac{300}{\pi}$ dev/dak ile döndüğüne göre;

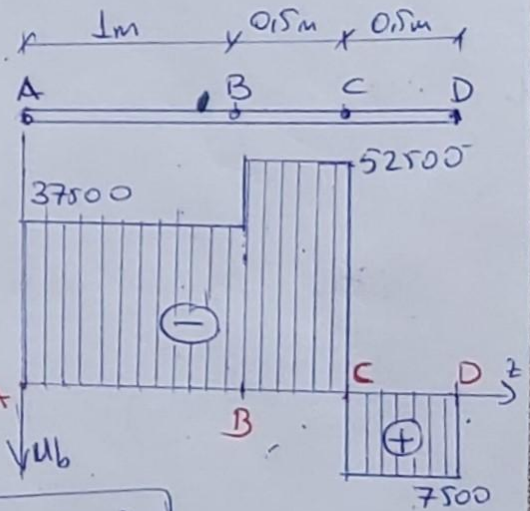
- Mil'in çapını bulunuz
- $\varphi_{DA} = ?$ hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$M_b = 716200 \frac{H}{n} \quad (\text{N.cm})$$

$$M_b = 716200 \frac{H}{\left(\frac{300}{\pi}\right)} = 716200 \left(\frac{\pi}{300}\right) H \Rightarrow M_b = 7500 H$$

$$\begin{aligned} M_A &= 7500(5) = -37500 \text{ N.cm} \\ M_B &= 7500(2) = -15000 \text{ N.cm} \\ M_C &= 7500(+8) = +60 \cdot 10^3 \text{ N.cm} \\ M_D &= 7500(1) = -7500 \text{ N.cm} \end{aligned}$$



a) Mil çapı hesabı:

$$(M_b)_{\max} = -52500 \text{ N.cm}$$

$$\tau_{\max} = \tau_{em} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18(52500)}{\pi(9 \cdot 10^3)}} = 3,097 \text{ cm}$$

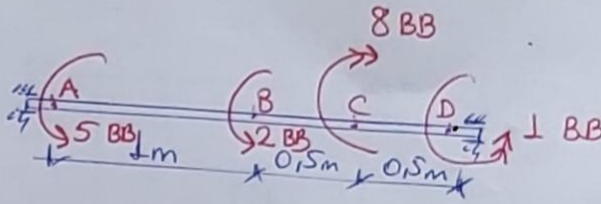
$$D \approx 3,1 \text{ cm}$$

b) $\varphi_{DA} = ?$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} - \varphi_{CB} - \varphi_{BA} = \frac{32}{\pi(8 \cdot 10^6)(3,1)^4} \left[(7500)(50) - (52500)(50) - (37500)(100) \right]$$

$$\varphi_{DA} = -0,083 \text{ rad} = -0,083 \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \approx -4,74^\circ$$

ÖRNEK: 4)



Şekilde gösterilen güç aktaran bir milin yapıldığı malzemedeki;
 $\tau_{em} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2$,
 $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ dir.

Mil, $n = \frac{300}{\pi}$ dev/dak ile döndüğüne göre;

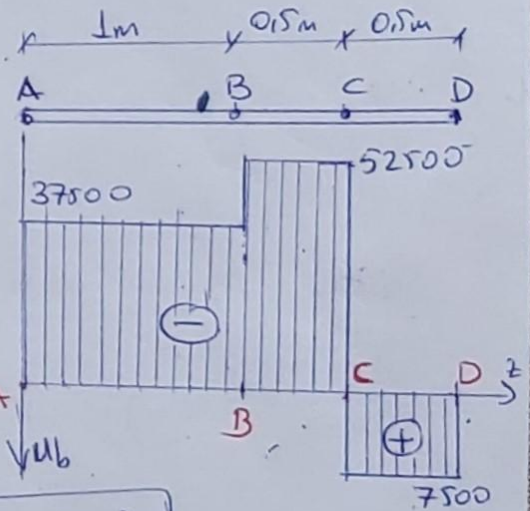
- Mil'in çapını bulunuz.
- $\varphi_{DA} = ?$ hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$M_b = 716200 \frac{H}{n} \text{ (N.cm)}$$

$$M_b = 716200 \frac{H}{\left(\frac{300}{\pi}\right)} = 716200 \left(\frac{\pi}{300}\right) H \Rightarrow M_b = 7500 H$$

$$\begin{aligned} M_A &= 7500(5) = -37500 \text{ N.cm} \\ M_B &= 7500(2) = -15000 \text{ N.cm} \\ M_C &= 7500(+8) = +60 \cdot 10^3 \text{ N.cm} \\ M_D &= 7500(1) = -7500 \text{ N.cm} \end{aligned}$$



a) Mil çapı hesabı:

$$(M_b)_{\max} = -52500 \text{ N.cm}$$

$$\tau_{\max} = \tau_{em} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18(52500)}{\pi(9 \cdot 10^3)}} = 3,097 \text{ cm}$$

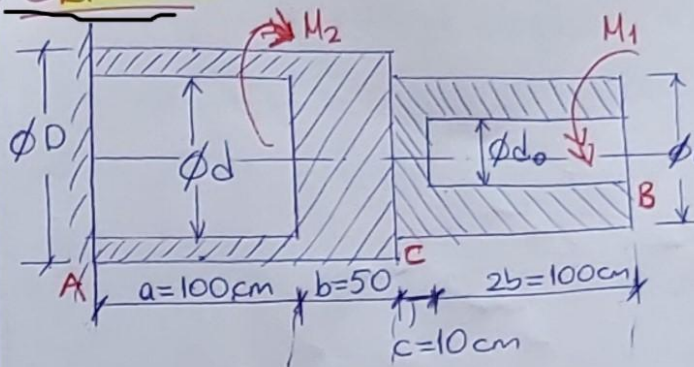
$$D \approx 3,1 \text{ cm}$$

b) $\varphi_{DA} = ?$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} - \varphi_{CB} - \varphi_{BA} = \frac{32}{\pi(8 \cdot 10^6)(3,1)^4} \left[(7500)(50) - (52500)(50) - (37500)(100) \right]$$

$$\varphi_{DA} = -0,083 \text{ rad} = -0,083 \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \approx -4,74^\circ$$

ÖRNEK:

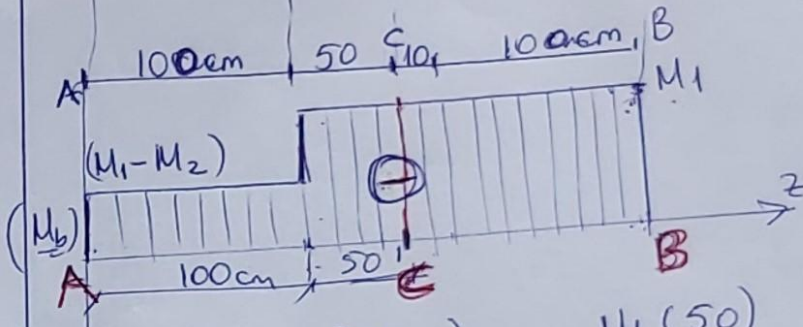


M_2 burulma momentinin hangi değeri için C birleşim kesitinin dönmesi sıfır olur?

$$M_1 = 450 \text{ N.m}$$

$$\phi D = 5 \text{ cm}, \phi d = 4 \text{ cm}, \phi d_0 = 3 \text{ cm}$$

ÇÖZÜM: $M_1 = 450 \text{ N.m} = 450 \cdot 10^2 \text{ N.cm} = 45000 \text{ N.cm}$



$$\phi_C = \frac{(M_1 - M_2)(100)}{G \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} + \frac{M_1(50)}{G \frac{\pi}{32} (D^4)} = 0 \text{ olmalıdır}$$

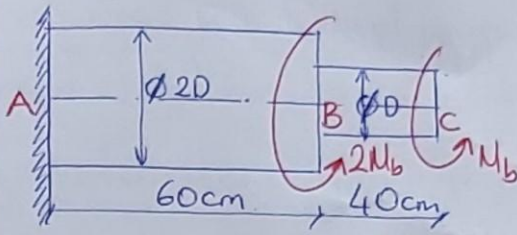
$$\frac{(450 \cdot 10^2 - M_2)100}{(5^4 - 4^4)} + \frac{(450 \cdot 10^2)(50)}{5^4} = 0$$

$$M_2 = 58284 \text{ N.cm}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau &= \frac{M_b}{I_r} r \\ \phi &= \frac{M_b}{G I_r} \cdot L \quad (\text{rad.yan}) \end{aligned} \right.$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_b}{\pi \tau_{em}}} \quad (\text{ışıl dolu mil})$$

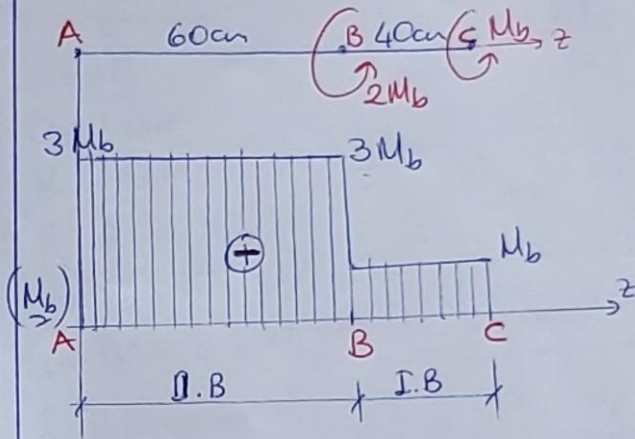
ÖRNEK Şekildeki burulma, şubüğündäi



$$\tau_{em} = 8 \text{ kN/cm}^2, \quad \phi D = 4 \text{ cm},$$

$G = 800 \text{ kN/cm}^2$ değerleri verilmiştir. Şubüğün taşıyabileceği emniyetli M_b burulma momentini bulunuz ve $\phi_{CA} = ?$

ÇÖZÜM



$$\tau_{em} = 8 \text{ kN/cm}^2 = 8 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2$$

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$$

$$\phi D = 4 \text{ cm}$$

$$\phi 2D = 8 \text{ cm}$$

$$I_{P_I} = \frac{\pi 4^4}{32} = 25,13 \approx 26 \text{ cm}^4$$

$$I_{P_{II}} = \frac{\pi 8^4}{32} \approx 403 \text{ cm}^4$$

I. Bölgede: $\tau_{max} = \tau_{em} = \frac{16 M_b}{\pi D^3} \leq \tau_{em}$

$$\frac{16 M_b}{\pi D^3} = \tau_{em} \Rightarrow M_b = \frac{\pi D^3 \tau_{em}}{16} = \frac{\pi (4)^3 (8 \cdot 10^3)}{16}$$

$$M_b \approx 100531 \text{ N.cm}$$

$$\phi_{CA} = \frac{M_b}{G I_P} \cdot L = \frac{M_b}{G} \left[\frac{L_{BC}}{I_{P_I}} + \frac{3 L_{BA}}{I_{P_{II}}} \right]$$

$$\phi_{CA} = \frac{100531}{8 \cdot 10^5} \left[\frac{40}{26} + \frac{3(60)}{403} \right] = 0,249456 \text{ (radyan)}$$

$$\phi_{CA} = 0,249456 \text{ rad} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) (0,249456) = 14^\circ 28'$$

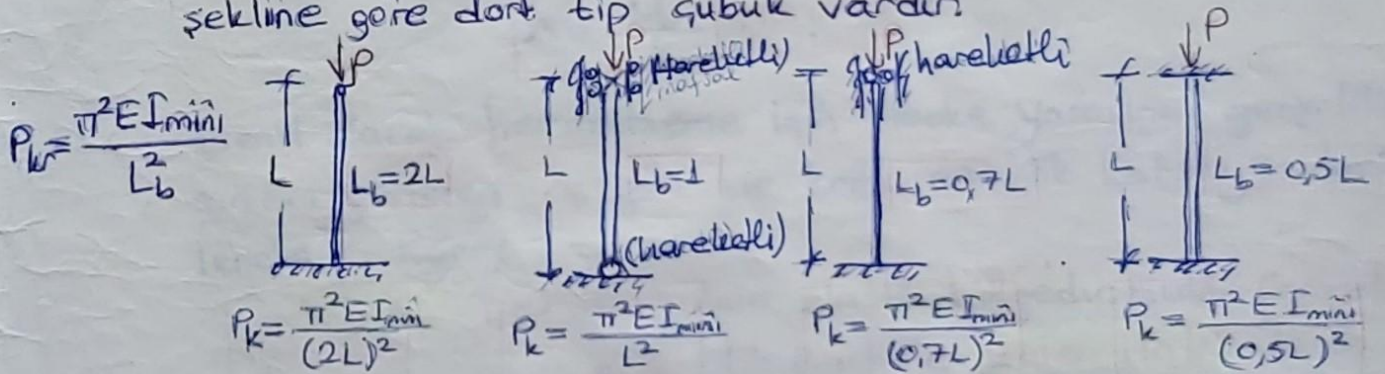
$$\phi_{CA} \approx 15^\circ$$

BURKULMA (İNCE KOLONLAR)

Bu bölümde, temel problem, sistemin denge konumunun kararlı olup olmadığıdır. Denge konumunun kararlı olmaması halinde, herhangi bir bozucu etki ile sistem bu konumundan saptırılırsa tekrar ilk konuma geri dönemez. İşte bu tür problemlere "**STABİLİTE PROBLEMİ**" denir. Stabilitate problemleri incelenirken denge denklemleri şekil değiştirmiş konum üzerinde yazılacağından bu tür problemlerde ikinci mertebe teorisi kullanılmaktadır. Dolayısıyla süperpozisyon kuralı geçerli değildir.

Bu bölümde hesapta izlenecek temel yol; kararlı ve kararsız denge konumlarından başka 3. bir denge konumu olan **farksız denge** konumunu hesaplamak ve bu farksız denge konumundan güven emniyet katsayısı kadar uzakta kalacak şekilde sisteme boyut vermek olacaktır.

A) Elastik çubuk hali: (Burkulmanın elastik bölgede oluşması hali)
Eksenel normal kuvvetin basıncı olduğu doğru eksenli çubuk halini gözönüne alalım. Bu durumda mesnetlenme şekline göre dört tip çubuk vardır.



P basıncı kuvvetinin belirli bir değere büyük olması halinde denge durumu kararsız olur ve herhangi bir bozucu etki ile çubuk doğrusal konumdan ayrılarak aniden eğrisel bir konuma geçer. Bu olaya "**çubuğun burkulması**" denir. Çubuğun bu yeni konumu kararlı bir denge konumu olur.

Her tip çubuk için P_k ile gösterilen ve "KRİTİK YÜK" denen bir yük hesaplanabilir.

$P < P_k$ ise: denge durumu kararlı

$P = P_k$ ise: denge durumu farksız

$P > P_k$ ise: denge durumu kararsız olur.

Her bir çubuk için P_k değeri, mesnet şekline göre şekil 7.1 deki gibi hesaplanır. Bu formüllere "EULER FORMÜLLERİ" denir. Burada:

E : Malzemenin elastisite modülü,

I : Aksi söylenmedikçe kesitin minimum atalet momenti.

L_b : Burkulma boyu.

P_k : Kritik yük.

P_k kritik yükü veren Euler formülü:

$$P_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_b^2} \quad (7.1)$$

Euler formülünün geçerlilik bölgesi aşağıdaki gibidir:

A : Kesit alanı

k_x : Minimum atalet yarıçapı

λ : Çubuğun narinlik katsayısı.

$$k_x = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$k_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

$$\lambda = \frac{L_b}{k_x} \quad \text{Narinlik katsayısı}$$

Genel olarak her malzeme için Hooke yasasının geçerlilik sınırını gösteren λ_k gibi bir kritik narinlik katsayısı belirlenebilir. Eğer

$\lambda > \lambda_k$ ise: Burkulma elastik bölgedir. Euler formülü geçerlidir. Bu hale "Euler Hali" denir.

$\lambda < \lambda_k$ ise: Burkulma elastik olmayan bölgede olur.

Bu durumda gerilme oranı sınırını aşacağı için Hooke yasası geçerli değildir. Dolayısıyla Euler formülü kullanılmaz.

B) Elastik olmayan bölgede burkulma halinde pek çok malzeme için deney sonuçlarına dayanan ampirik formüller verilmiştir. Bu formüllerin içinde "Tetmajer" tarafından teklif edilen ve kendi adıyla anılan formül en kullanışlı olanıdır. σ_k : Kritik gerilme olmak üzere "Tetmajer formülü" aşağıdaki gibidir: TETMAJER FORMÜLÜ

$$\left. \begin{aligned} \text{Çelik için: } \sigma_k &= 3100 - 11,4 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 105 \\ \text{Alüminyum için: } \sigma_k &= 293 - 1,94 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 100 \\ \text{Pik demir: } \sigma_k &= 7910 - 120 \lambda + 0,53 \lambda^2, \lambda < \lambda_w = 80 \end{aligned} \right\} (7.2)$$

Buna göre hesaptan aşağıdaki yol izlenir:

1) (P_k) kritik yükünün hesabı (Kesit belli)

I_{min} , k ve $\lambda = L/k$ hesaplanır.

EULER HALİ: $\lambda > \lambda_k$ ise, Euler Formülü kullanılarak P_k bulunur.

$\lambda < \lambda_k$ ise, Tetmajer formülünden σ_k kritik gerilmesi hesaplanır. P_k yükü de

$$P_k = \sigma_k \cdot A$$

(7.3)

ile bulunur.

n : Burkulma emniyet katsayısı. olmak üzere sistemin emniyetle taşıyabileceği yük:

$$P = P_{em} = \frac{P_k}{n}$$

olarak hesaplanır

(Kesit belli değil) 2) P yükü verilince kesit hesabı aşağıdaki sırada yapılır.

Bu durumda kesit belli olmadığından λ kontrolü başlangıçta yapılamaz. 1) Burkulmanın elastik bölgede olduğu kabul edilerek ve $P_k = n P_{em}$ alınarak 2) Euler formülünden:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_b^2} \quad I_{min} = \frac{(nP) L_b^2}{\pi^2 E} \quad (7.4)$$

şeklinde I_{min} atalet momenti hesaplanır.

B) Elastik olmayan bölgede burkulma halinde pek çok malzeme için deney sonuçlarına dayanan ampirik formüller verilmiştir. Bu formüllerin içinde "Tetmajer" tarafından teklif edilen ve kendi adıyla anılan formül en kullanışlı olanıdır. σ_k : Kritik gerilme olmak üzere "Tetmajer formülü" aşağıdaki gibidir: TETMAJER FORMÜLÜ

$$\left. \begin{array}{l} \text{Çelik için: } \sigma_k = 3100 - 11,4 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 105 \\ \text{Alüminyum için: } \sigma_k = 293 - 1,94 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 100 \\ \text{Pik demir: } \sigma_k = 7910 - 120 \lambda + 0,53 \lambda^2, \lambda < \lambda_w = 80 \end{array} \right\} (7.2)$$

Buna göre hesapta aşağıdaki yol izlenir:

1) (P_k) kritik yükünün hesabı (Kesit belli)

I_{min} , k ve $\lambda = L/k$ hesaplanır.

EULER HALİ: $\lambda > \lambda_k$ ise, Euler Formülü kullanılarak P_k bulunur.

$\lambda < \lambda_k$ ise, Tetmajer formülünden σ_k kritik gerilmesi hesaplanır. P_k yükü de

$$P_k = \sigma_k \cdot A$$

(7.3)

ile bulunur.

n : Burkulma emniyet katsayısı. olmak üzere sistemin emniyetle taşıyabileceği yük:

$$P = P_{emn} = \frac{P_k}{n}$$

olarak hesaplanır.

(Kesit belli değil) 2) P yükü verilince kesit hesabı aşağıdaki sırada yapılır.

Bu durumda kesit belli olmadığından λ kontrolü başlangıçta yapılamaz. 1) Burkulmanın elastik bölgede olduğu kabul edilerek ve $P_k = n P_{em}$ alınarak 2) Euler formülünden:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_b^2} \quad I_{min} = \frac{(nP) L_b^2}{\pi^2 E} \quad (7.4)$$

şeklinde I_{min} atalet momenti hesaplanır.

- 3) I değeri minimum eylemsizlik momenti olarak kesite boyut verilir. 4) Bundan sonra sırasıyla A, k, λ hesaplanır.
- 5) $\lambda > \lambda_k$ ise, burkulma elastik bölgede olup hesaplanan kesit yeterli olur.
- 6) $\lambda < \lambda_k$ ise, burkulma elastik olmayan bölgededir. Kesit yeterli olmaz. Hesaplanan kesit biraz büyütülerek sırasıyla $I, A, k, \lambda, \lambda_k$ ve P_k hesaplanır.
- 7) $P < \frac{P_k}{n}$ olunca ya kadar kesit uygun şekilde büyütülerek hesaba devam edilir.

C) Burkulma çarpanı ile hesap. (Elastik + Elastik olmayan bölge)

Elastik ve elastik olmayan bölgelerdeki burkulma hesaplarını birleştirmek ve burkulma hesabını bir gerilme hesabına indirmek için "burkulma çarpanı yöntemi" geliştirilmiştir.

w : Burkulma çarpanı ise

$w > 1$ olan w burkulma katsayısı kullanılarak subugün taşıyabileceği kritik yük:

$$P_k < \frac{F_{em} \cdot A}{w} \quad (7.5)$$

formülü ile hesaplanır. Burada w değeri çesitli malzemeler için λ narinlik katsayısına bağlı olarak tablolar halinde verilmiştir.

(st52) (st38)
St 00,52 ve St 37,12 çelikleri için w tablosu.

λ	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,04	1,08	1,14	1,21	1,30	1,41	1,55	1,71	1,80	2,11	2,43	2,85	3,31	3,80
λ	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250				
w	4,32	4,88	5,47	6,10	6,75	7,45	8,17	8,93	9,73	10,55				

Ahsap için w tablosu

λ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,07	1,15	1,25	1,36	1,50	1,67	1,87	2,14	2,50	3,00	3,73	4,55	5,48	6,51	7,65

3) I değeri minimum eylemsizlik momenti olarak kesite
boyut verilir. 4) Bundan sonra sırasıyla A, k, λ hesaplanır.

5) $\lambda > \lambda_k$ ise, burkulma elastik bölgede olup hesaplanan
kesit yeterli olur.

6) $\lambda < \lambda_k$ ise, burkulma elastik olmayan bölgededir.
Kesit yeterli olmaz. Hesaplanan kesit
biraz büyütülerek sırasıyla $I, A, k, \lambda, \lambda_k$
ve P_k hesaplanır.

7) $P < \frac{P_k}{n}$ olunca ya kadar kesit uygun
şekilde büyütülerek hesaba devam edilir.

C) Burkulma çarpanı ile hesap. (Elastik + Elastik olmayan bölge)

Elastik ve elastik olmayan bölgelerdeki burkulma hesap-
larını birleştirmek ve burkulma hesabını bir gerilme
hesabına indirmek için "burkulma çarpanı yöntemi"
gelistirilmiştir.

w : Burkulma çarpanı ise

$w > 1$ olan w burkulma katsayısı kullanılarak subugün
tasıyabileceği kritik yük:

$$P_k < \frac{\sigma_{em} \cdot A}{w} \quad (7.5)$$

formülü ile hesaplanır. Burada w değeri çesitli malze-
meler için λ narinlik katsayısına bağlı olarak tablolar
halinde verilmiştir.

(st52) (st38)
St 00,52 ve St 37,12 çelikleri için w tablosu.

λ	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,04	1,08	1,14	1,21	1,30	1,41	1,55	1,71	1,80	2,11	2,43	2,85	3,31	3,80
λ	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250				
w	4,32	4,88	5,47	6,10	6,75	7,45	8,17	8,93	9,73	10,55				

Ahsap için w tablosu

λ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,07	1,15	1,25	1,36	1,50	1,67	1,87	2,14	2,50	3,00	3,73	4,55	5,48	6,51	7,65