

B) Elastik olmayan bölgede burkulma halinde pek çok malzeme için deney sonuçlarına dayanan ampirik formüller verilmiştir. Bu formüllerin içinde "Tetmajer" tarafından teklif edilen ve kendi adıyla anılan formül en kullanışlı olanıdır. σ_k : Kritik gerilme olmak üzere "Tetmajer formülü" aşağıdaki gibidir: TETMAJER FORMÜLÜ

$$\left. \begin{array}{l} \text{Çelik için: } \sigma_k = 3100 - 11,4 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 105 \\ \text{Alüminyum için: } \sigma_k = 293 - 1,94 \lambda \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \lambda < \lambda_w = 100 \\ \text{Pik demir: } \sigma_k = 7910 - 120 \lambda + 0,53 \lambda^2, \lambda < \lambda_w = 80 \end{array} \right\} (7.2)$$

Buna göre hesaptan aşağıdaki yol izlenir:

1) (P_k) kritik yükünün hesabı (Kesit belli)

I_{min} , k ve $\lambda = L/k$ hesaplanır.

EULER HALİ: $\lambda > \lambda_k$ ise, Euler Formülü kullanılarak P_k bulunur.

$\lambda < \lambda_k$ ise, Tetmajer formülünden σ_k kritik gerilmesi hesaplanır. P_k yükü de

$$P_k = \sigma_k \cdot A$$

(7.3)

ile bulunur.

n : Burkulma emniyet katsayısı. olmak üzere sistemin emniyetle taşıyabileceği yük:

$$P = P_{emni} = \frac{P_k}{n}$$

olarak hesaplanır

(Kesit belli değil) 2) P yükü verilince kesit hesabı aşağıdaki sırada yapılır.

Bu durumda kesit belli olmadığından λ kontrolü başlangıçta yapılamaz. 1) Burkulmanın elastik bölgede olduğu kabul edilerek ve $P_k = n P_{emni}$ alınarak 2) Euler formülünden:

$$P_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_b^2} \quad I_{min} = \frac{(nP) L_b^2}{\pi^2 E} \quad (7.4)$$

şeklinde I_{min} atalet momenti hesaplanır.

- 3) I değeri minimum eylemsizlik momenti olarak kesite boyut verilir. 4) Bundan sonra sırasıyla A, k, λ hesaplanır.
- 5) $\lambda > \lambda_k$ ise, burkulma elastik bölgede olup hesaplanan kesit yeterli olur.
- 6) $\lambda < \lambda_k$ ise, burkulma elastik olmayan bölgededir. Kesit yeterli olmaz. Hesaplanan kesit biraz büyütülerek sırasıyla $I, A, k, \lambda, \lambda_k$ ve P_k hesaplanır.
- 7) $P < \frac{P_k}{n}$ olunca kadar kesit uygun şekilde büyütülerek hesaba devam edilir.

C) Burkulma çarpanı ile hesap. (Elastik + Elastik olmayan bölge)

Elastik ve elastik olmayan bölgelerdeki burkulma hesaplarını birleştirmek ve burkulma hesabını bir gerilme hesabına indirmek için "burkulma çarpanı yöntemi" geliştirilmiştir.

w : Burkulma çarpanı ise

$w > 1$ olan w burkulma katsayısı kullanılarak subugün taşıyabileceği kritik yük:

$$P_k < \frac{F_{em} \cdot A}{w} \quad (7.5)$$

formülü ile hesaplanır. Burada w değeri çesitli malzemeler için λ narinlik katsayısına bağlı olarak tablolar halinde verilmiştir.

(st52) (st38)
St 00,52 ve St 37,12 çelikleri için w tablosu.

λ	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,04	1,08	1,14	1,21	1,30	1,41	1,55	1,71	1,80	2,11	2,43	2,85	3,31	3,80
λ	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250				
w	4,32	4,88	5,47	6,10	6,75	7,45	8,17	8,93	9,73	10,55				

Ahsap için w tablosu

λ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
w	1,07	1,15	1,25	1,36	1,50	1,67	1,87	2,14	2,50	3,00	3,73	4,55	5,48	6,51	7,65

Örnek 6 =

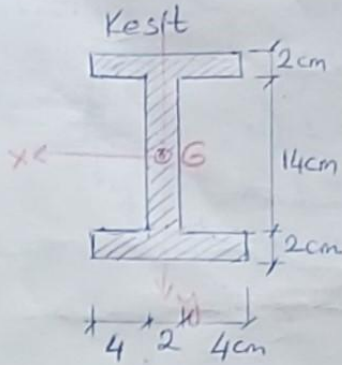
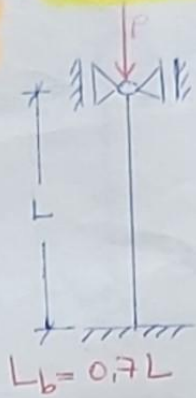
Verilen cubukta

$n=2$ emniyetiyle (güvenliği) ile taşınacak P yükünü hesaplayınız.

$$L = 6,5 \text{ m}, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\lambda_k = 105,$$

$$\sqrt{k} = 3100 - 11,4 \lambda \leq \lambda < \lambda_k = 105$$



Çözüm:

Kesitin ağırlık merkezinden geçen x, y asal eksenlerdir ($I_{xy} = 0$)

$$I_x = \frac{2 \cdot 14^3}{12} + 2 \left[\frac{10 \cdot 2^3}{12} + (10 \cdot 2) 8^2 \right] \approx 3031 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{14 \cdot 2^3}{12} + 2 \left(\frac{2 \cdot 10^3}{12} \right) \approx 343 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 343 \text{ cm}^4$$

$$A = 2 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 14 = 68 \text{ cm}^2$$

$$k_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 2,25 \text{ cm}$$

$$L_b = 0,7 L = 0,7 \cdot 650 \Rightarrow L_b = 455 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_b}{k_{\min}} = \frac{455}{2,25} = 202,2 > \lambda_k$$

($202,2 > 105$)

$\lambda > \lambda_k$ old. dan burkuluma elastik bölgededir

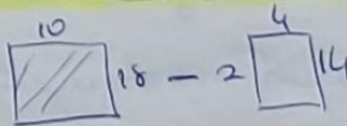
Euler formülü kullanılarak: $P_k = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} = 34339 \text{ N}$

$$P_{em} = \frac{P_k}{n}, \quad P_{em} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{n L_b^2} = \frac{\pi^2 (2,1 \cdot 10^6) \cdot 343}{2 \cdot (455)^2} = 17169,6 \text{ N}$$

$n=2$ emniyeti ile taşınacak P yükü; $P = 17169 \text{ N}$ bulunur

ii. Yol:

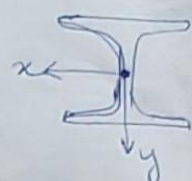
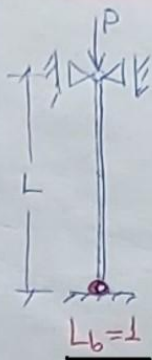
Akilet Momentleri hesabı:



$$I_x = \frac{10 \cdot 18^3}{12} - 2 \left[\frac{4 \cdot 14^3}{12} \right] = 4860 - 1828 = 3031 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{18 \cdot 10^3}{12} - 2 \left[\frac{14 \cdot 4^3}{12} + (3)^2 (14 \cdot 4) \right] = 1500 - 2(75 + 504) = 1500 - 1158$$

$$I_y \approx 343 \text{ cm}^4$$



Kesit I 30

Boyutları şekilde verilen basınç
subuğunun $n=2$ emniyeti ile taşı-
yabileceği P yükünü

a) $L=5m$,

b) $L=2,5m$ için ayrı ayrı hesaplayınız

Malzemede: $E=2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\lambda_k=100$,

$\sigma_k = 3100 - 11,4 \lambda \text{ kg/cm}^2$

Gözüm:Profil tablasundan; I 30 için: ~~4,2 = 3,2~~

$I_x = 9800 \text{ cm}^4$, $I_y = 450 \text{ cm}^4$, $A = 69 \text{ cm}^2$ olarak bulunur.

$I_{\min} = 450 \text{ cm}^4$, $k_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{450}{69}} = 2,55 \text{ cm}$.

$W_x = 653 \text{ cm}^3$, $W_y = 72 \text{ cm}^3$

a) $L=5m$ için: $L=L_b=500 \text{ cm}$

$L_b=1$

$\lambda = \frac{L_b}{k_{\min}} = 196 > 100 = \lambda_k$

$\lambda > \lambda_k$ olduğu için; burkulma elastik bölgededir.
Euler formülü kullanılarak

$$P_{em} = \frac{P_w}{n} \quad P_{em} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{n \cdot L_b^2} = \frac{\pi^2 (2 \cdot 10^6) 450}{2 \cdot (500)^2} = \boxed{17765 \text{ N}}$$

b) $L=2,5m$ için: $L_b=250 \text{ cm}$

$\lambda = \frac{L_b}{k_{\min}} = \frac{250}{2,55} = 98 < \lambda_k = 100$

Burkulma elastik olmayan bölgededir. Tetmajer formülü ile,

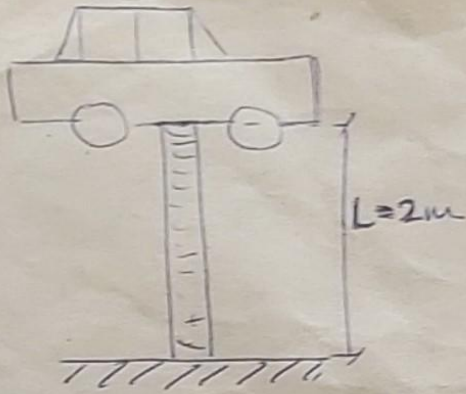
$\sigma_k = 3100 - 11,4 (98) = 1982,8 \text{ kg/cm}^2 = 19828 \text{ N/cm}^2$

şeklinde kritik gerilme hesaplanır. Buradan da:

$$P_{em} = \frac{P_w}{n} \quad P_{em} = \frac{\sigma_k \cdot A}{n} = \frac{19828 \cdot (69)}{2} = \boxed{684066 \text{ N}}$$

olarak P yükü bulunur

$P = 684.066 \text{ N}$

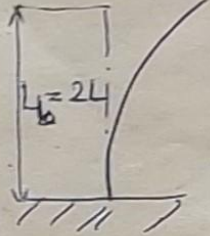


Bir otomobil, şekil de görüldüğü gibi bir piston ile kaldırılmaktadır. Piston, içi boş bir silindir olup, dış çapı 100 mm, et kalınlığı ise 8 mm olarak verilmiştir.

Piston malzemesinin elastisite modülü $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kN/cm}^2$ olarak

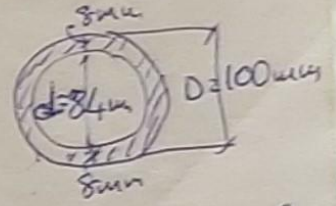
verildiğine göre sistemin emniyetli olarak 2m yüklenilerek bu yükü taşıyabilmesi için otomobilin ağırlığı en fazla ne kadar olmalıdır?

Gözüm



$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_b^2}$$

$$L_b = 2L$$



$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi (100^4 - 84^4)}{64} = 2464818 \text{ mm}^4 = 246,48 \text{ cm}^4 \approx 247 \text{ cm}^4$$

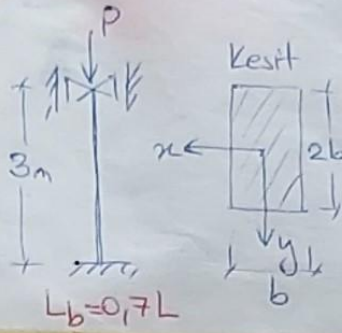
$$I \approx 247 \text{ cm}^4$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 (2 \cdot 10^6) (246,4818)}{(2 \cdot 200)^2} = 30,472 \text{ kN}$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 (2 \cdot 10^6) (247)}{(2 \cdot 200)^2} = 30.472,404 \text{ N}$$

$$P_{kr} \approx 30.473 \text{ N} \approx 30,5 \text{ kN}$$

Örnek (8)



Şekilde verilen gubukta $P=4 \text{ kN}$ ekle eksenel basınç kuvveti etkisindedir. $E=10^5 \text{ N/cm}^2$, $n=2.5$, $\lambda_k=100$, $|\sigma_k = 2.93 - 1.94 \lambda|$ olarak verildiğine göre b boyutunu hesaplayınız.

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

$$P = \frac{P_u}{n}$$

$$L_b = L(0.7) = 300(0.7) = 210 \text{ cm}$$

$$P = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot I_{\min}}{(210)^2 \cdot (2.5)} \Rightarrow I_{\min} = \frac{(210)^2 (2.5) (4 \cdot 10^3)}{\pi^2 \cdot 10^5} = 447 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3} b^4 = I_{\max}$$

$$I_y = \frac{2b(b^3)}{12} = \frac{1}{6} b^4 = I_{\min}$$

$$\frac{b^4}{6} = 447 \Rightarrow b^4 = 2682 \Rightarrow b = 7.19 \text{ cm}$$

$$A = b(2b) = (7.19)(2 \cdot 7.19) = 103.4 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{L_b}{k_{\min}}, \quad k_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{447}{103.4}} = 2.08 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{210}{2.08} = 100.96 \text{ cm}$$

$\lambda = 100.96 > \lambda_k = 100$ old dan; ($\lambda \approx \lambda_k$ alınabilir)

Burkulma elastik bölgededir.

$$\text{Boyutlar: } \begin{cases} b = 7.19 \text{ cm} \\ 2b = 14.38 \text{ cm} \end{cases}$$

örnek 9 - Aynı malzemeden yapılmış aynı kesit alanlı daire ve kare kesitli aynı boydaki iki basıncı çubuğunun aynı mesnet koşullarında elastik bölgede bükülmesi sorunu olduğu zaman taşıyabilecekleri yüklerin oranını bulunuz.

Çözüm:

L_b : Çubukların bükülme boyları.

Kesit alanları: $A_d = \pi R^2$, $A_k = a^2$

$$\pi R^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\pi} R$$

Bükülme boyları yükleri bulunur ve oranlarırsa:

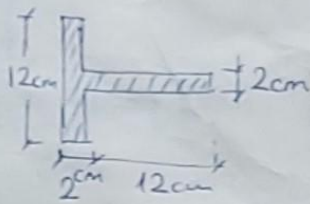
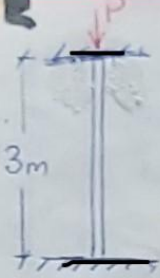
$$P_{daire} = \frac{\pi^2 E I_d}{L_b^2} = \frac{\pi^2 E \pi R^4 / 4}{L_b^2} = \frac{\pi^3 E R^4}{4 L_b^2}$$

$$P_{kare} = \frac{\pi^2 E I_k}{L_b^2} = \frac{\pi^2 E a^4 / 12}{L_b^2} = \frac{\pi^2 E a^4}{12 L_b^2}$$

$$\frac{P_d}{P_k} = 3\pi \left(\frac{R}{a}\right)^4 = \frac{3}{\pi} = 0,955$$

$$\frac{P_d}{P_k} = 3\pi \frac{R^4}{a^4} = 3\pi \frac{R^4}{(\sqrt{\pi} R)^4} = \frac{3\pi R^4}{(\pi^{1/2})^4 R^4} = \frac{3}{\pi} = 0,955$$

Örnek 11.1) 2009

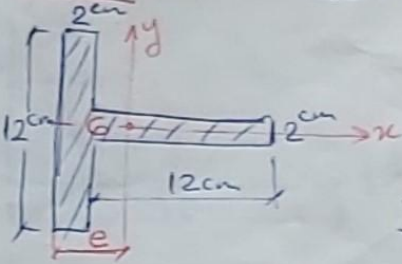


Şekildeki iki ucu ankastre çubuğun $n=2$ güvenliği ile taşıyabileceği P yükünün değerini hesaplayınız.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \lambda_k = 105$$

$$(\sigma_k = 3100 - 11,4 \lambda)$$

Çözüm:



Kesit alanı: $A = 12 \cdot 2 + 2 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$

$$e = \frac{(2 \cdot 12)(1) + 2 \cdot 12 \cdot (2+6)}{48} = 4,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 296 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2(e-1)^2 + \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 2 \cdot 12(8-e)^2$$

$$I_y = 884 \text{ cm}^4$$

$I_{\min} = I_x$ olur.

$$k_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{296}{48}} = 2,48 \text{ cm}$$

$$L_b = 0,5 L = 0,5(300) = 150 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_b}{k_{\min}} = \frac{150}{2,48} = 60,48 < \lambda_k = 105$$

$\lambda < \lambda_k$ old. dan burkulma elastik olmayan bölgededir.

* Tetmajer formülünden:

$$\sigma_k = 3100 - 11,4(60,48) = 2410,53 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_{en} = \frac{\sigma_k \cdot A}{n} = \frac{2410,53(48)}{2} = 57853 \text{ kg}$$

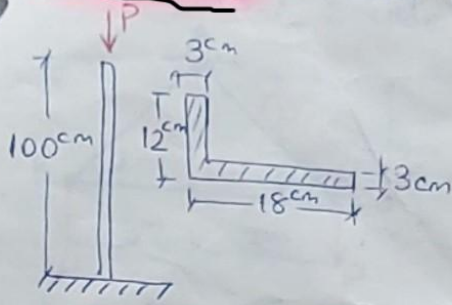
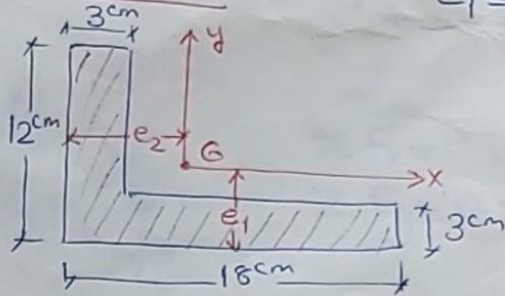
Örnek 12)

Şekildeki ahşap kolonun $n=3$ güvenliği ile taşıyabileceği P yükünü hesaplayınız.

$$E = 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \lambda_p = 100$$

$$(\sigma_k = 293 - 1,94\lambda) \quad \lambda_{kr} = 100$$

$$\sigma_{kr} = 19 \text{ kg/cm}^2 \text{ çıkar}$$

Çözümü:

$$e_1 = 3,5 \text{ cm}, \quad e_2 = 6,5 \text{ cm}$$

$$I_x = 870,75 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2490,75 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -810 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{\min} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \\ &= \frac{2490,75 + 870,75}{2} - \sqrt{\left(\frac{2490,75 - 870,75}{2}\right)^2 + (-810)^2} \\ &= 1680,75 - 1145,5 \end{aligned}$$

$$I_{\min} = 535,25 \text{ cm}^4$$

$$A = 18 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 81 \text{ cm}^2 \text{ (kesit alanı)}$$

$$k = \sqrt{\frac{535,25}{81}} = 2,57 \text{ cm}$$

$$L_b = 2L = 200 \text{ cm}, \quad \lambda = \frac{L_b}{k} = \frac{200}{2,57} = 77,82 < \lambda_k$$

Tetmajer formülünden:

$$\sigma_k = 293 - 1,94(77,82) = 142 \text{ kg/cm}^2 = 1420 \text{ N/cm}^2$$

$$P_{em} = \frac{P_k}{n} = \frac{\sigma_k \cdot A}{n} = \frac{142(81)}{3} \Rightarrow \boxed{P_{em} = 3834 \text{ kg}}$$

KALIN KOLONLAR

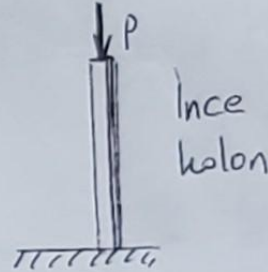
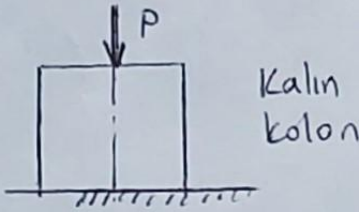
Kolonlar , ince ve kalın olmak üzere iki grupta toplanır.

Kalın kolonlar Ankastre mesnetleri yatay düzlemde olan ve düşey yükleri taşımak için dizayn edilmiş ankastre kirişler gibi düşünülebilir.

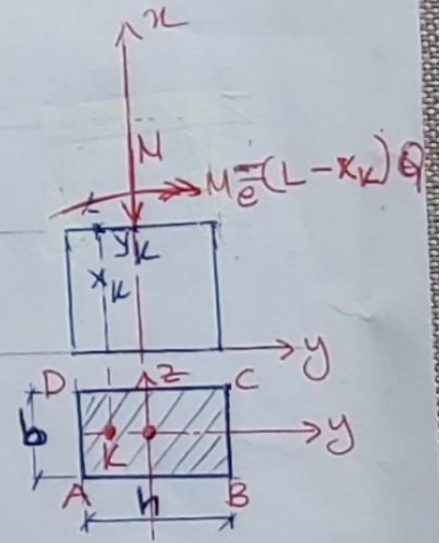
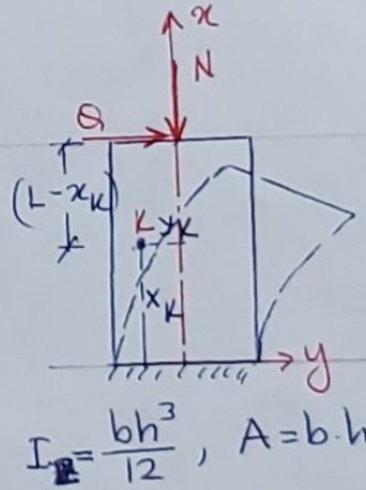
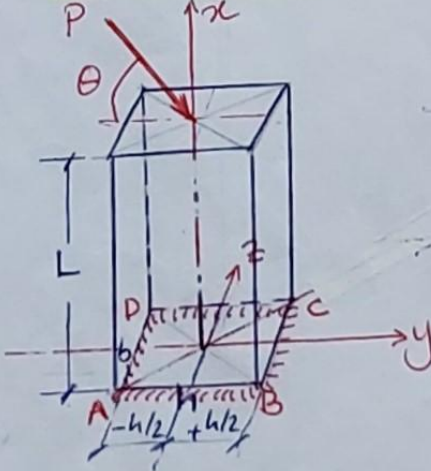
İnce kolonlar ise, aksenal basınç kuvveti altındaki daha narin çubuklardır.

İnce ve kalın kolonu birbirinden ayıran şey; kolonun işlevsiz hale gelişinin burkulma nedeniyle olup olmamasıdır.

Kalın kolonlar burkulmaksızın yani devrilerek, ince kolonlar ise burkularak işlevsiz hale gelirler.



I: EĞİK YÜKLEME:



K' daki normal gerilmeleri hesaplayalım.

N' den dolayı bu kesitte ve tüm kesitlerde : $-\frac{N}{A}$ oluşur.

Q' dan dolayı bu kesitte : $M_e = Q(L-x_k)$ oluşur. Bu moment kolonu eğmeye çalışır.

Kesit z eksenini etrafında dönmeye zorlanacağından, y koordinatının (-) olduğu bölgede çekmeye (+) olduğu bölgede basınca çalışır.

K' daki toplam gerilme aşağıdaki şekilde oluşur:

$$\sigma_k = -\frac{N}{A} + \frac{\overbrace{Q(L-x_k)}^{M_{ek}}}{I_z} (-y_k) = -\frac{N}{A} + \frac{M_{ek}}{I_z} (-y_k)$$

(M_e)_{max} : ABCD tabanında meydana gelir.

AD kenarı boyunca maksimum çekme gerilmesi, BC kenarı boyunca maksimum basma gerilmesi oluşur.

$$(\sigma_{\text{çekme}})_{\text{max}} = -\frac{N}{A} + \frac{\overbrace{(Q.L)}^{-M_e} (-h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{N}{A} + \frac{M_e}{I_z} \left(\frac{h}{2}\right) \dots (AD)$$

$$(\sigma_{\text{basma}})_{\text{max}} = -\frac{N}{A} + \frac{\overbrace{(Q.L)}^{-M_e} (+h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{N}{A} - \frac{M_e}{I_z} \left(\frac{h}{2}\right) \dots (BC)$$

$\xrightarrow{+} M_e$
 $M_e \leftarrow (-)$

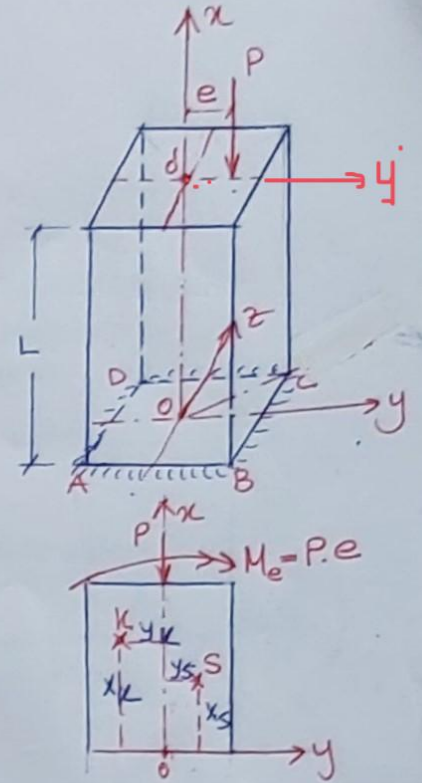
II: EKSANTRİK YÜKLEME:

I. Tip Eksantrik Yükleme (tek Eksantriklik)

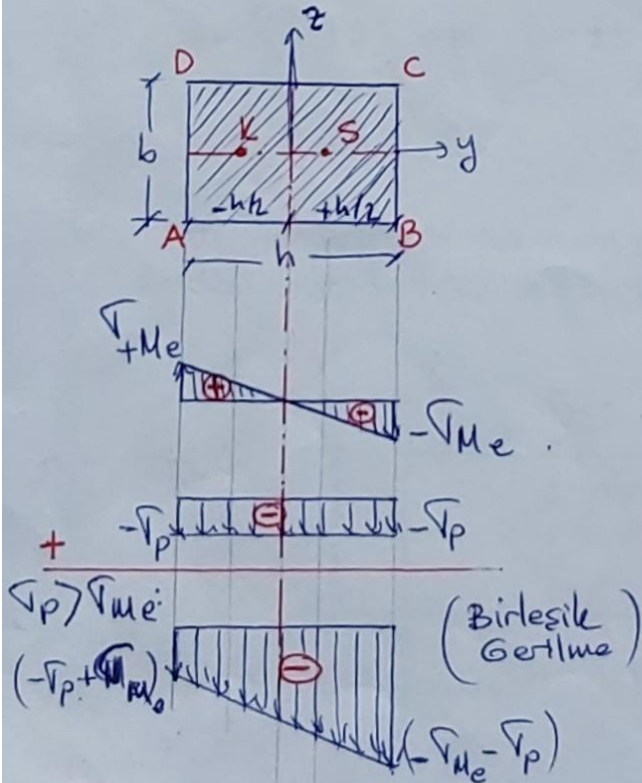
P kuvveti eksen üzerine P ve $M_e = P \cdot e$ şeklinde taşınır ve tüm kesitlerde şiddetleri sabit kalacağından K ve S gibi herhangi iki noktadaki normal gerilmeler Aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_K = -\frac{P}{A} + \frac{(-P \cdot e)}{I_z} (-y_K) = -\frac{P}{A} + \frac{(P \cdot e)}{I_z} y_K$$

$$\sigma_S = -\frac{P}{A} + \frac{(-P \cdot e)}{I_z} (+y_S) = -\frac{P}{A} - \frac{(P \cdot e)}{I_z} y_S$$



P basınç kuvvetinden meydana gelen basınç gerilmesinin şiddetinin $M_e = P \cdot e$ eğilme momentinden taban kesitindeki AD kenarı boyunca meydana gelecek olan max. Çekme gerilmesinin şiddetinden büyük olduğunu varsayarsak, tabanda birleşik gerilmenin dağılımı şekildeki gibi olur ve AD ve BC kenarları boyunca basınç gerilmeleri oluşur.



$$\sigma_{AD} = -\frac{P}{A} + \frac{(-P \cdot e)}{\frac{bh^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_{AD} = -\frac{P}{A} + \frac{(P \cdot e)}{\frac{bh^3}{12}} \left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{--- (Basınç Gerilmesi)}$$

$$\sigma_{BC} = -\frac{P}{A} + \frac{(-P \cdot e)}{\frac{bh^3}{12}} \left(+\frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_{BC} = -\frac{P}{A} - \frac{(P \cdot e)}{\frac{bh^3}{12}} \left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{--- (Basınç Gerilmesi)}$$

KESİT ÇEKİRDEĞİ:

Örneğin kâğıt gibi çekme dayanımı , basınç dayanımından çok daha az olan malzemeden yapılmış bir kolonun, tüm kesitlerinde sadece basınç gerilmelerinin meydana gelmesi istenir. Bunun için eksantrikliğin belirli değerin altında kaldığı öyle bir bölge bulmak olasıdır ki, P yükü bu bölgede kaldığı sürece kolon kesitinde sadece **basınç gerilmesi** oluşur. Bu bölgeye "**kesit çekirdeği**" denir.

Dikdörtgen kesit için kesit çekirdeği:

AD ve BC kenarlarında meydana gelen basma gerilmeleri için elde edilen denklemler biraz düzenlenirse:

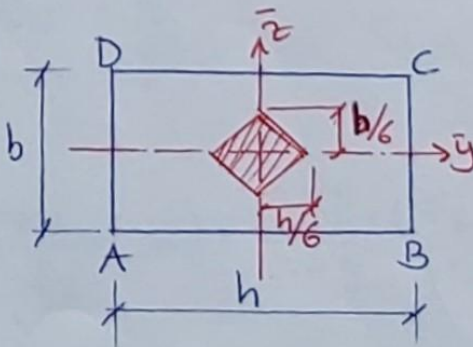
$$\sigma_{AD} = -\frac{P}{A} + \frac{(-P \cdot e)}{\frac{bh^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{P}{b \cdot h} + \frac{6(P \cdot e)}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h}\right)$$

$$\sigma_{AD} = -\frac{P}{b \cdot h} \left(1 - \frac{6e}{h}\right)$$

AD kenarındada basınç gerilmesi oluşması için parantez içindeki ifadenin (+) olması gerekir.

$$1 - \frac{6e}{h} > 0 \quad \text{dan} \quad 1 > \frac{6e}{h} \quad \boxed{e < \frac{h}{6}} \quad \text{çıkar.}$$

NOT: Tüm kesitte sadece basınç gerilmesinin meydana gelmesi için y yönündeki eksantrikliğin sınır değeriyle beraber $\boxed{e \leq \frac{h}{6}}$ olması gerekir.



Dikdörtgen kesitte;
kesit çekirdeği, ortada
taralı olarak görülen
bir **eskenar dörtgen**'dir.