

MKB 212
AKIŞKANLAR MEKANİĞİ I
DERS NOTLARI

DOÇ. DR.SONER ÇELEN

2. HAFTA

Sıkıştırılabilirlik

Sıkıştırılabilirlik, belirli bir basınç altında maddenin hacmindeki değişimi ifade eder. Sıvılar bilindiği üzere basınç altında bir miktarda sıkışmış sıvı üzerinde kayarlar. Bazen bu miktar, yani sıkıştırılabilirliği yüksek basınç altında önemli sorunlar doğurabilir. Hacim değişimlerini sıcaklık ve basınç değişimleriyle ilişkindiren özellikler tanımlamak gerekir.

- Bir akışkanın hacmi, P ve T ile nasıl değişir?
- Akışkanlar $T \uparrow$ ya da $P \downarrow$ ile genleşirler.
- Akışkanlar $T \downarrow$ ya da $P \uparrow$ ile sıkışır.
- P ve T 'deki değişimleri hacimdeki değişimle ilişkilendiren akışkan özelliklerine ihtiyaç vardır:

Bunlardan **birincisi**:

Akışkana basınç uyguladığında hacmi küçülür, basınç kaldırıldığında genleşir. Bir akışkanın sıkışabilirliği uygulanan basınç değişimiyle uğradığı deformasyon miktarıyla ilişkilidir. Özetle akışkanın basınç altında uğradığı hacimsel deformasyona **sıkıştırılabilirlik** denir. Sıkışabilirlik κ ile gösterilir. κ : kappa diye okunur

Sıkıştırılabilirlik katsayısı (bu modül ayrıca hacimsel sıkıştırılabilirlik modülü veya hacimsel elastiklik modülü) olarak da adlandırılır.

$$\kappa = -v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (\text{Pa})$$

hacimsel (sıkıştırılabilirlik) modülü (κ)

Eksi (-) işareti hacim azalmasından dolayı ($\frac{\partial V}{V} < 0$). $\frac{\partial V}{V}$ sonucu artı çıkması için önüne eksi işareti kondu.

Artı (+) işareti yoğunluk artmasından dolayı ($\frac{\partial \rho}{\rho} > 0$)

$m = \rho \cdot V$ diferansiyelini alırsak

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

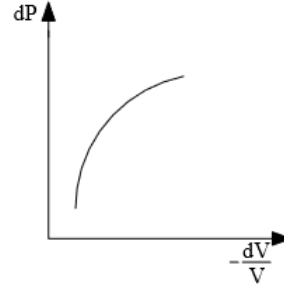
$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{hacimdeki azalma yoğunluktaki artıştır.}$$

$$\kappa \cong -\frac{\Delta P}{\Delta v/v} \cong \frac{\Delta P}{\Delta \rho/\rho} \quad T=\text{sabit}$$

Sonlu büyüklükler cinsinden

$$\rho = \frac{1}{v}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v}$$



Sıvıda hacmi %1 kadar sıkıştırmak için 210 atm basınç gerekir. Suyun sıkıştırılabilirlik veya hacimsel elastiklik modülü $2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ dir. $1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ lik bir basınç suyun hacminde %0.05 lik bir değişme neden olur. Bu nedenle pratikte su sıkıştırılmaz kabul edilir. Dolayısıyla suyun yoğunluğu sabit kabul edilir.

İdeal gaz

$P = \rho RT$ R ve T sabit, P ve ρ değişkendir.

$y = k.x$ türevi $y' = k$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = RT \quad \kappa = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad \kappa_{\text{ideal}} = \rho (RT) = P \quad \boxed{\kappa_{\text{ideal}} = P}$$

1 atm havanın $\kappa = 1 \text{ atm}$ ' dir.

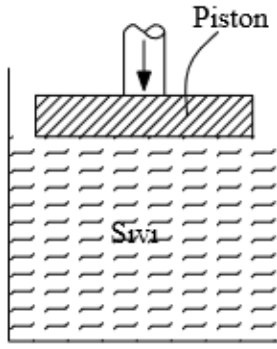
30 atm havanın $\kappa = 30 \text{ atm}$ ' dir.

İzotermal sıkıştırılabilirlik: Sıkıştırılabilirlik katsayısının tersine denir. Bir akışkanın izotermal sıkıştırılabilirliği, basınçtaki bir birimlik değişime karşılık hacim veya yoğunlukta meydana gelen değişimi temsil eder.

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \quad (1/\text{Pa})$$

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} \quad \text{izotermal sıkıştırılabilirlik}$$

Büyük bir κ değeri, hacimde küçük bir birim değişime neden olmak için, basınçta büyük bir değişime gereksinim olduğunu gösterir. Buna göre büyük κ değerine sahip bir akışkan esas itibarıyla sıkıştırılmaz. Bu, sıvılar için tipik bir durumdur ve genellikle sıvıların neden **sıkıştırılmaz** olarak göz önüne alındıklarını açıklamaktadır.



$$\int_1^2 \frac{dP}{\kappa} = \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow P_2 - P_1 = \kappa \ln \rho \Big|_1^2$$

$$P_2 - P_1 = \kappa \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Buradan da görüldüğü gibi dP ne kadar büyük olursa olsun sıkıştırma sonunda akışkanın yoğunluğu çok az değişecektir.

Önceden de belirtildiği üzere sıvılar çok az miktarda sıkıştırılabilirler. Yani hacimdeki küçük bir değişim için büyük basınç oranlarına ihtiyaç vardır. Sıvılar için κ değerleri Tablo 1.4 de görüldüğü gibi çok büyüktür. Bu nedenle sıvılar sıkıştırılmaz akışkanlar olarak anılırlar.

Tablo 1.4 Bazı sıvıların sıkıştırma (bulk) modülleri

Sıvı	Bulk Modülü (Mpa)
Etil Alkol	896
Benzen	1062
Makine Yağı	1303
Su	2179
Gliserin	4509
Civa	24750

$\kappa_{su}=20700\text{bar}$ ’dır

İkincisi ise: Hacimsel genleşme katsayısı

Bir akışkanın yoğunluğu basınçtan daha çok sıcaklığa bağlıdır. Yoğunluğun sıcaklık ile değişimi; rüzgarlar, okyanus akıntıları, sıcak hava balonlarının çalışması, doğal konveksiyonla ısı iletimi ve sıcak havanın yükselmesi gibi birçok doğa olayına sebep olmaktadır. Bu etkileri hesaplayabilmemiz için yoğunluğun sabit basınçta sıcaklıkla değişimini verecek bir özelliğe ihtiyaç duymaktayız. Buna **hacimsel genleşme katsayısı** denir.

$$\beta = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (1/K)$$

hacimsel genleşme katsayısı, (β)

$$\beta = \frac{\Delta v/v}{\Delta T} \cong -\frac{\Delta \rho/\rho}{\Delta T} \quad (P=\text{sabit})$$

$$\beta = -\frac{(\rho_\infty - \rho)/\rho}{T_\infty - T}$$

İdeal gaz

$P = \rho RT$ P ve R sabit, ρ ve T değişkendir.

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad y = \frac{a}{x} \quad \text{türevi} \quad y' = -\frac{a}{x^2}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = -\frac{P}{RT^2} \quad \beta_{ideal\ gaz} = -\frac{1}{\rho} \left(-\frac{\rho RT}{RT^2}\right) = \frac{1}{T}$$

$$\beta_{ideal\ gaz} = \frac{1}{T} \quad (1/K)$$

Hacim hem sıcaklık hem de basınç ile değişirse, V(P,T)

$$dV(P,T) \rightarrow \rightarrow \rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

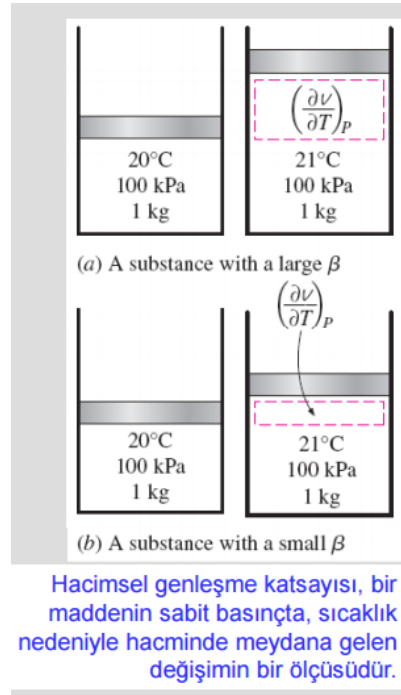
$$dV = -\alpha \cdot V \cdot dP + \beta \cdot V \cdot dT$$

$$\frac{dV}{V} = -\alpha \cdot dP + \beta \cdot dT$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \beta \cdot V \\ \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T &= -\alpha \cdot V \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong -\alpha \cdot \Delta P + \beta \cdot \Delta T \quad \text{sonlu büyüklük ifadesi}$$

Bir akışkan için yüksek bir β değeri, sıcaklıkla beraber yoğunlukta büyük bir değişim olacağı anlamını taşır ve $\beta \Delta T$ çarpımı sabit basınç altındaki ΔT 'lik bir sıcaklık değişimine karşılık, akışkan hacmindeki değişim miktarını temsil eder.



Gazların Sıkışması ve Genleşmesi

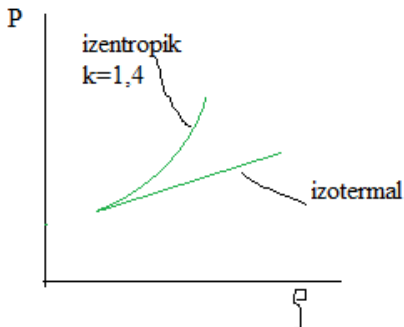
Gazlar sıkıştırıldığında (veya genişletildiğinde) basınç ile yoğunluk arasındaki ilişki, prosesin doğal yapısına bağlıdır. Eğer sıkışma ve genleşme, sabit sıcaklıkta (izotermal proses) gerçekleşirse aşağıdaki denklem ifade edilir.

$$\frac{P}{\rho} = \text{sabit}$$

Eğer sıkışma veya genleşme sürtünmesiz ve çevre ile ısı değişimi yoksa (izentropik proses)

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{sabit}$$

Burada k , sabit basınç özgül ısı c_p nin, sabit hacim özgül ısı c_v ye oranıdır ($k=c_p/c_v$). İki özgül ısı, $R=c_p-c_v$ eşitliğiyle gaz sabiti R ile ilişkilendirilebilir. İzotermal ve izentropik şartlarda, basınç-yoğunluk değişimi grafikte verilmiştir. Yukarıdaki denklemlerde basınç mutlak basınçtır. Yaygın olarak kullanılan gazların k değerleri tablolarda verilmektedir.



İzentropik sıkıştırma için,

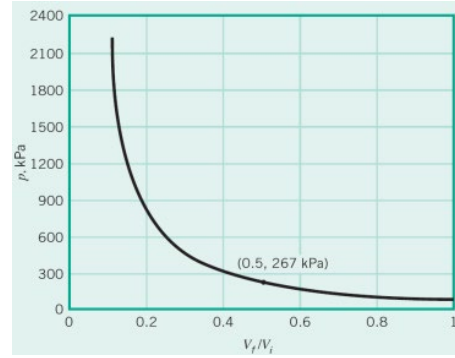
$$\frac{P_i}{\rho_i^k} = \frac{P_f}{\rho_f^k}$$

Burada indisler i ve f, sırasıyla başlangıç ve son durumu göstermektedir. Son durumdaki basınç p_f çözülürse;

$$P_f = \left(\frac{\rho_f}{\rho_i}\right)^k P_i$$

Örnek: Hacim %50 azaltıldığı ve kütle sabit kaldığı için ($m=\rho V$) yoğunluk iki katına çıkar. Hava için $k=1,4$ kullanılarak son basınç hesaplanabilir.

$$P_f = (2)^{1,4} (101,3 \text{ kPa}) = 267 \text{ kPa (mutlak)}$$



Ses Hızı

Akışkanların sıkıştırılabilirliğinin diğer bir önemli sonucu ise, akışkana uygulanan bir “darbenin” veya “bozulmanın” yayılma hızının sonlu büyüklükte olmasıdır. Örneğin, içinde bir akışkanın akmakta olduğu borunun çıkışındaki vana aniden kapatıldığında (bu işlem yerel etki oluşturur) vananın kapatılmasının oluşturduğu etki, akışın geldiği taraftaki akışkan partikülleri tarafından aynı anda hissedilmez. Vananın kapatılmasıyla oluşan basınç artışının, akışın geldiği taraftaki partiküllere ulaşması (yayılması) zaman alır. Benzer şekilde, bir hoparlör diyaframı titreştiğinde bir yerel etki oluşur ve diyaframın hareketiyle meydana gelen küçük basınç değişimi sonlu büyüklükte bir hızla hava içinde yayılır. Akışkan içinde oluşan bu küçük değişikliklerin sonlu büyüklükte bir hızla hava içinde yayılır. Akışkan içinde oluşan bu küçük değişikliklerin (darbelerin, bozulmaların) yayılma hızına **akustik hız veya ses hızı (c)** denir.

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{izentropik proses içindir}$$

ses hızı, sıkıştırılabilirlik cinsinden şöyle ifade edilebilir:

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

Akışkandaki “bozulma” (darbe) çok küçük olduğu için ısı transferinin ihmal edilebilecek kadar az ve prosesin izentropik olduğu kabul edilebilir.

İzentropik bir proseste gazlar için

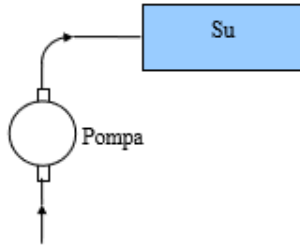
$$\kappa = k \cdot P$$

$$c = \sqrt{\frac{kP}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{kRT}$$

Örnek 1

Hacmi $0,65 \text{ m}^3$ olan çelik bir kap su ile tamamen doldurulmuş şekilde kapalıdır. Başlangıçta $P_1=1\text{Atm}$, $V_1=0,65\text{m}^3$. Basınç pompa yardımıyla 500 Bar 'a yükseltilmiştir. Bu basınç altında kabın hacminin %1 arttığını ve suyun sıkıştırma modülünün $\kappa=21000\text{Bar}$ olduğu düşünülürse pompa tarafından kabın içerisine pompalanan ek su kütlesini bulunuz?



$$\frac{dP}{\kappa} = -\frac{dV}{V}$$

$$P_1=1\text{Bar (mutlak)} = 0\text{Bar (etkin)}$$

$$\frac{dV}{V_1} = \frac{500}{21000}$$

$$\Delta V_1 = -\frac{V_1 \Delta P}{\kappa} = -\frac{0,65 \times 500}{21000} = -0,0155 \text{ m}^3$$

Suyun sıkışmasından dolayı meydana gelen hacim azalması,

Suyun sıkışması sonucu açılan ek hacim %1 genişlediğinden çeper genişlemesi nedeniyle açılacak hacim

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0,0155 + 0,0065 = 0,022 \text{ m}^3$$

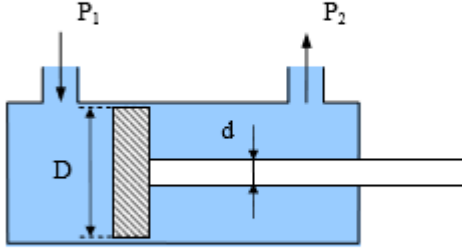
$$\frac{\Delta P}{\kappa} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{5}{210} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \Rightarrow \rho_2 = \frac{5}{210} \times 1000 + 1000 \Rightarrow \rho_2 = 1023,8 \text{ kg / m}^3$$

$$m = \rho \Delta V = 1023,8 \times 0,022 = 22,5 \text{ kg}$$

Örnek 2

Şekilde basit bir basınç yükseltici görülmektedir. Piston kolu dolayısıyla piston ön ve arka yüzdeki alanların farklı olması P_2 basıncının P_1 basıncından daha büyük değerlerde olmasına sebep olmaktadır. $D=20$ cm, $d=15$ cm ve $P_1=8$ bar olduğuna göre

yükselme oranını $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ ve istenen P_2 basıncını bulunuz?



$$F_1 = P_1 A = P_1 \frac{\pi D^2}{4}$$

$$F_2 = P_2 \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

$$P_1 \frac{\pi D^2}{4} = P_2 \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

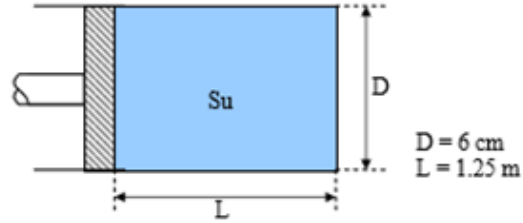
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{D^2 - d^2}{D^2} = \frac{20^2 - 15^2}{20^2} = 0,44$$

$$P_2 = 8 \times 2,29 = 18,29 \text{ Bar}$$

Örnek 3

Çapı 6cm, uzunluğu $L=1,25$ m olan bir silindirin içinde atmosfer basıncında su vardır. Piston 1,2cm ilerleyerek suyu sıkıştırdığı zaman, ($\kappa=21000$ Bar)

- Basınç ve yoğunluk ne olur
- Ne kadar iş yapılmıştır ?



$$a) V_1 = A \cdot L = \frac{\pi D^2}{4} L = \frac{\pi (0,06)^2}{4} 1,25 = 0,00353 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = \frac{\pi D^2}{4} \Delta L = \frac{\pi (0,06)^2}{4} 0,012 = 3,39 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Basınç artışı

$$\Delta P = -\kappa \frac{\Delta V}{V} = -21000 \frac{3,39 \times 10^{-5}}{0,00353} = 201,8 \text{ Bar}$$

$$P_1 = 1 \text{ atm (mutlak)} = 0 \text{ atm etkin}$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = 201,8 \text{ bar (etkin)}$$

$$\Delta P = \kappa \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \quad \rho_2 = 1009,6 \text{ kg / m}^3$$

b) $W = -\int PdV$

$dV = -\frac{V}{\kappa} dP$

$W = \int P \frac{V}{\kappa} dP = \frac{V_1}{\kappa} \int P dP = \frac{V_1}{2\kappa} P^2 \Big|_{P_1}^{P_2} = \frac{V_1}{2\kappa} (P_2^2 - P_1^2) = 342J$

$\begin{matrix} 0,00353 & 201,8 & 0 \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ & 21000 & \end{matrix}$

ÖRNEK (2.3)

Şekilde görülen tamamen kapalı bir kabın iki tarafına çapları birbirinden farklı iki piston yerleştirilmiştir. Kabın içindeki su sükunet halindedir. Küçük çaplı piston $[210 \text{ daN}]$ 'luk bir kuvvetin etkisi altında bulunduğu;

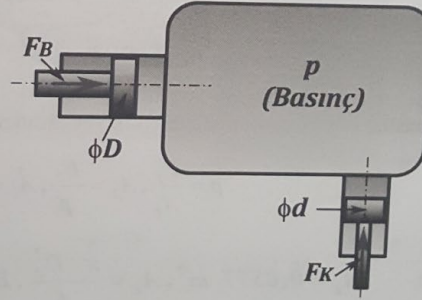
- Suda meydana gelen basıncı hesaplayınız.
 - Büyük pistona etkileyen kuvvetini bulunuz.
- $[D = \phi 120 \text{ mm ve } d = \phi 65 \text{ mm}]$ alınacaktır.

ÇÖZÜM (2.3)

Önce küçük çaplı pistona etkileyen kuvvetten dolayı meydana gelen basınç;

- (1.7) eşitliğinden,

$$p = \frac{4 \cdot 2100}{3,14 \cdot [65 \cdot 10^{-3}]^2}, p = 633174 \text{ N / m}^2 \text{ bulunur.}$$



- Bulunan bu basınç şekildeki kabın her tarafına aynı etkiyi göstereceğinden (Su sıkıştırılmaz kabul ediliyor) büyük çaplı piston yüzeyinde de bu basınç etkili olacaktır. Yüzeye gelen basınç kuvveti ise;

$$F_{bas} = \frac{p \cdot \pi \cdot D^2}{4}, F_{bas} = \frac{633174 \cdot 3,14 \cdot 0,12^2}{4}, F_{bas} = 7157 \text{ N}$$

olur. Sonuçtan görüldüğü gibi kapalı bir kap içindeki basınç aynı olmasına rağmen piston çaplarındaki farklılıktan dolayı yaklaşık büyük piston tarafında $[3.5]$ misli bir basınç kuvveti fazlalığı ile karşılaşılır.