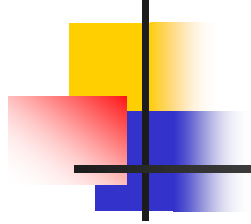


3.7 Yüzme ve Kararlılık

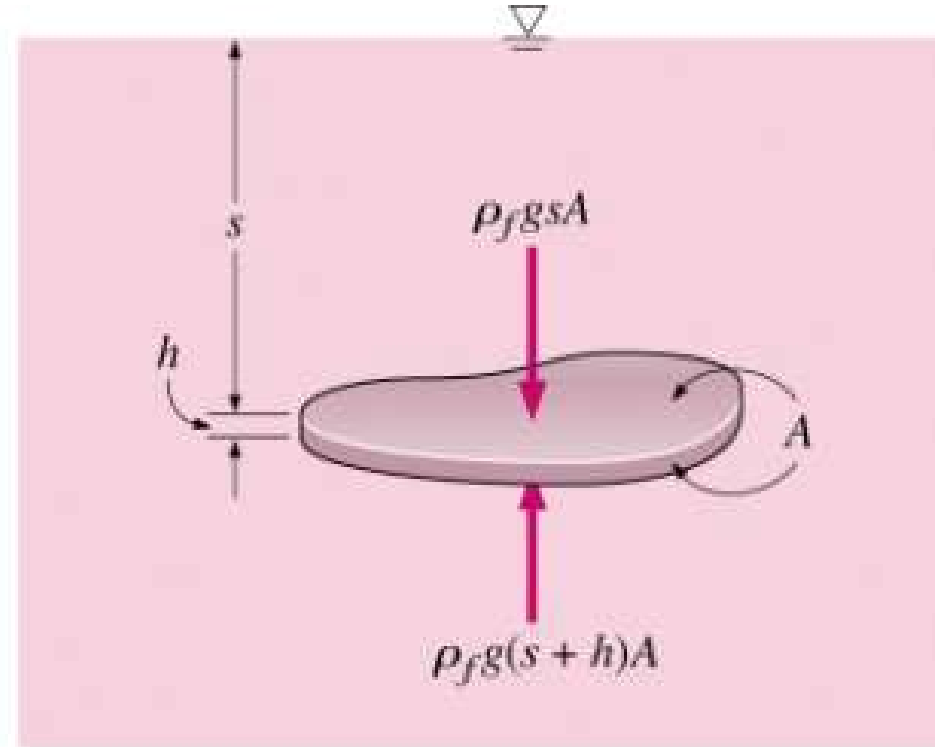
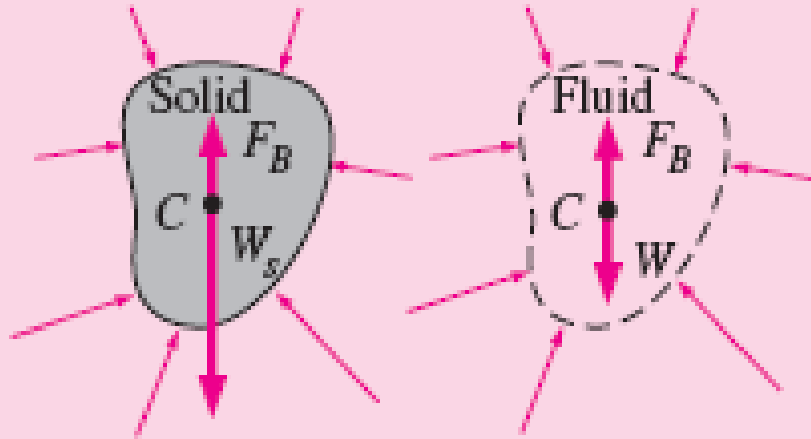
- Yüzeyler üzerindeki hidrostatik kuvvetleri hesaplamak için kullanılan prensipler, tamamı dalmış veya yüzen cismin üzerindeki net basınç kuvvetini hesaplamak için uygulanabilir.
- Sonuçlar M.Ö. 3. yüzyılda Archimedes tarafından keşfedilen iki kaldırma yasasıdır.



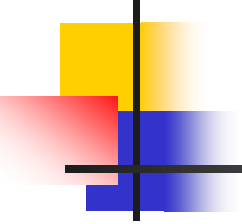
1. Tamamı bir akışkan içine dalmış cisme gelen kaldırma kuvveti cismin hacmi kadar akışkanın ağırlığına eşit ve düşey doğrultudadır.
2. Bir yüzen cisim, yüzdüğü akışkan içinde kendi ağırlığı kadar akışkanın yerini değiştirir.

Yüzen bir cisme dalmış kısmının hacmi kadar akışkanın ağırlığına eşit ve düşey doğrultuda kaldırma kuvveti etkir (Şekil 3.38).

Fluid



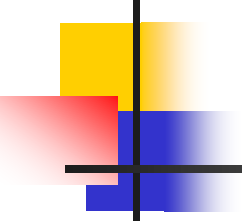
Şekil 3.38 Akışkan içine dalmış katı cisme etkiyen kaldırma kuvveti

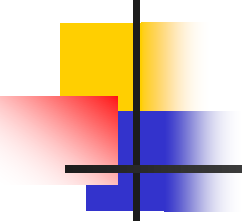
- 
- Kaldırma kuvveti :

$$\begin{aligned} F_K &= \int_{cisim} (p_1 - p_2) dA_Y \\ &= -\gamma \int_{cisim} (z_2 - z_1) dA_Y = \gamma V_{cisim} \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitliğiyle bulunur.

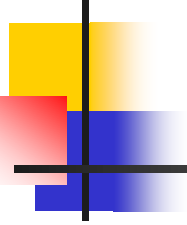
- Bunlar aynı sonuçlardır ve yukarıdaki 1. yasaya eşdeğerdir.

- 
- Denklem (3.49) akışkanın üniform bir özgül ağırlığa sahip olduğunu kabul eder.
 - Kaldırma kuvvetinin etki çizgisi, cismin hacim merkezinden geçer.
 - F_K nın etkidiği bu noktaya (B veya KM) *kaldırma merkezi* denir. Şüphesiz B noktası, değişken yoğunluğa sahip olabilen cismin gerçek kütle merkezine karşılık gelmeyebilir.

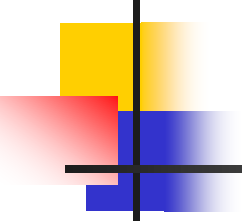
- 
-
- Denklem (3.49) dalmış bir cismin etrafında yer değiştiren ρ_i yoğunluğundaki her bir katmanın ağırlığını toplamak suretiyle katmanlı akışkan için genelleştirilebilir.

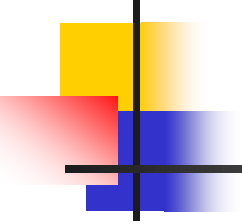
$$(F_K)_{KA} = \sum \rho_i g V_{\text{yer değ.}} \quad (3.50)$$

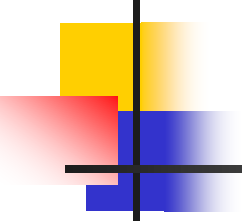
- Yer değiştiren her katmanın kendi hacim merkezi vardır.



- Dalmış cismin kaldırma merkezini bulmak için her katmana ait kaldırma kuvvetlerinin momentlerini toplamak gerekir.
- Sıvılar göreceli olarak ağır olduğundan, onların kaldırma kuvvetlerinin farkındayız, ama gazlar da içine batırılmış herhangi bir cismin üzerine kaldırma kuvveti uygularlar.

- 
- Örneğin insanlar 9426 N/m^3 ortalama özgül ağırlığa sahiptir. Ağırlığı 800 N olan bir kişinin hacmi $0,085 \text{ m}^3$ tür. Standart koşullardaki havanın özgül ağırlığı $11,986 \text{ N/m}^3$ dür.
 - Bu nedenle kişinin etrafındaki havanın kaldırma kuvveti yaklaşık olarak $1,023 \text{ N}$ dur. Boşlukta ölçülseydi, kişi yaklaşık olarak $1,023 \text{ N}$ daha ağır gelirdi.

- 
-
- Balonlar ve hava gemileri için havanın kaldırma kuvveti tasarımda rol oynayan başlıca etkindir.
 - Birçok akış olayı, örneğin ısıнын doğal taşınımı ve okyanustaki düşey karışma, küçük gibi görünen kaldırma kuvvetlerine kuvvetli bir şekilde bağlıdır.

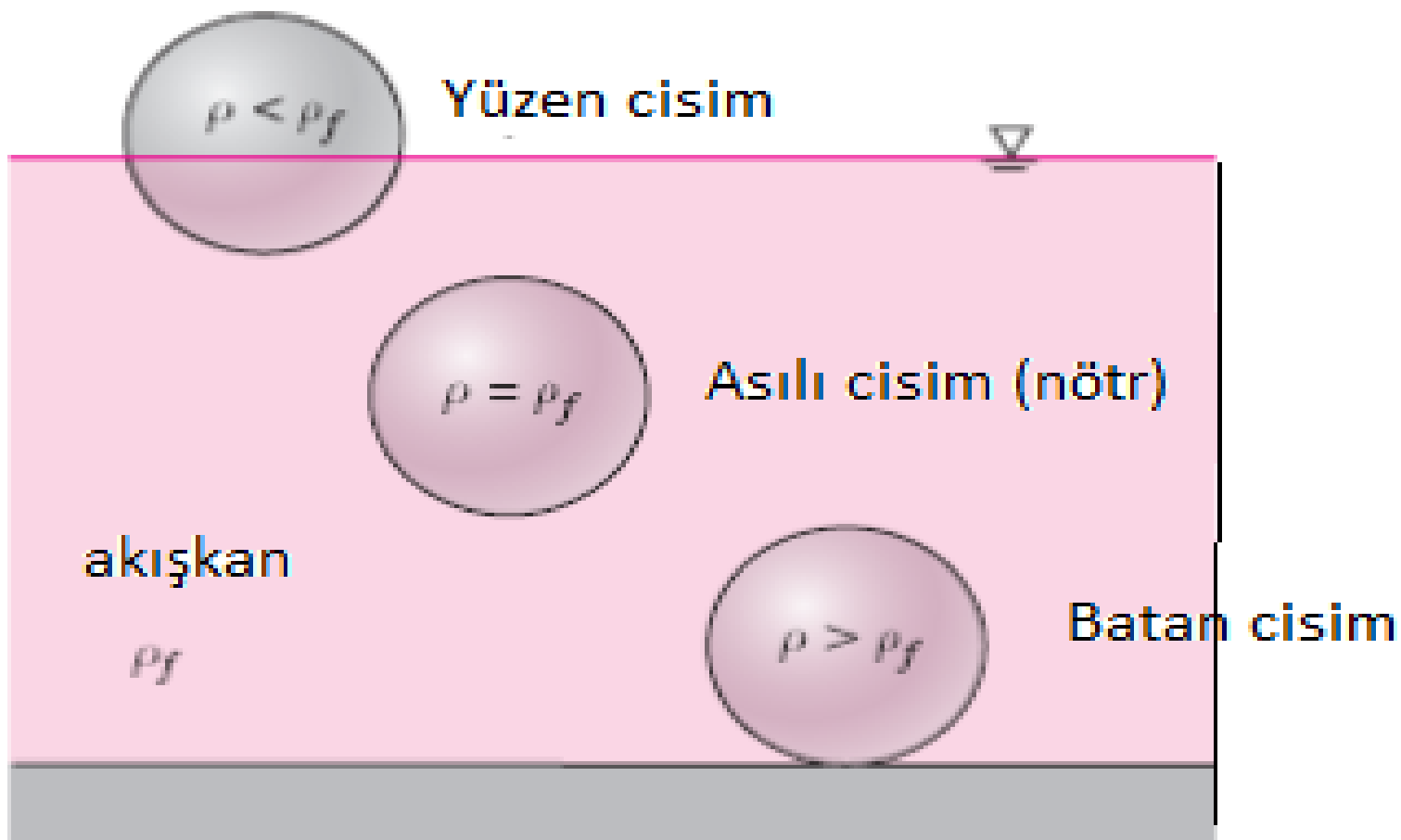


Yüzen cisimler özel bir durumdur; cismi sadece bir kısmı batmış olup geri kalan kısmı serbest yüzeyden dışarı çıkmıştır. Şekil 3.39 da gölgelenmiş kısım yer değiştiren hacimdir.

Kaldırma kuvveti :

$$F_K = \gamma V_{\text{yer değ}} \quad (3.51)$$

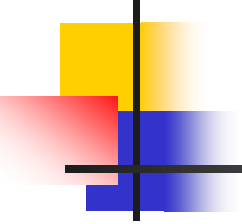
olur.

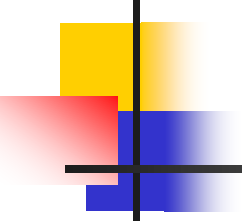


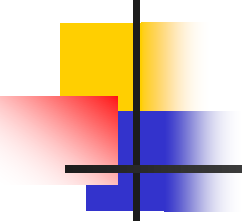
Şekil 3.39 Batan, nötr ve yüzen cisim

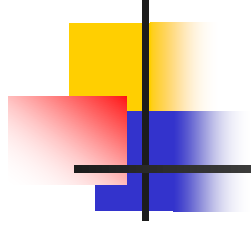
Yüzen cisimler için; tüm cismin ağırlığı, yüzen cismin batan kısmının hacmi kadar akışkanın ağırlığına eşit olan kaldırma kuvvetine eşit olmalıdır:

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{\text{batan}} = \rho_{\text{ort, cisim}} g V_{\text{toplam}} \rightarrow \frac{V_{\text{batan}}}{V_{\text{toplam}}} = \frac{\rho_{\text{ort, cisim}}}{\rho_f}$$

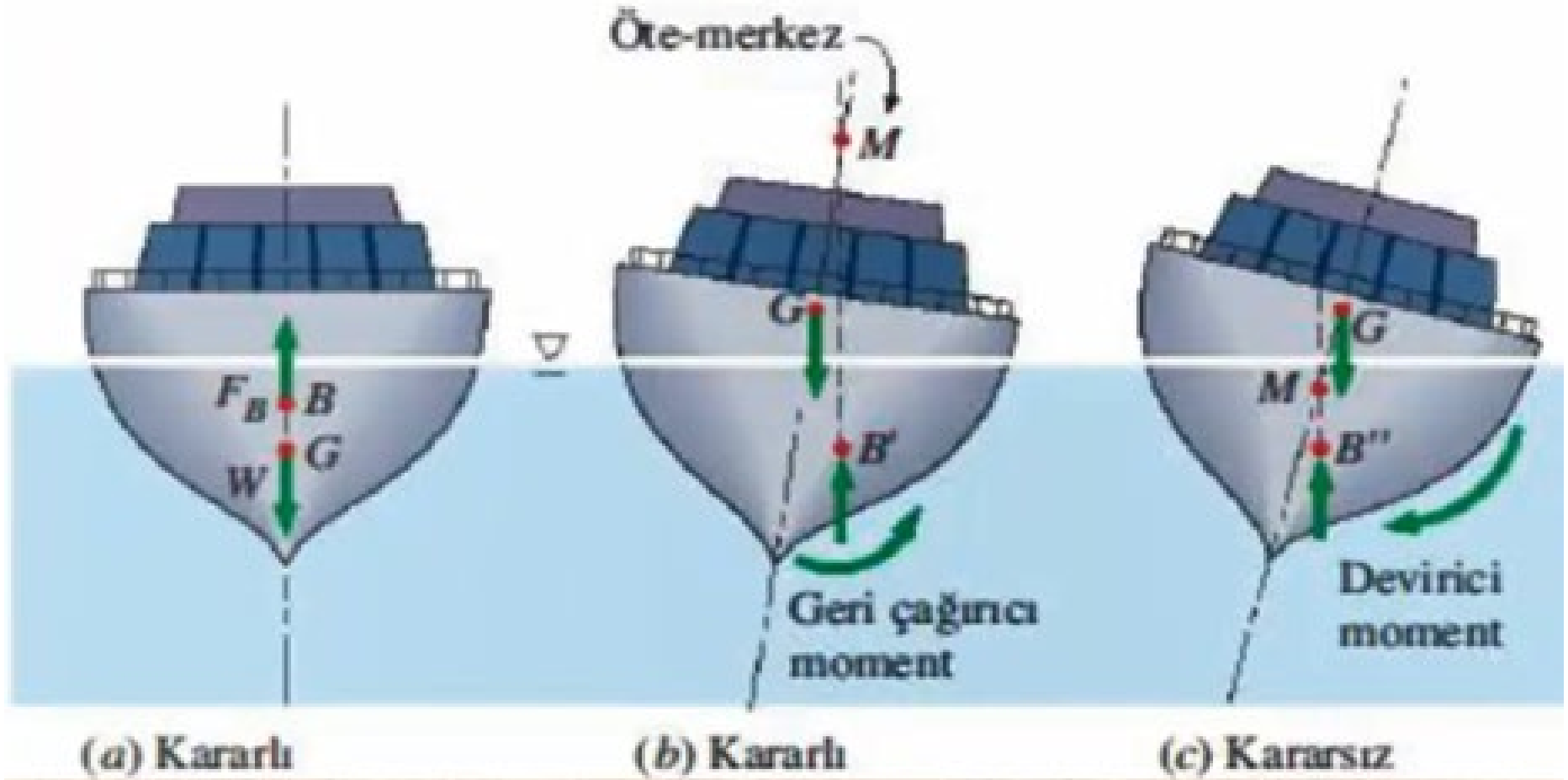
- 
- Kaldırma kuvveti yüzen cismin ağırlığına eşit olmakla kalmaz, aynı zamanda statik denge için net moment olmadığı için kaldırma kuvveti ile ağırlık aynı düşey üzerinde yer alırlar.
 - Denklem (3.51) 2. Archimedes yasasının matematiksel eşdeğeridir.
 - Yüzen cisimlerde kaldırma kuvveti cismin dalmış kısmının hacim merkezinden geçer.

- 
-
- Bir cismin özgül ağırlığı, nadiren, tam olarak akışkanın özgül ağırlığına eşit olur. Durum böyle olursa, cisim *nötr yüzen* bir cisim olacak ve akışkana daldırıldığı noktada hareketsiz kalacaktır.
 - Nötr olarak yüzen parçacıklar bazen akış görüntülemelerde kullanılır.

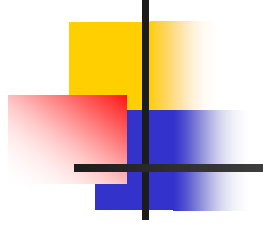
- 
-
- Örneğin *batık şamandıra* denilen nötr yüzen bir cisim okyanus akımlarını izlemek için kullanılır.
 - Bir *denizaltı* safra tanklarından içeri veya dışarı su pompalayarak yukarı veya aşağı doğru hareket edebilir veya nötr kalabilir.



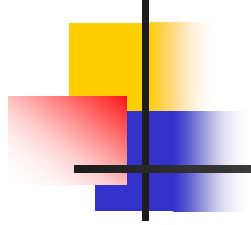
- Şekil 3.46 daki yüzen cisim bulunduğu konumda durmayabilir. En küçük bir rahatsızlık cismin kararlı olduğu diğer bir denge konumunu aramasına neden olacaktır.
- Mühendisler yüzme kararsızlıklarından kaçınacak tasarımlar yapmalıdırlar.



Şekil 3.46 Cismin dengesi a) ve b) kararlı , c) kararsız

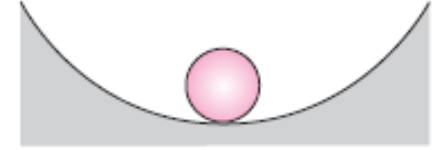


Bir denge konumunun kararlı olup olmadığını kesin olarak söylemenin tek yolu, cisme küçük miktarda bir yalpa (yer değişimi) vermek ve kendisini ilk pozisyona döndürecek bir geri getirme momentini geliştirip geliştirmediğini görmektir.

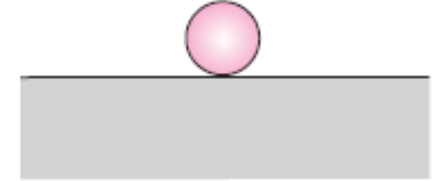


- Böyle bir moment geliştiriyorsa *denge konumu kararlı* dır.
- Yer değişimi (yalpa) sırasında oluşan moment cismi ilk denge konumundan uzaklaştıracak şekilde çalışırsa cismin ilk *denge konumu kararsız* dır.
- Yalpa sırasında cismi ne ilk denge konumuna döndürecek ne de ilk denge konumundan uzaklaştıracak yönde hiçbir moment doğmazsa cisim *nötr denge* konumundadır.

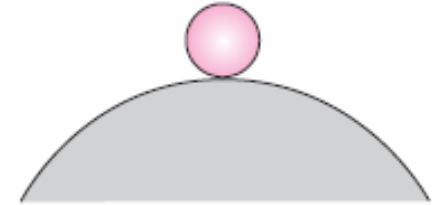
Dalmış ve Yüzen Cisimlerin Kararlılığı



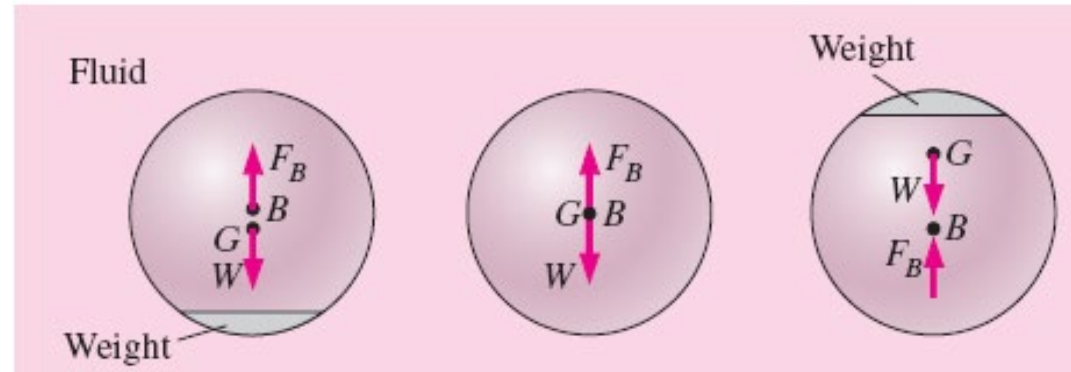
(a) Kararlı



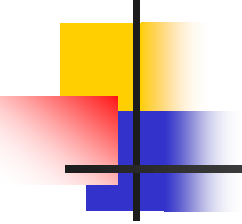
(b) Nötr kararlı



(c) Kararsız

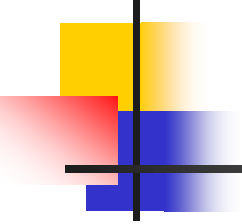


Dalmış bir cisim, eğer ağırlık merkezi G doğrudan kaldırma merkezi B 'nin altında kalıyorsa a) kararlıdır,
 G ve B üst üste geliyorsa b) nötr kararlıdır
 G doğrudan B 'nin üzerindeyse (c) kararsızdır.



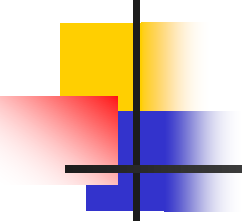
Şekil 3.46 daki yüzen simetrik cismin dengesi için adımlar:

1. Temel yüzme konumu Denklem (3.51) den hesaplanır. Cismin kütle merkezi G ve kaldırma merkezi B hesaplanır.



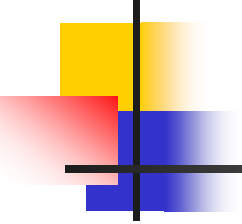
2. Cisme küçük bir $\Delta\theta$ açısı kadar yalpa verilir ve kaldırma merkezinin yeni B' konumu hesaplanır.

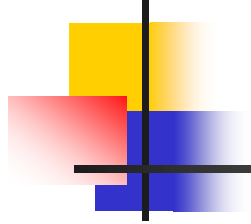
B' den yukarıya çizilen düşey çizgi simetri eksenini *metasantr* denilen, küçük açılar için $\Delta\theta$ dan bağımsız bir M noktasında keser.

- 
-
3. Eğer M noktası G nin yukarısında ise, yani *metasantr yüksekliği* MG pozitif ise, bir düzeltici moment vardır ve ilk konum kararlıdır.

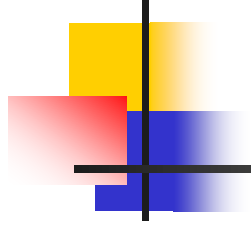
M noktası G nin altında ise (negatif MG) cisim *kararsızdır* ve devrilecektir.

Kararlılık artan MG ile artar.

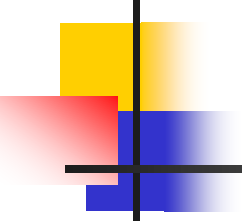
- 
-
- Böylece metasantr yüksekliği verilen bir ağırlık için kesit alanının bir özelliğidir ve değeri cismin kararlılığının göstergesidir.
 - Bir gemi gibi değişken kesitli veya yüklü bir cisim için metasantrın hesaplanması çok karmaşık olabilir.



- Bir uzman bile, düzgün bir şekle sahip olmayan yüzen cismin kararlılığını belirlemekte zorluk çeker.
- Böyle cisimler iki veya daha çok kararlı konuma sahip olabilirler.
- Örneğin bir gemi istediğimiz şekilde, güvertede oturabileceğimiz durumda veya alabora olmuş bir halde yüzebilir.



- Üniiform yoğunluktaki bir küp, simetrik olması gerekmeyen çok miktarda kararlı yüzme konumlarına sahiptir.
- Homojen silindirler simetri eksenleri düşey doğrultu ile bir açı yaparak da yüzebilirler.
- Yüzme kararsızlığı doğada da oluşur.

- 
- Canlı balıklar simetri eksenleri düşey olacak şekilde yüzerler. Öldükten sonra, bu konum kararsızdır ve yan yatmış olarak yüzerler.
 - Dev buzdağları, su altındaki erimeden ötürü biçimleri değiştiğinde kararsız olabilirler ve sonra da devrilebilirler. Buzdağları ortalama yoğunluğu 900 kg/m^3 olan donmuş kabarcıklı saf sudan oluşur. Böylece bir buzdağı ortalama yoğunluğu 1025 kg/m^3 olan deniz suyunda yüzdüğünde hacminin yaklaşık $900/1025$ i yani $7/8$ i suyun altında kalır.

Aynı şartlar altında havanın yedide biri kadar ağırlığa sahip olduğundan helyum gazı ile doldurmuş olan balonun çapı **12 m**'dir ve toplamda **270 kg**'lık insanları taşımaktadır. Balonun ilk kalkış ivmesini hesaplayınız ($\rho=1,16 \text{ kg/m}^3$, balon, balon kabini ve iplerin ağırlığını **100 kg**)



F_u : kaldırma kuvveti

$$F_u = \rho_a \cdot g \cdot V_{\text{balon}}$$

$$F_u = 1,16 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) = 10296 \text{ N}$$

$$m_{\text{Top}} = m_{\text{He}} + m_{\text{insan}} + m_{\text{balon}}$$

$$m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} \cdot V = \left(\frac{1,16}{7} \right) \cdot \left(\frac{4\pi \cdot 6^3}{3} \right) = 149,9 \text{ kg}$$

$$m_{\text{Top}} = 149,9 + 270 + 100 = 519,9 \text{ kg}$$

$$W = m_{\text{top}} \cdot g = 519,9 \cdot 9,81 = 5100,22 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F_k - W = 5195,781$$

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m_{\text{top}}} = \frac{5195,781}{519,9} = 9,99 \text{ m/s}^2$$

Hidrometre

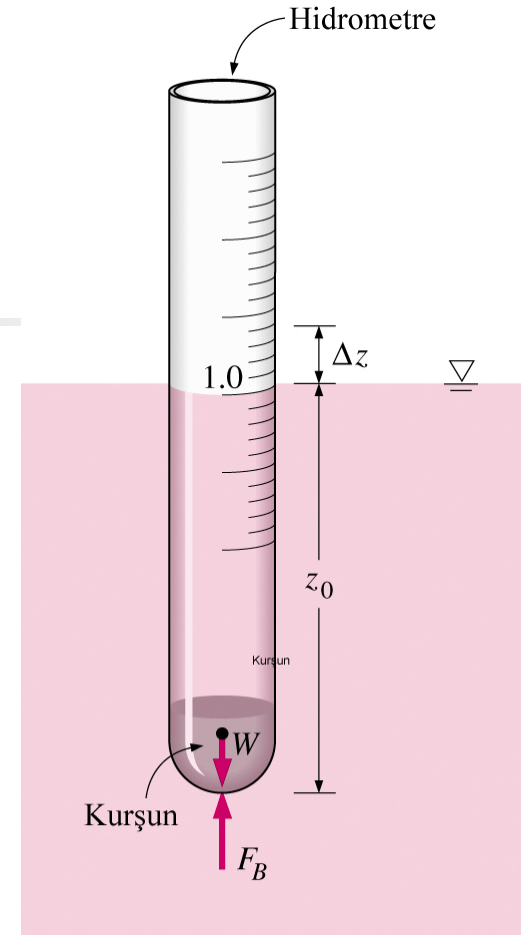
(a) Bir sıvının bağıl yoğunluğunu, saf suya karşılık gelen işaretten itibaren Δz mesafesinin fonksiyonu olarak veren bir bağıntı elde ediniz. (b) 1 cm çapında ve 20 cm boyunda olan bir hidrometrenin saf su içerisinde yarısı batmış olarak yüzmesi için (10 cm çizgisinde) içerisine konulması gereken kurşun kütesini belirleyiniz.

Önce suda sonra da sudan daha hafif bir sıvıda yüzmeye şartı yazılır ve birbirine eşitlenirse:

$$W_{hidro} = F_{K,su} = \rho_{su} g (\text{hacim})_{bat} = \rho_{su} g A z_0$$

$$W_{hidro} = F_{K,a} = \rho_{su} g (\text{hacim})_{bat} = \rho_{su} g A (z_0 + \Delta z)$$

$$\rho_{b,a} = \frac{\rho_{akışkan}}{\rho_{su}} = \frac{z_0}{z_0 + \Delta z}$$



RİJİT CİSİM HAREKETİ

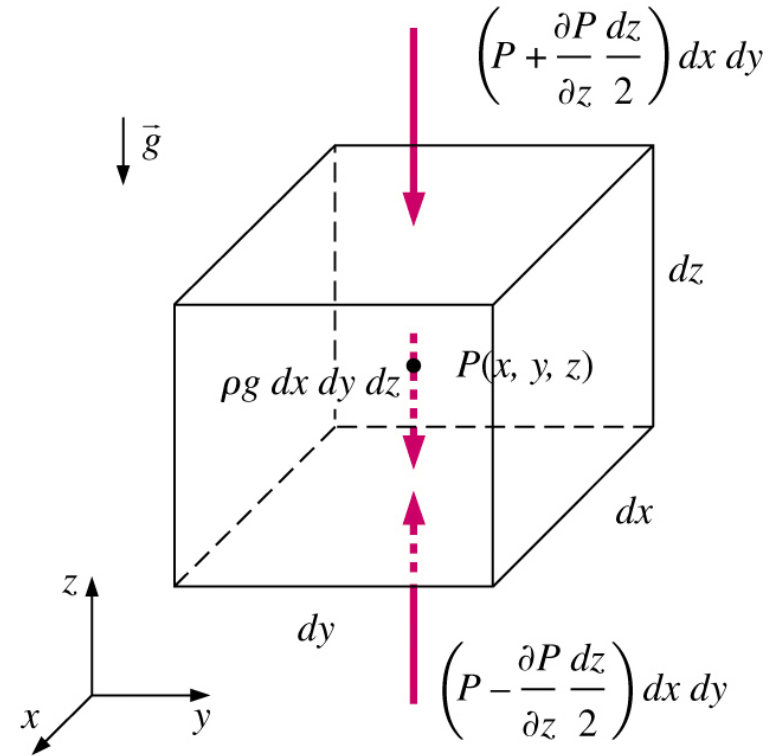
Bu tür bir harekette kayma gerilmesi oluşmaz. Dolayısıyla akışkana etkiyen yalnızca kütle ve basınç kuvvetleridir. Sadece z yönü için bu kuvvetlerin gösterildiği diferansiyel hacim elemanı alalım ve Newton'un 2. yasasını uygulayalım:

$$\delta \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho(dx dy dz) \cdot \vec{a}$$

$$\delta F_{s,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z} dxdydz$$

$$\delta F_{s,x} = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

$$\delta F_{s,y} = -\frac{\partial P}{\partial y} dxdydz$$



Rijit Cisim Hareketi

Toplam yüzey (basınç) kuvveti:

$$\delta \vec{F}_s = \delta F_{s,x} \vec{i} + \delta F_{s,y} \vec{j} + \delta F_{s,z} \vec{k}$$

$$= - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = - \vec{\nabla} P dx dy dz$$

Kütle kuvveti:

$$\delta \vec{F}_{B,z} = -g \delta m \vec{k} = -\rho g dx dy dz \vec{k}$$

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}_s + \delta \vec{F}_B = -(\vec{\nabla} P + \rho g \vec{k}) dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} P + \rho g \vec{k} = -\rho \vec{a}$$

TEMEL DENKLEM

Özel Durumlar:

Denklemin açık hali:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} + \rho g \vec{k} = -\rho(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

Özel Durum 1: Statik haldeki akışkanlar

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x = 0$$

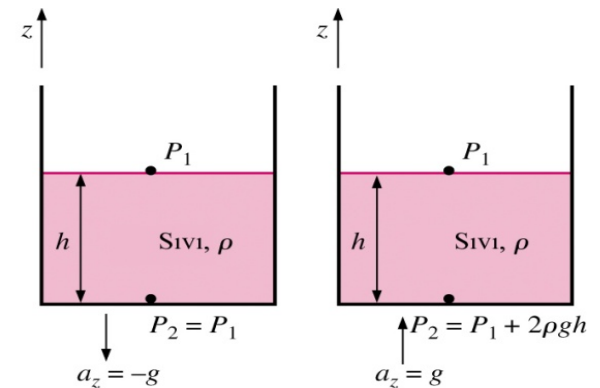
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Özel Durum 2: Serbest düşme

$$a_z = -g$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$



(a) Bir sıvının serbest düşmesi

(b) Bir sıvının yukarı doğru $a_z = +g$ ile ivmelenmesi

Doğrusal Yörünge Üzerinde Sabit İvmeli Hareket

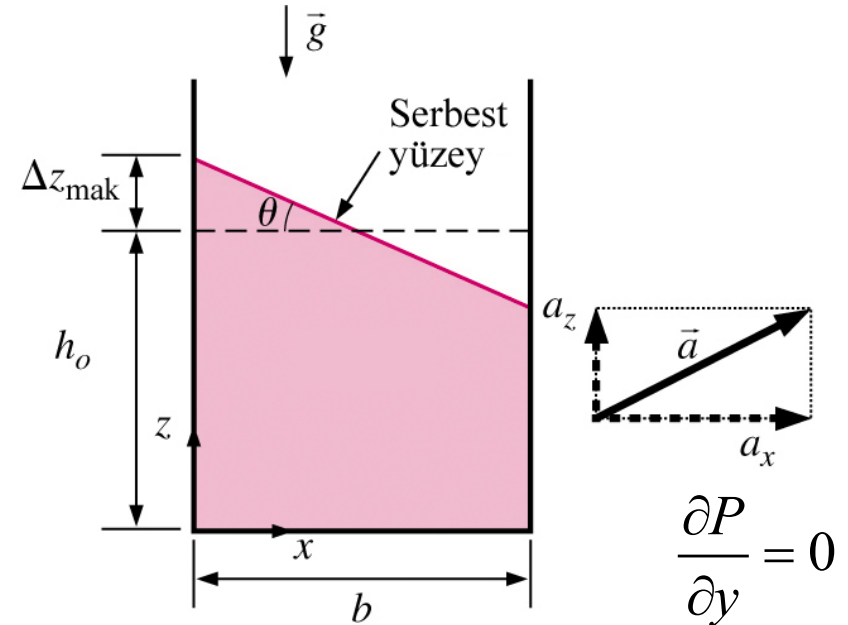
Doğrusal bir yörünge üzerindeki hareket
xz-düzleminde inceleyeceğiz $P=P(x, z)=$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

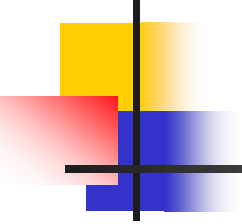
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

$$dP(x, z) = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z) dz$$



Sonlu büyüklükler cinsinden iki nokta arasındaki basınç farkı:


$$\Delta P = -\rho a_x \Delta x - \rho(g + a_z) \Delta z$$

Veya;

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

Orijin ($z=0$ ve $x=0$) noktasındaki basınç

P_0 alınırsa, **herhangi bir noktadaki basınç;**

$$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z$$

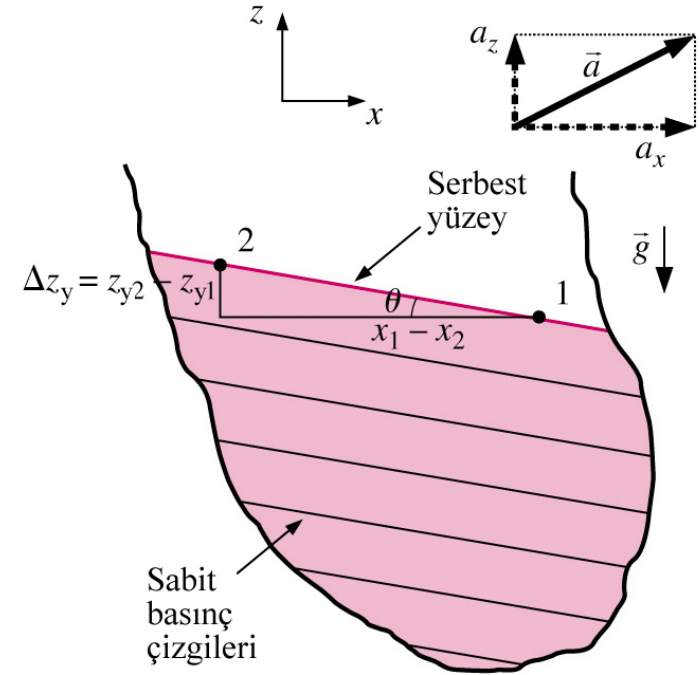
Yüzeyin eğiminin belirlenmesi

1 ve 2 noktalarının her ikisi de serbest yüzeyde seçilirse $dP = 0$ olacaktır.

$$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z) dz = 0$$

Buradan,

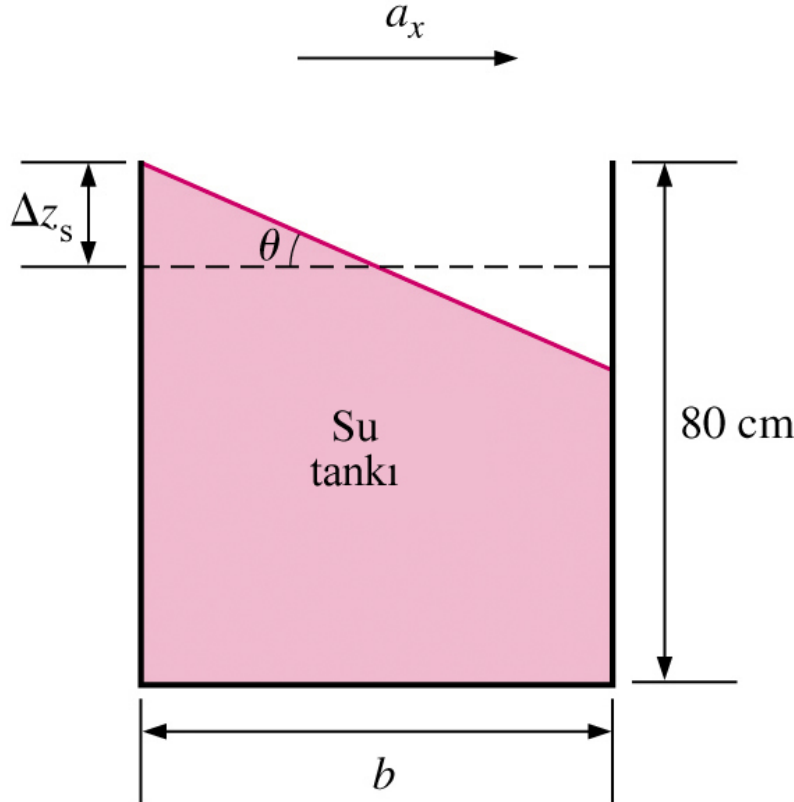
$$\frac{dz_{izobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\tan \theta = \text{sabit}$$



Bu tür hareketlerde de sıvı kütlesinin korunduğu unutulmamalıdır.

Örnek:

80 cm yüksekliğinde ve $2 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ kesit alanında kısmen suyla doldurulmuş bulunan bir balık tankı bir kamyonun arkasında taşınacaktır. Tank 0 km/h 'den 90 km/h hıza 10 saniyede ivmelenmektedir. Bu ivmelenme sırasında tanktan su boşalması istenmemesi halinde, tanktaki başlangıç su yüksekliğini belirleyiniz. Tankın uzun veya kısa kenarının hangisinin hareket doğrultusuyla paralel olarak hizalanmasını önerirsiniz?



Çözüm

Tanker sadece x -yönünde ivmelenmektedir.

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(90 - 0) \text{ km/h}}{10 \text{ s}} \left(\frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}} \right) = 2.5 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{2.5}{9.81} + 0 = 0.255$$

Durum 1: Uzun kenar hareket doğrultusunda:

$$\Delta z_{s1} = (b_1 / 2) \tan \theta = [(2 \text{ m}) / 2] \times 0.255 = 0.255 \text{ m}$$

Durum 2: Kısa kenar hareket doğrultusunda:

$$\Delta z_{s2} = (b_2 / 2) \tan \theta = [(0.6 \text{ m}) / 2] \times 0.255 = 0.076 \text{ m}$$

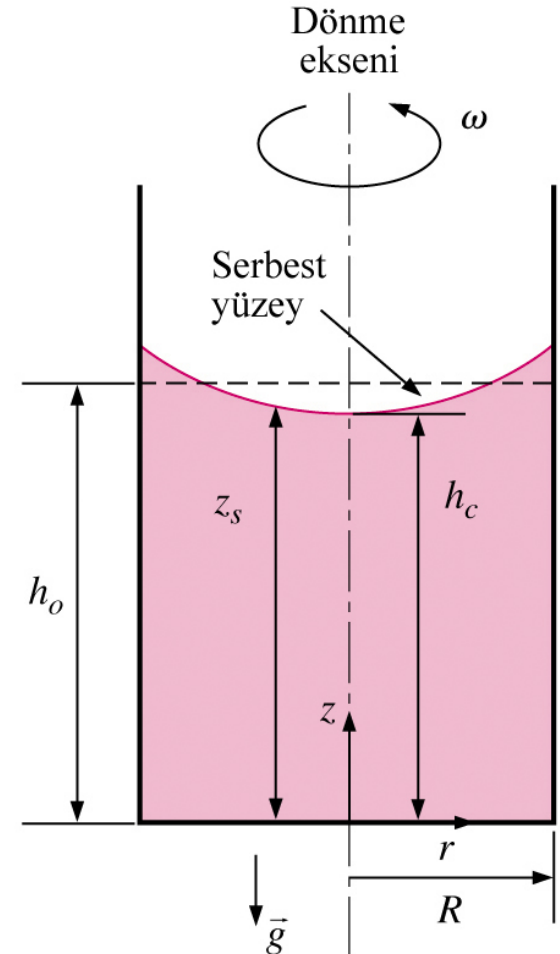
Silindirik Kaptaki Dönme

$$a_r = -r\omega^2, \quad a_z = a_\theta = 0 \rightarrow P = P(r, z)$$

$$dP(r, z) = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho a_r \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z) = -\rho g$$

$$dP(r, z) = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz$$



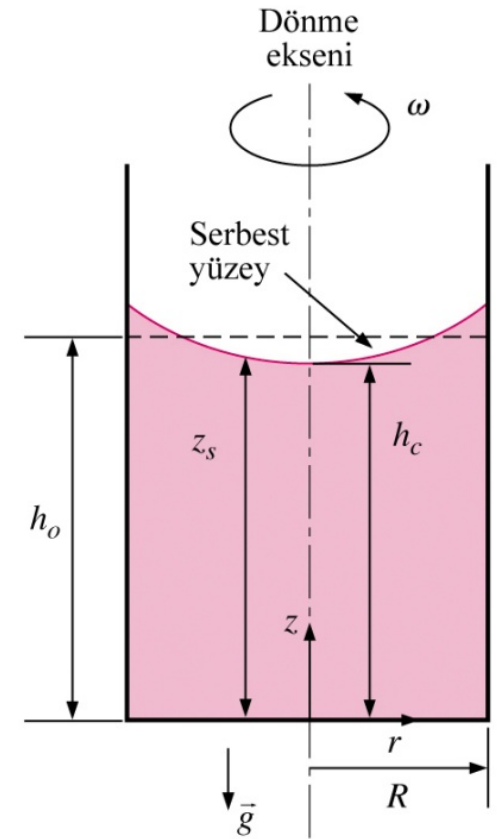
Serbest yüzeyde $dP = 0$ alınırsa:

$$dP(r, z) = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz = 0$$

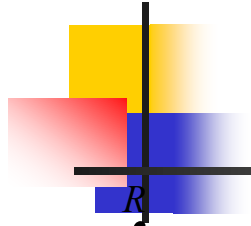
$$\frac{dz_{\text{izobar}}}{dr} = \frac{r \omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C_1$$

Serbest yüzey paraboliktir !.. Şekilde $r = 0$ için $z = h_c = C_1$ olduğundan,

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c$$



Taşma olmaması halinde (son hacim) = (ilk hacim) olacağından;



$$\forall = \int_{r=0}^R 2\pi z_s r dr = 2\pi \int_{r=0}^R \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \right) r dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c \right) = \pi R^2 h_0$$

Böylece en düşük derinlik:

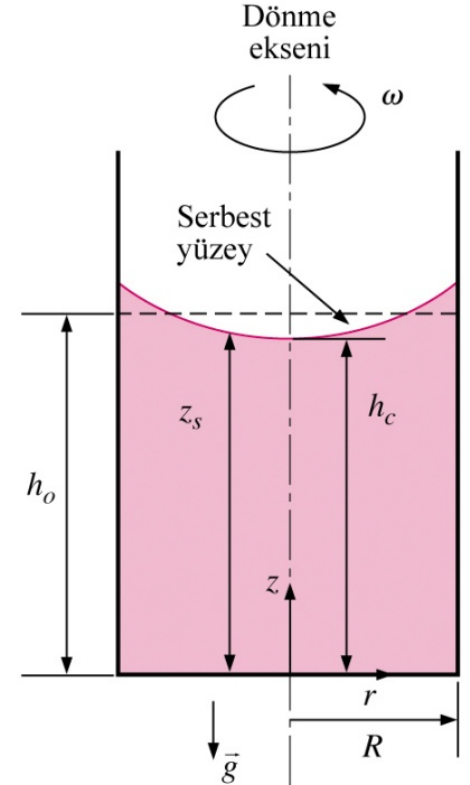
$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Yüzeyin denklemi:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g} (R^2 - 2r^2)$$

Maksimum yükseklik farkı:

$$\Delta z_{s,\text{maks}} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g} R^2$$



Basınç dağılımı

$$\int_1^2 dP(r, z) = \int_{r_1}^{r_2} \rho r \omega^2 dr - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \rho g (z_2 - z_1)$$

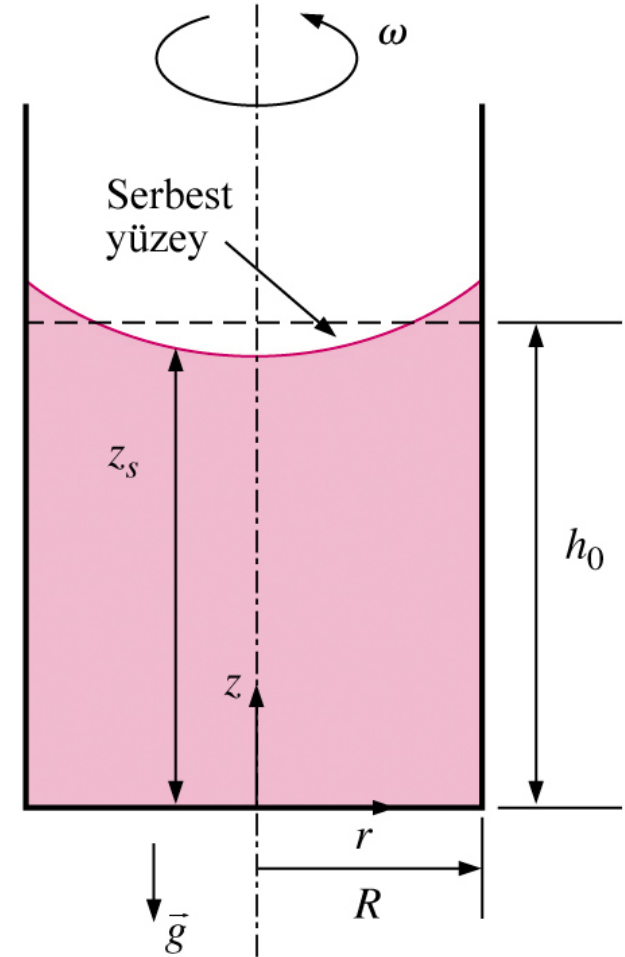
Eğer $(r, z) = (0, 0)$ noktasındaki basınç P alınır ve 2 noktası herhangi bir nokta olarak düşünülürse;

0

$$P = P_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g z$$

Bir sıvının dönme sırasında yükselmesi

20 cm çapında, 60 cm yüksekliğindeki düşey silindir, yoğunluğu 850 kg/m^3 olan bir sıvıyla 50 cm yüksekliğine kadar kısmen doldurulmuştur. Silindir sabit bir hızla döndürülmektedir. Sıvının kap kenarlarından taşmaya başlayacağı dönme hızını belirleyiniz



ÇÖZÜM

Dönen düşey silindir tabanının merkezini orijin ($r = 0, z = 0$) alındığında sıvı serbest yüzeyinin denklemi;

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

Buna göre kap çeperindeki su yükselmesi $r = R$ alınarak,

$$z_s = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Su dökülme seviyesine ulaştığında $z = 60 \text{ cm} = 0.60 \text{ m}$ olacağından;

$$0.60 = 0.50 + \frac{\omega^2 0.1^2}{4 \cdot 9.81} \Rightarrow \omega = 19.8 \text{ rad/s} = 189 \text{ devir/dakika}$$

