

$y = \frac{cx^2}{1-cx}$ bir parametrelili eğri ailesine karşılık gelen

diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: $y = \frac{cx^2}{1-cx} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1-cx}{cx^2} = \frac{1}{cx^2} - \frac{1}{x} \quad (1)$

$$y' = \frac{cx(2-cx)}{(cx-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= \frac{2-cx}{cx^3} = \frac{2}{cx^3} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{2}{x^3} \right) - \frac{1}{x^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{x^3} \left(x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right) - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(1) den $x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{c} \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 y' - (2x+y)y = 0.$$

2/ $2xyy' - 1 - y^2 = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $2xy \frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ olup ayrılabilmeli dif denklemdir.

$$\frac{2y dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = cx //$$

3/ $(x - 2xy + e^y) dx + (y - x^2 + xe^y) dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\underbrace{(x - 2xy + e^y)}_M dx + \underbrace{(y - x^2 + xe^y)}_N dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x + e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x + e^y \quad \text{olup denklemler}$$

tan diferansiyel denklemdir.

$$x dx - \underline{2xy dx} + e^y dx + y dy - \underline{x^2 dy} + xe^y dy = 0$$

$$x dx - d(x^2 y) + d(xe^y) + y dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - x^2 y + xe^y + \frac{y^2}{2} = c \Rightarrow x^2 - 2x^2 y + 2xe^y + y^2 = \underline{\underline{c}}$$

4/ $x dy + (y - y^2) dx = 0$ diferansiyel denkleminin integralen çarpanı

$\mu = x^m y^n$ formunda olup m ve n değerlerini belirterek genel çözümünü bulunuz.

Adım: $\mu = x^m y^n$ ise denklemin integralen çarpanı ile çarpıldığında denklem tam d.f. denklemi olur.

$$\frac{\partial(x)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial(y - y^2)}{\partial y} = 1 - 2y \text{ olup denklem tam diferensiyeldir.}$$

$$(x^{m+1} y^n) dy + x^m (y^{n+1} - y^{n+2}) dx = 0$$

$$(m+1)x^m y^n = x^m ((n+1)y^n - (n+2)y^{n+1})$$

$$m+1 = n+1 - (n+2)y$$

$$m = (1-y)n - 2y \Rightarrow \underline{m=n=-2}$$

$\mu = x^{-2} y^{-2}$ denklemin integralen çarpanıdır.

$$\left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2} \right) dx + \frac{1}{xy^2} dy = 0$$

$$\underline{\frac{1}{x^2 y}} dx - \underline{\frac{1}{x^2}} dx + \underline{\frac{1}{xy^2}} dy = 0$$

$$d\left(-\frac{1}{yx}\right) + d\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\underline{-\frac{1}{yx} + \frac{1}{x} = C //}$$

5/ $xy' + y = y^2 \ln x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cözüm: $y' + \frac{1}{x}y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)y^2$ olup Bernoulli diferansiyel denklemdir.

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$$y^{-1} = v \Rightarrow -y^{-2}y' = v'$$

$$-v' + \frac{1}{x}v = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{\ln x}{x} \quad \text{lineer dđ denklemdir}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}v\right)' = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x}v = -\frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$v = -x \frac{(\ln x)^2}{2} + Cx$$

$$y^{-1} = -x \frac{(\ln x)^2}{2} + Cx //$$

6/ $y' = \frac{1}{e^{-y}-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cözüm: $\frac{dx}{dy} = e^{-y}-x \Rightarrow \frac{dx}{dy} + x = e^{-y}$ lineer dđ denklemdir.

$$\mu = e^{\int 1 dy} = e^y \Rightarrow (e^y x)' = 1$$

$$\Rightarrow e^y x = y + C$$

$$\Rightarrow x = e^{-y}(y+C)$$

7/ $y' = (x+y-5)^2$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $x+y-5 = u(x)$ dönüşümü uygulanırsa

$$1+y' = u' \Rightarrow y' = u' - 1$$

$u' - 1 = u^2$ denklemi elde edilir.

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2 + 1} = dx$$

$$\Rightarrow \arctan u = x + C$$

$$\Rightarrow \arctan(x+y-5) = \underline{\underline{x+C}}$$

8/ $(y-3)^2 dx - (x+y+1)^2 dy = 0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' = \left(\frac{y-3}{x+y+1} \right)^2$

$\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$ olduğundan $x = \alpha + h, y = \gamma + k$ dönüşümü yapılır.

$$\left. \begin{array}{l} k-3=0 \\ h+k+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow k=3, h=-4 \Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha - 4 \\ y = \gamma + 3 \end{array} \text{ dönüşümü uygulanır.}$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \left(\frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \right)^2 \text{ veya } \frac{d\alpha}{d\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\gamma} + 1 \right)^2$$

$\alpha/\gamma = u(\gamma)$ dönüşümü yapılırsa

$$\alpha' = u + \gamma u' \Rightarrow u + \gamma u' = u^2 + 2u + 1$$

$$\frac{du}{u^2 + u + 1} = \frac{d\gamma}{\gamma} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) = \ln \gamma + C$$
$$(u+1/2)^2 + \frac{3}{4}$$

$$u = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x+4}{y+3} \Rightarrow 2 \arctan\left(\frac{2x+y+5}{\sqrt{3}(y+3)}\right) = \sqrt{3} \ln(y+3) + C //$$

9/ $y' = \frac{2x+y}{4x+2y-1}$ differansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cözüm: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olup $ax+by=z$ dönüşümü uygulanır.

$$2x+y=z \Rightarrow 2\cancel{x} + y' = z' \Rightarrow y' = z' - 2$$

$$z' - 2 = \frac{z}{2z-1} \Rightarrow z' = \frac{z}{2z-1} + 2 = \frac{5z-2}{2z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z-2}{2z-1} \text{ ayrılabilir dif denkleme}$$

$$\frac{2z-1}{5z-2} dz = dx \Rightarrow \left(2 - \frac{1}{5z-2}\right) dz = 5 dx$$

$$\Rightarrow 2z - \frac{1}{5} \ln(5z-2) = 5x + C$$

$$z=2x+y \Rightarrow 10y - 5x - \ln(10x+5y-2) = C //$$

10/ $y' = \frac{y(1+2e^{x/y})}{2e^{x/y}(x-y)}$ differansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cözüm: $y' = \frac{2e^{x/y} + 1}{2e^{x/y}(x/y - 1)} = G\left(\frac{x}{y}\right)$ formunda yazıldığından

denklemin homojen differansiyel denklemdir. $x/y = v(y)$ dönüşümü
ya da denklemler olarak $x = yv(y)$ uygulanırsa

$$x' = v + yv' \text{ ya da } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{v+yv'}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{v+yv'} = \frac{1+2e^v}{2e^v(v-1)} \Rightarrow \left(\frac{2e^v+1}{2e^v+v}\right) dv + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x + 2ye^{x/y} = C}}$$

11/ $y' + x^{-1}y - y^2 = -4x^{-2}$ denklemini bir a ile $\frac{a}{x}$ formunda bulunuz. Daha sonra denklemin genel a ile a^2 editle. ($a > 0$)

Açılım: $y = \frac{a}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a}{x^2}$ denklemin sağlanabilir.

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{a}{x} \right) - \frac{a^2}{x^2} = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$y = \frac{2}{x} \text{ alalım } a > 0.$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{u}{x} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{x^2}$$

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{x^2} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{u^2} = -\frac{4}{x^2}$$

$$-\frac{u'}{x^2} - \frac{3u}{xu^2} - \frac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow -u' - \frac{3}{x}u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow u' + \frac{3}{x}u = -1 \text{ lineer.}$$

$$\mu = e^{\int 3/x dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

$$(x^3 u)' = -x^3$$

$$x^3 u = -\frac{x^4}{4} + C_1$$

$$u = -\frac{x}{4} + C_1 x^{-3}$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{-x + 4C_1 x^{-3}}$$