

Laplace Dönüşümleri

Tanım 1. $f, x \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon ve s bir reel parametre olmak üzere

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (1)$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise, integralin değerine f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $F = \mathcal{L}\{f\}$ ile gösterilir.

Örnek 1. $f(x) = 1$ in Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. (1) den

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sb}}{s} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0, \\ \infty, & s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $s = 0$ için de $F(s)$ integrali ıraksak olur. O halde

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

bulunur.

Örnek 2. $t \geq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ için $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-t(s-a)} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s-a} e^{-t(s-a)} \right) \Big|_0^A \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a \end{aligned}$$

dır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad s > 0 \\ \mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

Tanım 2. Her $x \geq x_0$ için

$$e^{-\alpha x} |f(x)| \leq M$$

olacak şekilde x_0 , α ve $M > 0$ sabitleri varsa, bu durumda f fonksiyonuna α üstel basamaktadır denir.

Teorem 1. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bir α reel sayısı için α üstel basamaktan ise, bu durumda $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur.

Uyarı 1. Yukarıdaki teorem yeter koşulları ifade etmektedir, gerek koşul içermemektedir. Örneğin,

$$f(x) = xe^{x^2} \cos(e^{x^2})$$

fonksiyonu $s > 0$ için bir Laplace dönüşümüne sahiptir. Ancak α üstel basamaktan değildir.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Tanım 3. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna E_α sınıfındandır denir:

- (i) $0 \leq x < \infty$ aralığında tanımlıdır,
- (ii) Her kapalı $0 \leq x \leq b$, $b > 0$, aralığında parçalı sürekli dir.
- (iii) α üstel basamaktadır.

Teorem 2. (Lineerlik Özelliği) $s > s_i$, $1 \leq i \leq n$, için $\mathcal{L}\{f_i\}$ mevcut olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\} + \dots + c_n \mathcal{L}\{f_n\}, \quad s > s_0,$$

dır, burada $s_0 = \max\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerdir.

Örnek 3. $b \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{L}\{chbx\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{chbx\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{bx}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-bx}\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-b} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+b} \\
&= \frac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|.
\end{aligned}$$

Teorem 3. (Öteleme Teoremi) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, $s > s_0$, olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a), \quad s > s_0 + a,$$

dır.

Örnek 4. $\mathcal{L}\{xe^{ax}\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$, olduğundan $\mathcal{L}\{xe^{ax}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$, bulunur.

Teorem 4. $f \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Örnek 5. $\mathcal{L}\{x^{\frac{7}{2}}\} = ?$

Çözüm. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $F(s) = \mathcal{L}\{\sqrt{x}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-\frac{3}{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x^{\frac{7}{2}}\} &= \mathcal{L}\{x^3 \sqrt{x}\} \\
&= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} F(s) \\
&= \frac{105}{16} \sqrt{\pi} s^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5. $f \in E_\alpha$, $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{x}f(x)\right\} = \int_s^\infty F(t)dt.$$

Örnek 6. $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 3x}{x}\right\} = ?$

Çözüm. $f(x) = \sin 3x$ ve $F(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin 3x}{x}\right\} &= \int_s^\infty \frac{3}{t^2 + 9} dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{s}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6. $f \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Örnek 7. $\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sinh 2t dt\right\} = ?$

Çözüm. Teorem 2 den $\mathcal{L}\{\sinh 2x\} = \frac{2}{s^2 - 4}$ hesaplanabilir. O halde Teorem 6 dan

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sinh 2t dt\right\} = \frac{2}{s(s^2 - 4)}$$

dir.

Örnek 8 $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos 2t}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

Örnek 9 $\mathcal{L}\{t \sin t\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. $F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

dir.

Örnek 10 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{a}{u^2 + a^2} du = \arctan \frac{u}{a} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a}$

Teorem 1. $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları $[0, \infty)$ da sürekli ve α üstel basamak-tan olsunlar. Ayrıca $f^{(n)}$ $[0, \infty)$ da parçalı sürekli olsun. Bu durumda $f, f', \dots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ fonksiyonları $s > \alpha$ için Laplace dönüşümlerine sahip olup

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

dir.

Özel olarak $n = 1$ için

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

ve $n = 2$ için

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 \mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

dir.

Ters Laplace Dönüşümleri

Tanım 1. $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ özelliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna F in ters Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilir.

Örnek 1. (a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ olduğundan, $\frac{1}{s}$ in ters Laplace dönüşümü $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ dir.

(b) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$, $s > a$, olduğundan, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{ax}$ dir.

Teorem 1. (Lineerlik Özelliği) $\mathcal{L}\{f_i\} = F(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitler olmak üzere

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_n F_n\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2\} + \dots + c_n \mathcal{L}^{-1}\{F_n\}$$

dir.

Örnek 2. (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right\} = ?$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+8}{s^2+2s+5}\right\} = ?$

Çözüm. (a) $\frac{3s+2}{s^2-3s+2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$ şeklinde basit kesirlerine ayrılırsa, $A = -5$ ve $B = 8$ bulunur. O halde ters Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right\} &= -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -5e^x + 8e^{2x}\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+8}{s^2+2s+5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+3}{(s+1)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)^2+4}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} \\ &= 3e^{-x}\cos 2x + \frac{5}{2}e^{-x}\sin 2x\end{aligned}$$

bulunur, burada $\mathcal{L}\{e^{bx}\cos ax\} = \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ ($s > b$) ve $\mathcal{L}\{e^{bx}\sin ax\} = \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ ($s > b$) özellikleri kullanılmıştır.

Konvolüsyon

Tanım 2. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$f * g = \int_0^x f(t)g(x-t)$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı 1. $f * g = g * f$ dir.

Teorem 2. (Konvolüsyon Teoremi) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s)$$

dir.

Konvolusyon Türünde İntegral Denklemler

$$\int_0^x u(t)v(x-t)dt$$

şeklinde bir integrale konvolüsyon türü bir integral denir.

Örnek 3. $h(x) = \int_0^x t^7(x-t)^5 dt$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = x^7$, $g(x) = x^5$ olmak üzere

$$h(x) = f * g$$

dir. Konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} \\ &= F(s)G(s) \\ &= \frac{7!}{s^8} \frac{5!}{s^6} \\ &= \frac{(7!)(5!)}{s^{14}}\end{aligned}$$

bulunur. O halde $h(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(7!)(5!)}{s^{14}}\right\} = \frac{(7!)(5!)}{13!}x^{13}$ elde edilir.

Volterra İntegral Denklemi

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt \quad (1)$$

şeklinde bir integral Volterra integral denklemi adını alır, burada f ve k verilen fonksiyonlar olup y bilinmeyendir. (1) deki integral konvolüsyon türünde bir integral olduğundan Konvolüsyon teoremi yardımıyla çözüm bulunabilir.

(1) in her iki yanına Laplace dönüşümü uygulayıp $Y(s)$ çözülürse,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)} \quad (2)$$

elde edilir, burada $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ ve $K(s) = \mathcal{L}\{k(x)\}$ dir. (2) nin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, (1) integral denkleminin çözümü

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - K(s)}\right\}$$

bulunur.

Örnek 4.

$$y(x) = 1 + 2 \int_0^x e^{-2(x-t)}y(t)dt \quad (3)$$

integral denklemini çözünüz.

Çözüm. (3) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} \\ &= 1 + 2x \end{aligned}$$

bulunur.

Birim Basamak Fonksiyonu

Tanım 3.

$$u(x - c) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona birim basamak fonksiyonu denir.

Teorem 3. $g, [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun ve $c \geq 0$ olmak üzere $\mathcal{L}\{g(x + c)\}$ dönüşümü $s > a$ için mevcut olsun.

Bu durumda $\mathcal{L}\{u(x - c)g(x)\}$ dönüşümü de $s > a$ için mevcut olup

$$\mathcal{L}\{u(x - c)g(x)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{g(x + c)\}$$

dir.

Örnek 5.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3x, & x \geq 2, \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = 2x + 1 + (x - 1)u(x - 2)$ şeklinde yazılabilir. Teorem 3 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{2x + 1\} + \mathcal{L}\{(x - 1)u(x - 2)\} \\ &= \mathcal{L}\{2x\} + \mathcal{L}\{1\} + e^{-2s} \mathcal{L}\{x + 1\} \\ &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + e^{-2s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4. $c \geq 0$ ve $s > a$ için $\mathcal{L}\{g\}$ mevcut olsun. Bu durumda $s > a$ için $\mathcal{L}\{u(x - c)g(x - c)\}$ mevcut olup

$$\mathcal{L}\{u(x - c)g(x - c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{g(x)\} \quad (4)$$

dir.

Örnek 6. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s^2} \right\} = ?$

Çözüm. (4) eşitliğinden

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}G(s)\} = u(x - c)g(x - c) \quad (5)$$

dir, burada $G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}$ dir. $c = 2$ ve $G(s) = \frac{1}{s^2}$ olmak üzere (5) özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} &= u(x-2)(x-2) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 2, \\ x-2, & x \geq 2, \end{cases}\end{aligned}$$

elde edilir.

Türevlerin Laplace Dönüşümü

$f, f', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları $[0, \infty]$ aralığında sürekli ise

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ dir.}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\} = s \mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 \mathcal{L}\{f\} - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3 \mathcal{L}\{f\} - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

Laplace Dönüşümünün Tersi

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ olsun. Bir başka deyişle $f(t)$ ve $F(s)$ fonksiyonları arasında $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ilişkisi mevcut olsun. $f(t)$ ye $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü denir ve

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ile ifade edilir.

Ters Laplace dönüşümünde lineerlik özelliği vardır.

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = c_1 f(t) + c_2 g(t)$$

dir.

Örnek: 1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \alpha^2}\right\} = \cos \alpha t$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{3! s^4}\right) = \frac{1}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^4} + \frac{1}{s^6}\right\}$

$$= 4 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1!}{s^2}\right\} - \frac{4}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{1}{5!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}$$

$$= 4t - \frac{4}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5$$

$$3) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4s^2+1} \right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4s^2+1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 4} \frac{1/2}{s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\}$$

paydada $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ olduğu için paya 1/2 yazıyoruz
O nedenle ifade değişmesin diye 1/2
ile bölüyoruz.

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/2}{s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} t \right)$$

$$4) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s-2} + \frac{2s}{s^2+16} - \frac{3}{s^2+9} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s-2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{s^2+16} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2+9} \right\}$$

$$= 3e^{2t} + 2\cos 4t - \sin 3t$$

$$5) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+7} \right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{7}}{s^2+7} \right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{7} t.$$

$$6) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s+6}{s^2+4} \right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s+6}{s^2+4} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4} \right\} = -2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} + \frac{6}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\}$$

$$= -2\cos 2t + 3\sin 2t.$$

$$7) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+1}{s^2-4s+5} \right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+1}{s^2-4s+5} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+1}{(s-2)^2+1} \right\} = 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-2+2}{(s-2)^2+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2+1} \right\}$$

$$= 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \right\} + 10 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2+1} \right\}$$

$$= 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} \Big|_{s \rightarrow s-2} + 10 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \Big|_{s \rightarrow s-2} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \Big|_{s \rightarrow s-2}$$

$$= 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} \Big|_{s \rightarrow s-2} + 11 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \Big|_{s \rightarrow s-2}$$

$$= 5 e^{2t} \cos t + 11 e^{2t} \sin t //$$