

Laplace Dönüşümü Yardımıyla Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

$$\begin{aligned} a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y &= f(t) \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) &= c_n \end{aligned} \quad (1)$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$t \geq 0$ için tanımlı reel değerli y fonksiyonunun $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ türevleri var, sürekli ve aynı üstel basamaktan fonksiyonlar olsun. $y^{(n)}, [0, \infty)$ da parçalı sürekli olsun. Bu durumda $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri mevcut olup $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} &= s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n Y(s) - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - \dots - c_n \end{aligned} \quad (2)$$

dir. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere (1) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{a_0(t)y^{(n)}\} + \mathcal{L}\{a_1(t)y^{(n-1)}\} + \dots + \mathcal{L}\{a_{n-1}(t)y'\} + \mathcal{L}\{a_n(t)y\} = F(s)$$

olur. Bu eşitlikten $Y(s)$ fonksiyonu bulunur, sonra da ters Laplace dönüşümü uygulanırsa başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferensiyel denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

formunda basit kesirlerine ayrılırsa $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{4}$ bulunur. Başlangıç değeri probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.

$$ty'' - 2ty' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değeri probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferensiyel denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır ve

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

özelliklerinden yararlanılırsa, $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''\} - 2\mathcal{L}\{ty'\} - 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ -\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - 1) + 2\frac{d}{ds}(sY(s)) - 2Y(s) &= 0 \\ -2sY(s) - s^2Y'(s) + 2Y(s) + 2sY'(s) - 2Y(s) &= 0 \\ (2s - s^2)Y'(s) - 2sY(s) &= 0 \\ \frac{Y'(s)}{Y(s)} + \frac{2}{s-2} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınır

$$\begin{aligned} \ln Y(s) + 2 \ln(s-2) &= \ln c \\ Y(s) &= \frac{c}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = cte^{2t}$$

elde edilir. $y'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$ olup $y'(0) = 1$ koşulu uygulanırsa $c = 1$ bulunur. Böylelikle başlangıç değeri probleminin çözümü

$$y(t) = te^{2t}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3. $y'' - y' + y = e^{2t} + t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $y'' + y = \cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Laplace Dönüşümünü Kullanarak Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerini Bulmak

Örnek: $y'(t) + 3y = 13 \sin 2t$, $y(0) = 6$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: $\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13\mathcal{L}\{\sin 2t\}$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6, \quad \mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = 13 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{26}{s^2 + 4}$$

$$(s+3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{6s^2 + 50}{(s+3)(s^2+4)}$$

Basit kesirlere ayırmayı kullanmalıyız.

$$\frac{6s^2 + 50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Pay-payda eşitliyoruz.

$$6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (s+3)(Bs+C)$$

A, B, C bulmalıyız.

$$6s^2 + 50 = As^2 + 4A + Bs^2 + Cs + 3Bs + 3C \Rightarrow 6 = A^2 + B^2, \quad 3B + C = 0, \quad 4A + 3C = 0$$
$$B = -2, A = 8 \quad C = -3B \quad 4A - 9B = 0$$
$$C = 6 \quad 4A = 9B$$
$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\quad \quad \quad 9k \quad 3k$$

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}$$

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\sin 2t$$

Örnek: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

Çözüm: $\mathcal{L}\{y''(t)\} + 3\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = 0$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s - 2$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Bunları diferansiyel denklemde yazalım.

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) (s^2 + 3s + 2) = s + 5 \Rightarrow Y(s) = \frac{s+5}{(s^2+3s+2)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$, $y(t)$ yi bulmak için $Y(s)$ 'ye ters Laplace dönüşümü uygulamalıyız. Bunu yapabilmek için $Y(s)$ 'yi basit kesirlerine ayırıyoruz.

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow \begin{aligned} As + 2A + Bs + B &= s + 5 \\ A + B &= 1 & 2A + B &= 5 \\ B &= -3 & A &= 4 \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

Örnek: $y'' + 2y' + 5y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{sy(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=2} + 2sY(s) - 2\underbrace{y(0)}_{=1} + 5Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 2sY(s) - 2 + 5Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+2s+5) = s+4 + \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} + \frac{s+4}{s^2+2s+5}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

$$(As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+1) = 1$$

$$As^3 + 2As^2 + 5As + Bs^2 + 2Bs + 5B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D = 1$$

$$A+C=0, \quad 2A+B+D=0, \quad 5A+2B+C=0, \quad 5B+D=1$$

$$\underline{C = 1/10}$$

$$\underline{D=0}$$

$$4A+2B=0$$

$$\underline{B = 1/5} \Rightarrow \underline{A = -1/10}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{10}s + \frac{1}{5}}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{10}s}{s^2+2s+5}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+5}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} e^{-t} \cos t - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t +$$

$$+ e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t //$$

(7)

Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Laplace Dönüşümü İle Çözümü

Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemleri Laplace dönüşümü yardımıyla çözümlürken Teorem 1 dikkate alınarak denklemlerin çözümünde izlenen yol uygulanır.

Örnek 3.

$$\begin{cases} y' + z' = 1, \\ y' - z = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

başlangıç değeri problemini Laplace dönüşümü yardımıyla çözümlür.

Çözüm. (6) sistemindeki denklemlerin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} sY(s) + sZ(s) - 1 &= \frac{1}{s} \\ sY(s) - Z(s) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

denklemleri elde edilir. $Y(s)$ ve $Z(s)$ in bilinmeyen olduğu (7) cebirsel denklem sistemi çözümlürse,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{1}{s^2 + s}$$

ve

$$Z(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s+1}$$

bulunur. Buradan verilen problemin çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= -1 + x + e^{-x} + 1 - e^{-x} \\ &= x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} \\ &= 1 - e^{-x} + e^{-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$