DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1-) DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER (SAYFA:7)

- *"x" li ifadeler "dx" tarafına, "y" li ifadeler "dy" tarafına atılarak integraller alınır.*

2-) HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER (SAYFA:8)

- ***Verilen denklemde y' veya ($\frac{dy}{dx}$) yalnız bırakılır.(y' solda bırakılır, diğer tüm ifadeler sağ tarafa atılır.)***
- $u = \frac{y}{x}$ ***veya*** $u^2 = \frac{y^2}{x^2}$ ***.....*** $u^n = \frac{y^n}{x^n}$***,*** $y = ux$ ***, ve*** $y' = u'x + u$ ***değişken dönüşümleri denklemde yerine koyulur.***
- ***Ortaya "x" ve "u" lardan oluşan bir "değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem" çıkar.***
- ***u' ,*** $\frac{du}{dx}$ ***olarak yerine yazılır.***
- ***"u" lu terimler "du" tarafına, "x" li terimler "dx" tarafına atılarak integraller alınır.***
- ***Son olarak çözümde "u" yerine "y/x" koyulur.***

3-) HOMOJENE GETİRİLEBİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER (SAYFA:11)

$y' = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ ***formunda ise şöyle çözüme gidilir:***

- $\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ***ise ;***
- $\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{pmatrix}$ ***denklem sisteminden x=h ve y=k kökleri bulunur.***
- ***Denklemde "x" yerine (x_o+h) ve "y" yerine (y_o+k) yazılır.***
- ***Ortaya çıkan "homojen diferansiyel denklem" 2. bölümdeki gibi çözülür.***
- $\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ***ise ;***
- $a_1x + b_1y + c_1 = z$ ***dönüşümü yapılır ve her iki tarafın x' e göre türevi alınır.***
- $(a_2x + b_2y + c_2)$ ***ve (y') z cinsinden bulunup denklemde yerine konulur.***
- ***Ortaya "z" ve "x" değişkenlerinden oluşan bir "değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem" elde edilir.***
- ***"z" li terimler "dz" tarafına, "x" li terimler "dx" tarafına atılarak integraller alınır.***
- ***Son olarak "z" yerine*** $a_1x + b_1y + c_1$ ***ifadesi koyulur.***

4-) TAM DİFERANSİYEL DENKLEM (SAYFA:17)

$Mdx + Ndy = 0 = du \quad \rightarrow u = C$ ***formu elde edilir.***

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ***ile Tam Diferansiyellik kontrolü yapılır.Sağlanıyorsa;***

- $u(x,y) = \left(\int M\partial x\right) + C(y)$ ***integrali alınıp u(x,y) bulunur.***
- ***Bulunan u(x,y);*** $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N$ ***eşitliğinde yerine yazılıp C(y) bulunur ve u(x,y)' de yerine koyulur.***
- ***u(x,y)' deki C_1 için (C-C_1=*** $\overline{C}$ ***) eşitliği uygulanıp u(x,y) elde edilmiş olur.***

5-) ENTEGRASYON ÇARPANI METODU (SAYFA:19)

- ***Tam diferansiyellik kontrolünde*** $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ***ise denklemin her iki tarafı*** $\mu(x,y)$ ***ile çarpılır.***

- $\mu(x,y)$ **de** $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M\dfrac{\partial V}{\partial y} - N\dfrac{\partial V}{\partial x}} = \dfrac{N_X - M_Y}{MV_Y - NV_X}$ ***ifadesinden bulunur.***
- ***v=x ise*** $\mu(x) = e^{\int \frac{N_X - M_Y}{-N}dx}$ ***, v=y ise*** $\mu(y) = e^{\int \frac{N_X - M_Y}{M}dy}$
- ***Denklemin her iki tarafı $\mu(x,y)$ ile çarpılınca <u>tam diferansiyel denklem</u> elde edilir ve 4. bölümdeki gibi çözülür.***

6-) BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER (L.S.D)

- $y' + P(x).y = Q(x)$ ***formu elde edilir.***
- $y_h' + P(x).y_h = 0$ ***şeklinde denklem sıfıra eşitlenir.***
- ***Homojen çözümden;*** $\dfrac{y_h'}{y_h} + P(x) = 0$
- $\ell n\dfrac{y_h}{C} = -\int P(x)dx \quad ve \quad y_h = Ce^{-\int P(x)dx}$
- ***y_h çözümünde C yerine $\dfrac{dC}{dx}$ yazılıp Q(x) e eşitlenir. →*** $\dfrac{dC}{dx}.e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$
- ***Ortaya "C" ve "x" terimlerinden oluşan bir "değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem" elde edilir.***
- ***"C" li terimler "dC" tarafına, "x" li terimler "dx" tarafına atılarak intagreller alınır.***
- ***"x" cinsinden elde edilen C, homojen çözümde C yerine yazılıp genel çözüm elde edilmiş olur.***

7-) BERNOULLI DİFERANSİYEL DENKLEMİ (SAYFA:27)

- $y' + P(x).y = Q(x).y^n$ ***formu elde edilir.***
- ***Denklemin her iki tarafı da y^n e bölünür →*** $\dfrac{y'}{y^n} + P(x).\dfrac{y}{y^n} = Q(x)$
- ***$u=y^{1-n}$ yani ($u = \dfrac{y}{y^n}$) dönüşümü yapılır ; $u'=(1-n)y^{-n}y'$ →*** $\dfrac{u'}{1-n} = \dfrac{y'}{y^n}$ ***elde edilir ve üstteki denklemde yerine koyulur.***
- ***Ortaya*** $\dfrac{u'}{1-n} + P(x).u = Q(x)$ ***şeklinde bir "lineer diferansiyel denklem" elde edilir.***
- ***Denklemi (1-n) ile çarparız ve :*** $u' + R(x).u = S(x)$ ***denklemini elde ederiz.[$(1-n)P_{(x)}=R_{(x)}$ alındı.]***
- $u_h' + R(x).u_h = 0$ ***şeklinde denklem sıfıra eşitlenir.***
- ***Homojen çözüm;*** $u_h = Ce^{-\int R(x)dx}$ ***formülü kullanılarak direk yazılabilir.***
- ***Üstteki u_h çözümünde C yerine $\dfrac{dC(x)}{dx}$ yazılıp S(x) e eşitlenir. →*** $\dfrac{dC(x)}{dx}.e^{-\int R(x)dx} = S(x)$
- ***Ortaya "C" ve "x" terimlerinden oluşan bir "değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem" çıkar.***
- ***"C" li terimler "$dC_{(x)}$" tarafına, "x" li terimler "dx" tarafına atılarak intagreller alınır.***
- ***"x" cinsinden elde edilen "$C_{(x)}$", homojen çözümde "C" yerine yazılıp "u" bulunur.***
- ***Bulunan "u" dan*** $u = \dfrac{y}{y^n}$ ***dönüşümü ile "y" elde edilir.***

8-) RICCATI DİFERANSİYEL DENKLEMİ - JACOBI DÖNÜŞÜMÜ (SAYFA:35)

- ***$y'=P(x)+Q(x).y+R(x).y^2$ formu elde edilir.***
- $y = -\dfrac{1}{R(x)}.\dfrac{u'}{u}$ ***dönüşümü uygulanır.***
- $u'' - [Q(x) + \dfrac{R'(x)}{R(x)}].u' + R(x).P(x).u = 0$ ***denkleminde tüm değerler yerine koyulup 2.mertebe lineer diferansiyel denklem elde edilir.***

8-a) RICCATI DİFERANSİYEL DENKLEMİ - (BİR ÖZEL ÇÖZÜMÜ BİLİNEN)

$\left(y' = P(x) + Q(x).y + R(x).y^2\right)$ *tipi Riccati Diferansiyel Denklem ve bir özel çözüm* y_1 *olsun :*

- $u' + (Q(x) + 2y_1.R(x))u = -R(x)$ *denkleminde veriler yerlerine koyularak "u" ya göre çözüm bulunur.*
- $(Q(x) + 2y_1.R(x)) = A(x)$ *ve* $-R(x) = B(x)$ *dersek* $u' + A(x).u = B(x)$ *şeklinde "lineer diferansiyel denklem" çıkar.*
- $u_h' + A(x).u_h = 0$ *şeklinde denklem sıfıra eşitlenir.*
- *Homojen çözüm;* $u_h = Ce^{-\int A(x)dx}$ *formülü kullanılarak direk yazılabilir.*
- *Üstteki* u_h *çözümünde C yerine* $\dfrac{dC(x)}{dx}$ *yazılıp B(x) e eşitlenir.* → $\dfrac{dC(x)}{dx}.e^{-\int A(x)dx} = B(x)$
- *Ortaya "C" ve "x" terimlerinden oluşan bir "değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem" elde edilir.*
- *"C" li terimler "dC(x)" tarafına, "x" li terimler "dx" tarafına atılarak intagreller alınır.*
- *"x" cinsinden elde edilen "C(x)", homojen çözümde "C" yerine yazılıp genel çözüm elde edilmiş olur.*
- *Son olarak da bulunan u dan* $y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ *dönüşümü ile y elde edilir.*

9-) BİRİNCİ MERTEBEDEN YÜKSEK DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER (SAYFA:41)

- *Verilen diferansiyel denklem çarpanlarına ayrılarak, çarpanların ayrı ayrı çözümü elde edilip çarpılır.*

10-) GENEL ÇÖZÜMDEN TEKİL ÇÖZÜM BULMA (SAYFA:42)

- *Verilen ifade (....=0) olacak şekilde düzenlenir.*
- *İfadede "C" yi sıfır yapan değerler bulunur.*
- *İfadenin "C" ye göre türevi alınır ("x" ve "y" sabit) ve sıfıra eşitlenerek bir "C" ifadesi daha bulunur.*
- *Bulunan "C" ifadesi diğer ifadede yerine koyularak tekil çözüm elde edilir.*
- *Elde edilen çözümün denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir; sağlamazsa "tekil çözüm yoktur" denilir.*

11-) DİFERANSİYEL DENKLEMDEN TEKİL ÇÖZÜM BULMA (SAYFA:45)

- *Verilen diferansiyel denklem (....=0) olacak şekilde düzenlenir.*
- *y'=p dönüşümü denkleme uygulanır ve "p" ye göre türev alınır.*
- *Denklemde p çekilerek elde edilen ifade (y') ye eşitlenir.*
- *Bu ifadenin integrali alınarak (C sabitine gerek yok) "y" elde edilir.*
- *Elde edilen ifadeler ilk verilen denklemde yerlerine koyulur.*
- *Eşitlik sağlanıyorsa tekil çözüm bulunan "y" değeridir, aksi durumda tekil çözüm yoktur.*

12-) CLAIRAUT DİFERANSİYEL DENKLEMİ (SAYFA:46)

- *Verilen diferansiyel denklem* $y' = xy' + \Phi(y')$ *formunda ise genel çözüm* → $y = xC + \Phi(C)$ *olur.*

13-) LAGRANGE DİFERANSİYEL DENKLEMİ (SAYFA:47)

- $y = x.f(y') + \Phi(y')$ *formu elde edilip y'=p dönüşümü uygulanır.*
- *Elde edilen* $y = x.f(p) + \Phi(p)$ *denkleminin "x" e göre türevi alınır.*
- *Bulunan denklem* $\dfrac{dx}{dp}$ *ile çarpılırsa "x" e göre "lineer diferansiyel denklem" elde edilmiş olur.*
- *Bu durumda 6. bölümdeki gibi çözüme gidilir fakat denklemde* $\left(x' = \dfrac{dx}{dp}\right)$ *olduğuna dikkat edilmelidir.*
- *Bulunan x çözümü* → $\begin{pmatrix} x = f(p) + C \\ y = x.f(p) + \Phi(p) \end{pmatrix}$ *şeklinde bırakılabilir.*

14-) YÜKSEK MERTEBEDEN, SAĞ TARAFSIZ, SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM (SAYFA:56)

- *Verilen denklemin "α" ya bağlı karakteristik denklemi elde edilir (y için "1" , y' için α , y" için α^2 ....)*
- *Karakteristik denklemin kökleri bulunur; köklere göre genel çözüm yazılır:*

- *Kökler reel ise,* $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots$
- *Kökler reel ve katlı ise(* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = m$ *),* $y = e^{mx}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots)$
- *Kökler kompleks ise("a+bi" ve "a-bi"),* $y = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$

15-) YÜKSEK MERTEBEDEN, SAĞ TARAFLI, SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM (SAYFA:58)

- *Önce sağ tarafsız çözüm için 14. bölümdeki gibi karakteristik denklem yazılır ve kökleri bulunur.*
- *Köklerin durumuna göre (reel~katlı~kompleks) uygun homojen çözüm elde edilir.*
- *Özel çözüm için ise :*

Belirsiz Katsayılar Yöntemine göre;

- *Aşağıdaki tablodan duruma uygun özel çözüm seçilir.*

Denklemin Sağ Tarafı	Karakteristik Denklemin Kökü Değilse	Özel Çözüm Tahmini (y_p)
C	0	A
x^n	0	$A_1x^n+A_2x^{n-1}+\ldots+A_n$
e^{ax}	α	$A \cdot e^{ax}$
$x^n \cdot e^{ax}$	α	$e^{ax}(A_1x^n+A_2x^{n-1}+\ldots+A_n)$
cosbx veya sinbx	ib	Acosbx + Bsinbx
e^{ax}.cosbx veya e^{ax}.sinbx	$\alpha \mp ib$	e^{ax} (Acosbx + Bsinbx)
$x^n \cdot e^{ax}$.cosbx veya $x^n \cdot e^{ax}$.sinbx	$\alpha \mp ib$	e^{ax}.cosbx$(A_1x^n+A_2x^{n-1}+\ldots+A_n)$ + e^{ax}.sinbx$(B_1x^n+B_2x^{n-1}+\ldots+B_n)$

- *Karakteristik denkleme ait köklerde tablonun 2. sütunundaki değerler varsa, özel çözüm tahmini x^k ile çarpılır.*
- *Burda k, ikinci sütundaki değere eşit olan kök sayısıdır.(Örneğin 1. ve 2. satır için* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *çıkarsa k=2 olur.)*
- *3.sütundan (y_p) seçilen özel çözüm verilen denklemin mertebesi kadar türetilerek (x^k ile çarpıldı ise çarpılmış hali türetilir.) << y_p' , y_p'' , y_p'''... >> elde edilir.*
- *Bulunan (y_p' , y_p'' , y_p'''...) değerleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulup sağ tarafa($Q_{(x)}$) eşitlenir.*
- *Denklemde sağ ve soldaki aynı değişkenlerin katsayıları eşitlenerek y_p nin katsayıları bulunur.*
- *Tamamen bulunmuş olan y_p özel çözüm(leri) homojen çözüm ile toplanarak genel çözüm elde edilir.*

LSD Yöntemine göre;

- *Bulunan homojen çözüm; C_1 , C_2 ... terimleri de değişken kabul edilerek (yani $C_{1(x)}$, $C_{2(x)}$ olarak) verilen diferansiyel denklemin mertebesi kadar türetilir.*
- *Sonuncu alınan türev ifadesi dışındaki " $C'_{(x)}$ " li ifadeler sıfıra eşitlenir.*
- *Sonuncu türevdeki $C'_{(x)}$ li ifade $\frac{Q(x)}{a_o}$ a eşitlenir [$Q_{(x)}$:Denklemin sağ tarafı , a_o : Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeleli elemanın katsayısı].*
- *Sıfıra ve $\frac{Q(x)}{a_o}$ a eşitlenen " $C'_{(x)}$ " li ifadelerden $C_1'_{(x)}$, $C_2'_{(x)}$ çekilerek $C_{1(x)}$, $C_{2(x)}$ ... ifadeleri bulunur.*
- *Bulunan bu ifadeler homojen çözümdeki C_1 , C_2 ...lerin yerine koyularak genel çözüm elde edilir.*

16-) EULER DİFERANSİYEL DENKLEMİ - SAĞ TARAFSIZ (SAYFA:64)

- $y = x^{\alpha}$ *dönüşümü yapılır ve y' , y" , y"' ... elde edilip verilen denklemde yerine yazılır.*
- *Denklem düzenlendiğinde* $x^{\alpha}.f(\alpha) = 0$ *gibi bir ifade ortaya çıkar.Burda* $f(\alpha)$ *karakteristik denklemdir.*
- $f(\alpha)$ *dan* α *kökleri elde edilir ve köklerin durumuna göre (reel~katlı~kompleks) homojen çözüm yazılır.*

- *Kökler reel ise ;* $y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_n x^{\alpha_n}$
- *Kökler katlı ise(* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = m$ *) ;* $y = x^m[C_1 + C_2 \ell nx + C_3(\ell nx)^2 + \ldots + C_k(\ell nx)^{k-1}]$
- *Kökler kompleks ise(*" $a+ib$ " *ve* " $a-ib$ "*) ;* $y = x^a[C_1 \cos(b\ell nx) + C_2 \sin(b\ell nx)]$

17-) EULER DİFERANSİYEL DENKLEMİ - SAĞ TARAFLI (SAYFA:66)

- **LSD Yöntemi ile:**
- *$y = x^{\alpha}$ dönüşümü yapılır ve y' , y'' , y''' ... elde edilip verilen denklemde yerine yazılır.*
- *Denklem düzenlendiğinde $x^{\alpha}.f(\alpha) = Q(x)$ gibi bir ifade ortaya çıkar.Burda $f(\alpha)$ karakteristik denklemdir.*
- *$f(\alpha)$ dan α kökleri elde edilir ve köklerin durumuna göre (reel~katlı~kompleks) homojen çözüm yazılır.*
- *$f(\alpha)$ karakteristik denklemine uyan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem yazılır ve Q(x) e eşitlenir.Burda kastedilen, < α > için <y'> ; < α^2 > için <y''> ;< α^n > için <$y^{(n)}$> yazılmasıdır.*
- *Q(x) de $x = e^t$ dönüşümü yapılır.Aynı dönüşüm homojen çözüme de uygulanır.*
- *Homojen çözümde C_1 , C_2 ... sabitleri de değişken kabul edilerek verilen denklemin mertebesi kadar türetilir.*
- *Sonuncu türev ifadesi dışında kalan <$C'(x)$> lü ifadeler sıfıra eşitlenir.*
- *Sonuncu türevdeki <$C'(x)$> lü ifade $\dfrac{Q(x)}{a_o}$ a eşitlenir.Burda Q(x) ifadesi $x = e^t$ dönüşümü uygulanmış halidir.Yani $Q(e^t)$... a_o ise yazılan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemde y^n in katsayısıdır.*
- *Sıfıra eşitlenen <C'(x)> li ifadeler ve son türevde $\dfrac{Q(x)}{a_o}$ a eşitlenen ifadelerin beraber çözümünden <$C_1'(e^t)$> <$C_2'(e^t)$>... elde edilir.Bunların integralinden de <$C_1(e^t)$, $C_2(e^t)$...> bulunur.*
- *Tüm bulunanlar homojen çözümde yerine yazılıp genel çözüm çıkarılır.*
- **3.Yöntem ile (tavsiye edilen)**
- *$y = x^{\alpha}$ dönüşümü yapılır ve y' , y'' , y''' ... elde edilip verilen denklemde yerine yazılır.*
- *Ortaya $x^{\alpha}.f(\alpha) = Q(x)$ formu çıkar.Burdan $f(\alpha)$ sıfıra eşitlenip kökler bulunur.*
- *Köklere bağlı homojen çözüm tahmini yazılır(reel~katlı~kompleks).*
- *$f(\alpha)$ ya uyan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem kurulur ve Q(x) e eşitlenir.*
- *Q(x) te $x = e^t$ dönüşümü yapılır."y" ve "t" ye bağlı yeni denklemde özel çözüm tahmini yapılır(TABLO-üstte)*
- *Seçilen y_p kurulan sabit katsayılı lineer denklemin mertebesi kadar türetilip y_p , y_p' , y_p'' ... bulunur.*
- *Bulunan y_p , y_p' , y_p'' ... sabit katsayılı lineer denklemde yerine yazılıp $f(\alpha)$ <u>ya uyan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemin sağ tarafına</u> eşitlenir.*
- *Eşitlikten katsayılar bulunur ve özel çözümle homojen çözüm toplanıp genel çözüm elde edilir.*

18-) ÖZEL ÇÖZÜM(LER) VERİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMDE MERTEBE DÜŞÜRME (SAYFA:72)

- *Bir özel çözüm y_1 ise $y=u.y_1$ dönüşümü yapılır (y' , y'' , ... ler bulunup denkleme koyulur).*
- *Sonra u'=v dönüşümü ile mertebe düşürülür.*
- *Mertebe düşümü ve değişken dönüşümü verilen özel çözüm sayısı kadar uygulanır.*
- *Oluşan lineer diferansiyel denklem önceki yöntemlerle çözülür.*

19-) OPERATÖRLER METODU İLE SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ (SAYFA:74)

- *y'=Dy , y''=D^2y , ...dönüşümleri uygulanır ve $f(D).y = Q(x)$ elde edilir.*
- *f(D) karakteristik denklemi sıfıra eşitlenip kökler bulunur.*
- *Köklerin durumuna göre (reel~katlı~kompleks) homojen çözüm yazılır.*
- *Özel çözüm için $f(D).y = Q(x)$ den y çekilir → $y_p = \dfrac{Q(x)}{f(D)}$*
- *Bulunan α_1 , α_2 , α_3 ... α_n ve Q(x) kullanılarak $y_p = e^{\alpha_1 x}\int e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}\ldots\int e^{-\alpha_n x}Q(x)(dx)^n$ denklemi çözülür.*
- *Elde edilen özel çözümle homojen çözüm toplanıp genel çözüm elde edilir.*

20-) LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNDE "D" OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜM [İLK KOŞULLAR BELLİ] (SAYFA:78)

- *1. , 2. ,...denklemlerde y'=Dy , y''=D^2y , ... dönüşümleri uygulanır.*
- *Denklemler uygun katsayılarla çarpılıp toplanarak "D" ve "x" e bağlı tek denklem elde edilir.*
- *Bu denklemden çıkarılan karakteristik denklemin <f(D)> kökleri bulunur ve uygun homojen çözüm yazılır.*
- *Sonra sağ tarafa göre özel çözüm tahmini yapılır(TABLO) ve f(D) deki D nin üssü kadar türetilir.*
- *Elde edilen ifadeler "D" ve "x" e bağlı denklemde yerine yazılıp katsayılar bulunur.*
- *Özel ve homojen çözüm toplanıp(x_h+x_p) genel çözüm(x_g) elde edilir.*
- *x_g soruda verilen denklemlerden birinde yerine konup y_g bulunur.*

- *Son olarak elde edilen x_g ve y_g soruda verilen diğer denklemde yazılıp x(t) ve y(t) bulunur.*

21-) DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN EIGEN KARAKTERİSTİK DENKLEMİYLE ÇÖZÜMÜ - SAĞ TARAFSIZ (SAYFA:81)

- **1. ADIM (HOMOJEN) :** *Verilen diferansiyel denklemlerden (A- α I) matrisinin determinantı yazılıp sıfıra eşitlenir ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ... \alpha_n$ kökleri bulunur.(I:birim matris / A:katsayılar matrisi)*
- **2. ADIM (HOMOJEN) :** *Köklerin durumuna göre (reel~katlı~kompleks) uygun homojen çözüm yazılır:*

○ *Kökler reel ise ;* $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{\alpha_1 t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} e^{\alpha_2 t}$

○ *Kökler katlı ise ;* $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{\alpha t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} t e^{\alpha t}$

○ *Kökler kompleks ise ;* $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{at} \cos bt + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} e^{at} \sin bt$

- **3. ADIM (HOMOJEN) :** *Homojen çözümlerde dört tane bilinmeyen (C_1 , C_2 , C_3 , C_4) olduğundan bunlar ikiye düşürülür (C_2 , C_1 cinsinden ; C_4 de C_3 cinsinden bulunur ya da C_1 , C_2 cinsinden ; C_3 de C_4 cinsinden elde edilir.).Bunun için X_h , verilen denkleme (sağ tarafsız!!!) koyulur:* $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix}$
- **4. ADIM (HOMOJEN) :** *Burdan sadece 1. elemanlar için matris açılır ve aynı değişkenli katsayılar eşitlenerek C_2 , C_1 cinsinden ; C_4 de C_3 cinsinden (ya da tam tersi) yazılır.*
- **5. ADIM (HOMOJEN) :** *Sonuçlar homojen çözümde yerine koyulduğunda C_1 ve C_3 ye (ya da C_2 ve C_4 e) bağlı homojen çözüm elde edilir.Homojen denklem en son şu şekle dönüşür :*

○ *Kökler reel ise* : $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} e^{\alpha_1 t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} e^{\alpha_2 t}$

○ *Kökler katlı ise* : $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} e^{\alpha t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} t e^{\alpha t}$

○ *Kökler kompleks ise ($\alpha \mp ib$) :* $X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} e^{at} \cos bt + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} e^{at} \sin bt$

22-) DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN EIGEN KARAKTERİSTİK DENKLEMİ İLE ÇÖZÜMÜ - SAĞ TARAFLI (SAYFA:89)

►►► **Belirsiz Katsayılar Yöntemine göre ;**

- **1. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Öncelikle üstteki yöntemde gösterildiği gibi homojen çözüm bulunur.*
- **2. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Sonra sağ tarafa uygun özel çözüm tahminleri TABLO dan seçilir.Eğer özel çözüm iki tane ise tahminler ayrı ayrı yapılıp bulunan sonuçlar toplanır.Özel çözüm verilen denklemde yerine koyulur:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_{1ö} \\ x_{2ö} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1ö} \\ x_{2ö} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} Q(t)$$

- **3. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Burda matrislerin denklemleri açılır.Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki aynı değişkene sahip katsayılar eşitlenip özel çözüm tahmininin sabitleri bulunur.*
- **4. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Bulunan özel çözümle homojen çözüm toplanıp genel çözüm elde edilir:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{ö1} \\ x_{ö2} \end{bmatrix}$$

►►► **LSD Yöntemine göre ;**

- **1. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Öncelikle sağ tarafsız homojen çözüm bulunur.*
- **2. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Sonra bu homojen çözümde C_1 yerine $C_{1(t)}$' ; C_3 yerine $C_{3(t)}$' yazılıp verilen denklemin sağ tarafına eşitlenir.*
- **3. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Matrisler açıldığında çıkan iki denklemden C_1' ve C_3' bulunur.*
- **4. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *İntegraller alınarak $C_{1(t)}$ ve $C_{3(t)}$ bulunur (İntegralden gelen sabitler unutulmamalı)*
- **5. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** *Son olarak $C_{1(t)}$ homojen çözümdeki C_1 yerine ; $C_{3(t)}$ de C_3 yerine yazılarak genel çözüm bulunmuş olur.*

ÖRNEK :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}e^{8t}$$ *için genel çözümü bulunuz.*

ÇÖZÜM :

►►► Belirsiz Katsayılar Yöntemine göre ;

- **1. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Önce homojen çözümü buluruz:***
- **1. ADIM (HOMOJEN) :** ***(A- α I) matrisinin determinantı yazılıp sıfıra eşitlenir ve α_1 , α_2 , α_3 ... α_n kökleri bulunur :***

$$\begin{vmatrix} 4-\alpha & 8 \\ 2 & 4-\alpha \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha^2-8\alpha=0 \Rightarrow \alpha_1=0 \;\; \alpha_2=8 \text{ (kökler reel)}$$

- **2. ADIM (HOMOJEN) :** ***Homojen çözüm :*** $X_h=\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}e^{8t}$

- **3. ADIM (HOMOJEN) :** ***Şimdi bu homojen çözümü denkleme <u>sağ tarafsız</u> olarak koyarız.Yani denklemdeki*** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ***yerine***

$\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}e^{8t}\right)$ ***koyulur :***

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}e^{8t}\right)=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}e^{8t}\right)$$

- **4. ADIM (HOMOJEN) :** ***Sadece 1. elemanlar için matris açılıyor :***

$$\frac{d}{dt}(C_1+C_3.e^{8t})=4C_1+8C_2+4C_3.e^{8t}+8C_4.e^{8t} \;\;\Rightarrow\;\; 8C_3.e^{8t}=4C_1+8C_2+4C_3.e^{8t}+8C_4.e^{8t}$$

Aynı değişkenli katsayılar eşitleniyor :

$$8C_3=4C_3+8C_4 \;\;\Rightarrow\;\; C_3=2C_4$$
$$4C_1+8C_2=0 \;\;\Rightarrow\;\; C_1=-2C_2$$

- **5. ADIM (HOMOJEN) :** ***Sonuçlar homojen denklemde yeniden yazılır :***

$$X_h=\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix}=C_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}+C_4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{8t}$$

- **2. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Sağ tarafa (*** $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}e^{8t}$ ***) uygun özel çözüm tahmini yapılır:***

TABLO:

Denklemin Sağ Tarafı:	Kök Bu Değilse:	Özel Çözüm Tahmini:
$e^{\alpha x}$	α	$A\,.\,e^{\alpha x}$

Görüldüğü gibi özel çözüm tahminimiz ($\alpha=8$ ***) =*** $\begin{bmatrix} x_{1ö} \\ x_{1ö} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}e^{8t}$

Kökler içinde "8" bulunduğu için özel çözüm tahminini "t" ile çarparız → $\begin{bmatrix} x_{1ö} \\ x_{1ö} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}t\,e^{8t}$

Özel çözümü denklemde yerine yazarız : $\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}t.e^{8t}\right)=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}t.e^{8t}+\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}e^{8t}$

- **3. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Yukarıdaki matris denklemlerini açarız :***

$$\left.\begin{aligned} Ae^{8t}+8Ate^{8t}&=4Ate^{8t}+8Bte^{8t}+6e^{8t} \\ Be^{8t}+8Bte^{8t}&=2Ate^{8t}+4Bte^{8t}+3e^{8t} \end{aligned}\right\}$$ ***burdan A=6 ve B=3 bulunur.Böylece özel çözüm :*** $\begin{bmatrix} x_{1ö} \\ x_{2ö} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}t\,e^{8t}$

- **4. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Bulunan özel çözümle homojen çözüm toplanıp genel çözüm yazılır :***

$$\begin{bmatrix} x_{1g} \\ x_{2g} \end{bmatrix}=C_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}+C_4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{8t}+\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}te^{8t}$$

►►► **LSD Yöntemine göre ;**

- **1. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Homojen çözüm olarak yukarda bulunmuş olanı alalım.***

$$X_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{8t}$$

- **2. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Özel çözüm için homojendeki C_2, $C_{2(t)}$' olarak ; C_4, $C_{4(t)}$' olarak alınır ve sağ tarafa eşitlenir:***

$$C_2' \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_4' \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{8t} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} e^{8t}$$

- **3. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Matrisleri açıp çıkan iki denklemden C_2' ve C_4' nü buluruz:***

$$\left.\begin{aligned} -2C_2' + 2C_4'.e^{8t} &= 6e^{8t} \\ C_2' + \ C_4'.e^{8t} &= 3e^{8t} \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} C_4' = 3 \\ C_2' = 0 \end{pmatrix}$$

- **4. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***İntegraller alınarak $C_{2(t)}$ ve $C_{4(t)}$ bulunur:***

$$\int \frac{dC_4}{dt} = \int 3 \Rightarrow C_4(t) = 3t + C_5$$

$$\int \frac{dC_2}{dt} = \int 0 \Rightarrow C_2(t) = C_6$$

- **5. ADIM (SAĞ TARAFLI) :** ***Son olarak homojen çözümdeki C_2 yerine $C_{2(t)}$; C_4 yerine de $C_{4(t)}$ yazılarak genel çözüm elde edilir:***

$$X_g = \begin{bmatrix} x_{1g} \\ x_{2g} \end{bmatrix} = C_6 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (3t + C_5) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{8t} \Rightarrow C_6 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{8t} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} te^{8t}$$

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<**VİZE**>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>