



Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

DOÇ. DR. ZEHRA PINAR

Nümerik Yöntemler

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu yüzden bunların çözümleri için diğer bir yaklaşım da nümerik yöntemlerdir.

Sınır Değer Problemleri

$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklindeki n. mertebeden adi diferansiyel denklemin tanımlı olduğu aralıkta 2 veya daha fazla noktada toplam olarak n tane değeri biliniyorsa buna **Sınır Değer Problemi** denir.

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha, x'(a) = \beta \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer problemi $x_1 = x$ ve $x_2 = x'$ denerek aşağıdaki şekilde 1. derece bir denklem sistemine dönüştürülebilir.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 & x_1(a) = \alpha \\ x_2' = f(t, x, x') & x_2(a) = \beta \end{cases}$$

Bu şekilde problem kolayca çözülebilir.

Ancak, $\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha, x(b) = \beta \end{cases}$ şeklindeki problem için başlangıç değer problem yöntemleri uygun olmayacaktır. Bu problem tipik bir sınır değer problemidir.

Taylor Serisi Yöntemi

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi verilsin.

$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$ şeklinde bir özel çözüm alınsın. $x = x_0$ da $y(x_0)$, $y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ türevleri mevcutsa, diferansiyel denklemin çözümü seri yöntemiyle hesaplanabilir. Aranılan $y(x)$ fonksiyonu x_0 noktası civarında Taylor serisine açılırsa

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

veya $x = x_0 + h$ ise

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$

Serinin türev değerlerine bakacak olursak;

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = f'(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'$$

$$\begin{aligned} y''' &= f''(x, y) = [f_x(x, y) + f_y(x, y)y']' \\ &= f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y)y' + f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \\ &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \end{aligned}$$

Örnek.

$\frac{dy}{dx} = x - y$ ve $x_0 = 1, y_0 = 2$ başlangıç şartları veriliyor. $h = 0.2$ için Taylor serisini ilk 3 terime açarak y_1 ve y_2 değerlerini bulunuz.

$$y_1 = y(1.2) = y(1 + 0.2) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1)}{2!}(0.2)^2$$

$$y(1) = 2$$

$$y'(1) = 1 - 2 = -1$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y''(1) = 1 - (-1) = 2$$

$$y_1 = 2 - 1(0.2) + \frac{2}{2}(0.04) = 1.84$$

$$y_2 = y(1.4) = y(1.2 + 0.2) = y(1.2) + \frac{y'(1.2)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1.2)}{2!}(0.2)^2$$

$$y(1.2) = 1.84$$

$$y'(1.2) = 1.2 - 1.84 = -0.64$$

$$y''(1.2) = 1 - (-0.64) = 1.64$$

$$y_2 = 1.84 - 0.64(0.2) + \frac{1.64}{2}(0.04) = 2.04$$

Örnek.

$y' = t + 3\frac{y}{t}$, $y(1) = 0$ başlangıç değer problemi verilsin. $h = 0.2$ olmak üzere $y(1.2)$ değerini

Taylor seri yöntemi ile toplama 4 terim katarak bulunuz.

$$y(1.2) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1)}{2!}(0.2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(0.2)^3$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(1) = 1 + 3\frac{0}{1} = 1$$

$$y'' = 1 + 3\frac{y'}{t} - 3\frac{y}{t^2} \Rightarrow y''(1) = 1 + 3\frac{1}{1} - 3\frac{0}{1} = 4$$

$$y''' = 3\frac{y''}{t} - 6\frac{y'}{t^2} + 6\frac{y}{t^3} \Rightarrow y'''(1) = 3\frac{4}{1} - 6\frac{1}{1} + 6\frac{0}{1} = 6$$

$$y(1.2) = 0 + 1(0.2) + \frac{4}{2}(0.04) + \frac{6}{6}(0.008) = 0.288$$

Picard İterasyon Yöntemi

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi verilsin. $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx$

haline gelir. Bunun her iki yanını $[x_0, x]$ aralığında integre edersek;

$$\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ elde edilir. y' için ilk yaklaşım y yerine y_0 koymakla elde edilir.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$

Bunu y için verilen denklemde yerine koyup tekrar integre edersek

$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$ ikinci yaklaşımı elde ederiz. İşlem, bu yolla istenilen sayıda tekrar edilirse n . yaklaşım

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

olarak bulunur.

Örnek.

$y' = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin $x = 0.1$ 'deki çözümünü Picard yöntemi ile 3 iterasyonla bulunuz.

$$dy = (x + y)dx \Rightarrow \int_0^x dy = \int_0^x (x + y)dx \Rightarrow y(x) = y(0) + \int_0^x (x + y)dx$$

$$y_1 = y(0) + \int_0^x (x + y_0)dx = 1 + \int_0^x (x + 1)dx = 1 + \frac{x^2}{2} + x$$

$$y_2 = y(0) + \int_0^x (x + y_1)dx = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + \frac{x^2}{2})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3 = y(0) + \int_0^x (x + y_2)dx = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y(x) \cong y_3(x) \Rightarrow y(0.1) \cong y_3(0.1)$$

$$y_3(0.1) = 1 + (0.1) + (0.1)^2 + \frac{(0.1)^3}{3} + \frac{(0.1)^4}{24} = 1.11032$$

Tek Adım Yöntemleri

Bir $y' = f(x, y)$ başlangıç değer probleminin her bir adımıdaki çözümünü, bir önceki adımda verilenler yardımıyla yaklaşık olarak bulmayı sağlayan yöntemler, tek adım yöntemleri olarak adlandırılır.

Euler Yöntemi

Taylor serisinin ilk iki terimini alarak hesaplanan ve birinci mertebeden türevleri kapsayan açılım Euler yöntemidir. Bu yöntemde bir x_i noktasındaki bağımlı değişkenin değeri, önceki noktadan geçen bir doğru boyunca ekstrapolasyon ile bulunur.

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin $y(x_0 + h)$ değeri ;

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

şeklinde elde edilir.

$x_1 = x_0 + h$ alırsak,

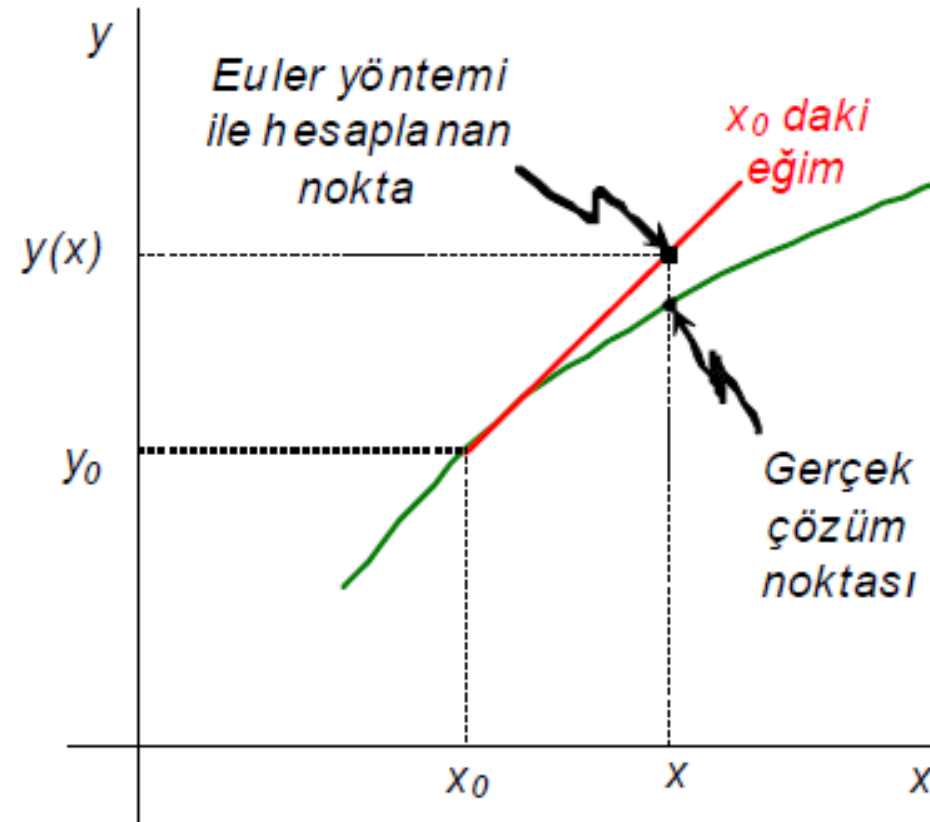
$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

$x_2 = x_0 + 2h$ alırsak,

$$y(x_2) = y(x_1) + hf(x_1, y_1)$$

şeklinde devam edersek ; $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ elde edilir.

Buradaki hata lokal hata olup, çok sayıda adım atıldıktan sonraki hata $O(h)$ mertebesinde olacaktır.



Örnek.

$y' = \frac{2x+y}{2y-x}$ ve $y(1) = 0$ başlangıç değer problemi veriliyor. $y(1.2)$ ve $y(1.4)$ değerlerini Euler yöntemi ile bulunuz.

$$f(x, y) = \frac{2x+y}{2y-x}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad h = 0.2$$

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0) \Rightarrow y(1.2) = y(1) + (0.2)f(1, 0)$$

$$\Rightarrow y(1.2) = 0 + (0.2) \frac{2(1)+0}{2(0)-1} = -0.4$$

$$y(x_2) = y(x_1) + hf(x_1, y_1) \Rightarrow y(1.4) = y(1.2) + (0.2)f(1.2, -0.4)$$

$$\Rightarrow y(1.4) = -0.4 + (0.2) \frac{2(1.2)-0.4}{2(-0.4)-1.2} = -0.6$$

Örnek.

$y' = x + 3\frac{y}{x}$ ve $y(1) = 0$ başlangıç değer problemi ve $h = 0.2$ veriliyor.

a) $y(1.2)$ değerini 4 terime açarak Taylor seri yöntemi ile

b) $y(1.4)$ değerini Euler yöntemi ile bulunuz.

$$a) \quad y(1.2) = y(1) + y'(1)(0.2) + \frac{y''(1)}{2!}(0.2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(0.2)^3$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(1) = 1$$

$$y'' = 1 + 3\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right) \Rightarrow y''(1) = 4$$

$$y''' = 3\left(\frac{y''x - y'}{x^2} - \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}\right) \Rightarrow y'''(1) = 6$$

$$y_1 = y(1.2) = 0 + 1(0.2) + \frac{4}{2}(0.04) + \frac{6}{6}(0.008) = 0.288$$

$$b) \quad y_2 = y_1 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y(1.4) = 0.288 + (0.2)\left(1.2 + 3\frac{0.288}{1.2}\right) = 0.672$$

Örnek.

$y' + y = 3x$ ve $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi verilsin. $h = 0.2$ için $[0,1]$ aralığındaki değerleri Euler yöntemi ile hesaplayınız.

$$y' = f(x, y) = 3x - y$$

$$f(0.2) = y(0) + (0.2)f(0,1) = 1 + (0.2)(3(0) - 1) = 0.8$$

$$f(0.4) = y(0.2) + (0.2)f(0.2, 0.8) = 0.8 + (0.2)(3(0.2) - 0.8) = 0.76$$

$$f(0.6) = y(0.4) + (0.2)f(0.4, 0.76) = 0.76 + (0.2)(3(0.4) - 0.76) = 0.848$$

$$f(0.8) = y(0.6) + (0.2)f(0.6, 0.848) = 0.848 + (0.2)(3(0.6) - 0.848) = 1.0384$$

$$f(1) = y(0.8) + (0.2)f(0.8, 1.384) = 1.0384 + (0.2)(3(0.8) - 1.0384) = 1.31072$$

Örnek

$$\begin{aligned}y' &= y + \frac{xy^2}{10} \\ y(0) &= 2\end{aligned}$$

BDP nin $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ noktalarındaki gerçek ve yaklaşık çözümlerini bulup yüzdelik hatayı elde ediniz.

Çözüm Öncelikle gerçek çözümü bulalım (Bernoulli denklemi):

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^2} &= \frac{y}{y^2} + \frac{x}{10} \Rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow \\ -z' &= z + \frac{x}{10}\end{aligned}$$

homojen kısmın çözümü

$$z = c(x) e^{-x}$$

homojen olmayan kısmın çözümleri olmak üzere

$$-c'(x) e^{-x} + c(x) e^{-x} = \frac{x}{10} + c(x) e^{-x} \Rightarrow c'(x) = -\frac{x}{10} e^x \Rightarrow c(x) = -\int \frac{x}{10} e^x dx$$

$$c(x) = -\frac{1}{10} x e^x + \frac{1}{10} e^x + c_1 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{1}{10} x + \frac{1}{10} + c_1 e^{-x} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{10} x + \frac{1}{10} + c_1 e^{-x} \right)^{-1}$$

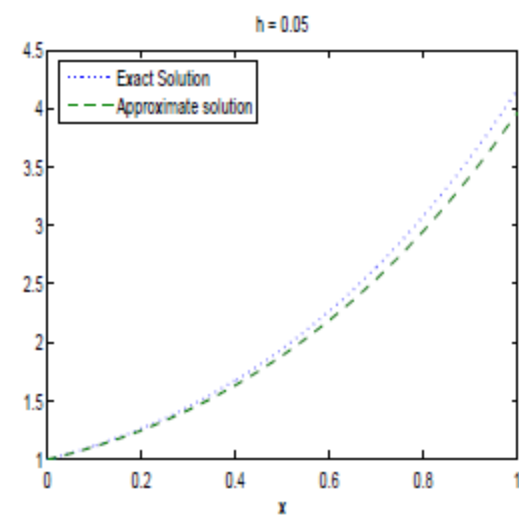
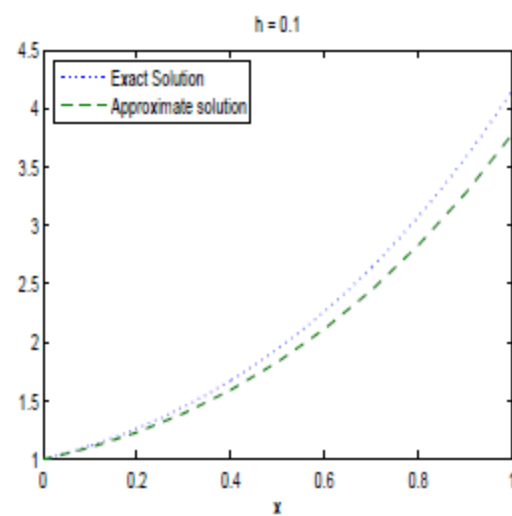
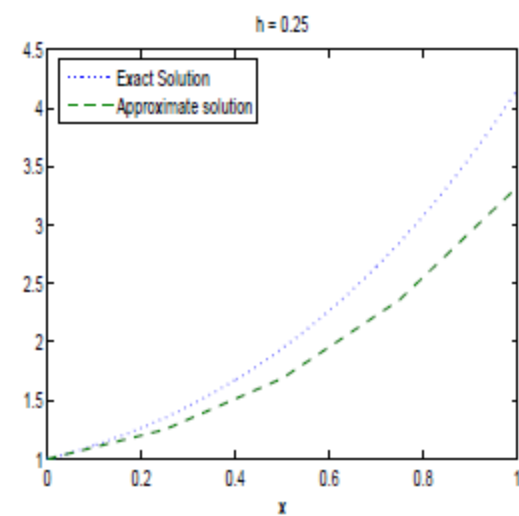
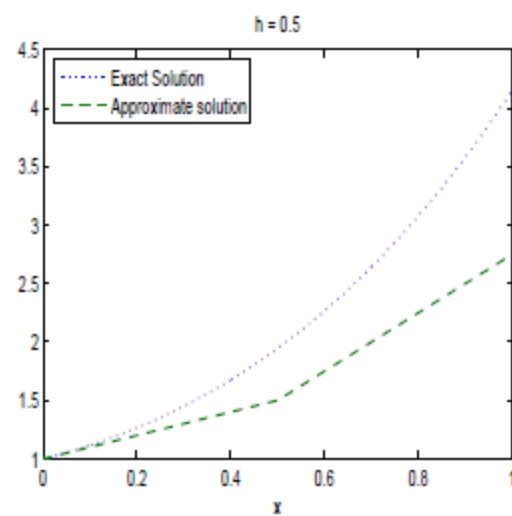
$y(0) = 2$ koşulundan

$$c_1 = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$y = \varphi(x) = \left(-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}e^{-x} \right)^{-1}$$
$$\varphi(0.1)$$

fonksiyonu gerçek çözümdür. $h = 0.1$, $f(x, y) = y + \frac{xy^2}{10}$

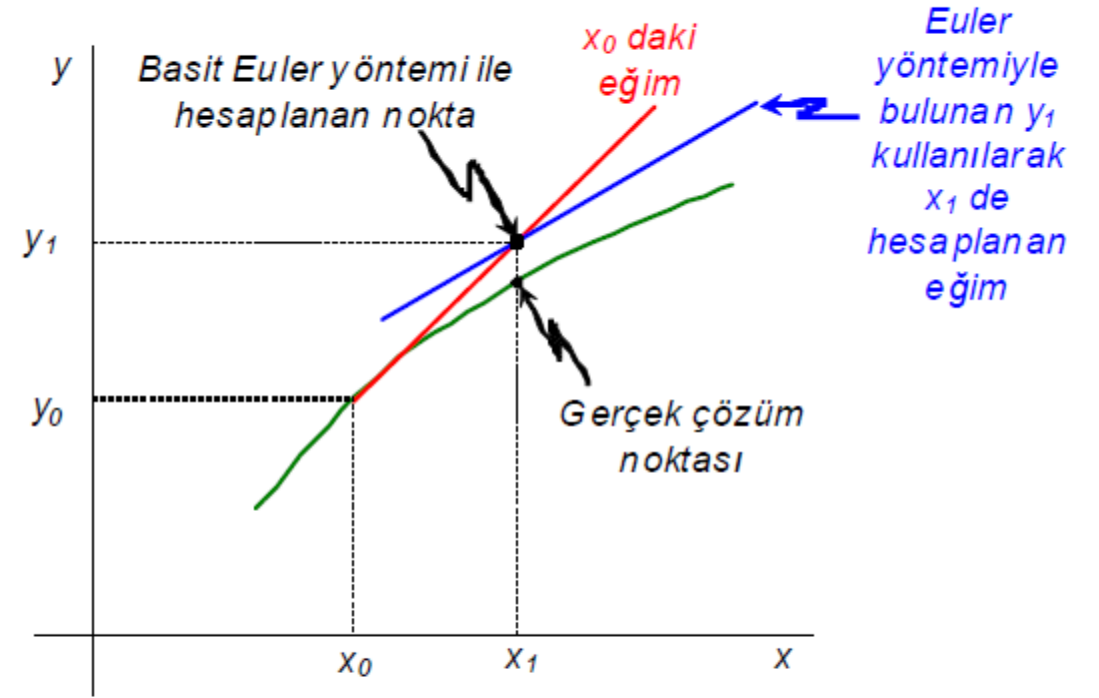
x_n	Kesin çözüm	Yaklaşık çözüm	$\% \delta \varphi$
0	2	2	0
0.1	2,2127	2,2	0,57431
0.2	2,454	2,4248	1,1896
0.3	2,7298	2,6791	1,8579
0.4	2,7298	2,9685	2,5944
0.5	3,4175	3,3006	3,4196
0.6	3,8532	3,6852	4,361
0.7	4,3738	4,1352	5,4562
0.8	5,0067	4,6684	6,7579
0.9	5,7928	5,3096	8,3423
1	6,7957	6,0942	10,322



Basit Euler yönteminin iyileştirilmesi

Çoğu basit yöntemin sorunu adım uzunluğunun son derece küçük olmasına gereksinim duyulması ve büyük adım uzunluğunda yeterince doğru sonuç vermemesidir. Şekilde basit Euler yönteminin küçük bir ilave çabayla nasıl bir miktar iyileştirilebileceği görülmektedir.

Euler yönteminde x_0 başlangıç noktasında hesaplanan birinci dereceden türev aslında gerçek fonsiyonun temsil ettiği eğrinin bu noktadaki teğetidir. Bu teğet üzerinde x doğrultusunda h kadar ilerlenerek bulunan y_1 noktası, h adımının büyüklüğüne bağlı olarak eğrinin uzağına düşmektedir. Bu noktayı eğriye yaklaştırmamız, yani daha doğru çözüm elde etmenin bir yolu x_0 daki türev yerine ortalama bir türev kullanmaktır.



Euler yönteminde iyileştirme herhangi bir x_n noktasındaki eğim yerine, bununla bir sonraki x_{n+1} noktasında elde edilecek türevin ortalamasını kullanarak

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

şeklinde yapılabilir. Ancak formülün bu şekilde doğrudan uygulanması mümkün değildir. Zira buradaki y'_{n+1} türevi x_{n+1} noktasındaki türev olup, türevin değeri aynı zamanda y_{n+1} büyüklüğüne bağlı olabilir ki çözümün bu aşamasında henüz y_{n+1} bilinmemektedir. Dolayısıyla çözüm iki aşamada gerçekleştirilecektir. Birinci aşamada basit Euler yöntemi ile yaklaşık bir y_{n+1} değeri elde edilecek, bu değer ve x_{n+1} birlikte kullanılarak y'_{n+1} türevi hesaplanacak, daha sonra formülüyle y_{n+1} in yeni değeri hesaplanacaktır.

Aslında bu yöntemin birinci aşamasında elde edilen y_{n+1} değeri hata içerdiğinden bunun kullanılmasıyla elde edilen y'_{n+1} türevi de bir miktar hatalı olacaktır. Dolayısıyla ortalama türevle yapılan hesaplamada da hata söz konusu olacaktır. Ancak basit Euler yöntemine kıyasla bu hata daha küçük olacaktır.

Ortalama türevle elde edilen y'_{n+1} değeri tekrar kullanılarak türevin yeniden hesaplanması ve bunun da bir önce hesaplanan türevle ortalaması alınarak y_{n+1} değeri için daha iyi bir tahmin yapılması, hatta bu işlemin iteratif olarak devam ettirilerek çözümün çok daha iyileştirilmesi mümkündür.

Düzeltilmiş Euler ve Huen Yöntemi

Bu yöntemde sadece birinci adımda eğri üzerindeki bir noktadan başlanır. Daha sonraki adımlarda hep eğrinin dışında olan noktalarda hareket söz konusu olduğundan başlangıç noktasından uzaklaştıkça hataların büyüyeceği açıktır. Bu hataları bir miktar gidermek için integral hesaptan faydalanarak değişik formüller kullanılır.

- 1) $y_{i+1} = y_i + hf_i$ (Basit Euler Formülü)
- 2) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f_i)$ (Euler Orta Nokta Formülü)
- 3) $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_i + f(x_i + h, y_i + hf_i)]$ (Euler Yamuk Formülü-Huen Yöntemi)

Örnek.

$y' = y - t^2 + 1$ ve $y(0) = 0.5$ başlangıç değer probleminin $t = 0.2$ deki çözümünü

- a) Euler Orta Nokta formülü ile
- b) Euler Yamuk formülü ile bulunuz.

a) $f(t, y) = y - t^2 + 1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0.5$, $h = 0.2$

$$y_1 = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_0)$$

$$f_0 = f(0, 0.5) = 0.5 - 0 + 1 = 1.5$$

$$y_1 = 0.5 + (0.2)f(0 + \frac{0.2}{2}, 0.5 + \frac{0.2}{2}1.5) = 0.5 + (0.2)f(0.1, 0.65) = 0.828$$

b) $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f_0 + f(t_0 + h, y_0 + hf_0)]$

$$y_1 = 0.5 + \frac{0.2}{2}[1.5 + f(0.2, 0.5 + 0.2(1.5))] = 0.826$$

Runge-Kutta Yöntemleri

a) II. Mertebe Runge-Kutta :

Runge-Kutta yöntemleri yüksek mertebeden türevleri hesaplamaya katmadan, Taylor serisi temelinde geliştirilen yöntemlerin, istenen eğim değerinin doğruluğunun belirlenmesi esasına dayanır.

Alman matematikçiler Runge ve Kutta Taylor serisinde ikiden fazla terim alarak Euler yönteminin daha da iyileştirilebileceğini görmüşlerdir. İyileştirilmiş Euler yöntemi ikinci dereceden bir Runge-Kutta yöntemidir.

$y' = f(x, y)$ ve $y(x_i) = y_i$ verilmiş olsun. $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere x_{i+1} noktasındaki $y(x_{i+1}) \cong y_{i+1}$ çözümü,

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1) \text{ olmak üzere}$$

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 \quad (1)$$

şeklinde bulunur.

Burada a, b ve m sabittirlerdir. $y(x)$ fonksiyonunu 2.mertebeden türevli terimlere kadar Taylor serisine açarsak

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2$$

$x = x_{i+1}$ alırsak ve $y''(x_i)$ yerine $f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)$ yazarsak,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (2)$$

elde edilir.

$$f(x_i + mh, y_i + mk_1) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}mh + \frac{\partial f}{\partial y}mk_1$$

olacağından

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1) = h \left[f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}mh + \frac{\partial f}{\partial y}mk_1 \right] = hf(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y}mhk_1$$

$k_1 = hf(x_i, y_i)$ ve $k_2 = hf(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y}mhk_1$ değerlerini (1) de yerine yazarsak ;

$$y_{i+1} = y_i + ahf(x_i, y_i) + b \left[hf(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y}mhk_1 \right]$$

$$y_{i+1} - y_i = (a+b)hf(x_i, y_i) + bmh \left[h \frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right] \quad (3)$$

(2) ile (3) ü birbirine eşitlersek ;

$$\begin{aligned} & f(x_i, y_i)h + \left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i) \right] \frac{h^2}{2} \\ &= (a+b)hf(x_i, y_i) + bmh^2 \left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i) \right] \end{aligned}$$

Buradan $a+b=1$ ve $bm = \frac{1}{2}$ denklemleri çıkar. İki denklem ve üç bilinmeyen olduğundan biri keyfi sabit olarak seçilir.

$m=1$ alınırsa $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ olur. Bu durumda,

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{aligned} \right\} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

olarak bulunur.

b) IV. Mertebe Runge-Kutta :

Taylor serisine 4.mertebeden türevleri de eklersek

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + nh, y_i + nk_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + rh, y_i + rk_3)$$

olmak üzere

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \text{ şeklinde bulunur.}$$

a, b, c, d, m, n ve r değerlerini hesaplamak istersek, yedi bilinmeyenli, yediden az denklem ile lineer ya da lineer olmayan denklem sistemi ortaya çıkar.

$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}, r = 1, a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ ve $d = \frac{1}{6}$ olarak seçersek ;

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

olarak bulunur.

Örnek.

$y' = -xy^2$ ve $y(2) = 1$ başlangıç değer problemi veriliyor. $h = 0.1$ için 2.mertebe Runge-Kutta ile çözüünüz.

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.1)f(2, 1) = (0.1)(-2(1)) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = (0.1)f(2.1, 0.8) = (0.1)(-2.1(0.8)^2) = -0.1344$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.2 - 0.1344) = 0.8328$$

Örnek.

$y' + y = 3x$ ve $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi verilsin. $x = 0.2$ deki çözümü 2. ve 4. mertebeden Runge-Kutta ile çözünüz.

2.mertebe :

$$y' = f(x, y) = 3x - y$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.2)f(0, 1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = (0.2)f(0.2, -0.8) = -0.04$$

$$y(0.2) = y(0) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.2 - 0.04) = 0.88$$

4.mertebe :

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.2)f(0, 1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = (0.2)(3(0.1) - 0.8) = -0.1$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = (0.2)(3(0.1) - 0.95) = -0.13$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = (0.2)(3(0.2) - 0.87) = -0.054$$

$$y(0.2) = y(0) + \frac{1}{6}[-0.2 + 2(-0.1) + 2(-0.13) - 0.054] = 0.881$$