2
Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

Doç. Dr. Zehra PINAR

Kaynaklar:

- Samim Dündar, İleri Matematik Ders Notları.
- Mehmet Sezer ve Ayşegül Daşçıoğlu (2014), Diferansiyel Denklemler 1, Dora Yayın.
- Steven Holzner (2008), Differential Equations for Dummies, Wiley Publishing.
- Richard Bronson (2003), Differential Equations, McGraw Hill.

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem aşağıdaki formalarda yazılabilir:

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0 \quad \text{veya} \quad F(y,x,\frac{dx}{dy})=0$$

Bu bölümde bu tip denklemlerin yalnız birinci dereceden olanlarının, kapalı formadaki $g(x,y,c)=0$ ve açık formadaki $y=\phi(x,c)$ veya $x=\psi(y,c)$ genel çözümlerini elde etme yöntemleri verilecektir.

Bu tipteki diferansiyel denklemler $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ veya $\frac{dx}{dy}=h(x,y)$

Türev formlarında ya da $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel

formunda elde edilebilir.

2.1. Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ şeklindeki bir diferansiyel denklem

$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ şeklinde veya türev formunda

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ olarak yazılabiliyorsa böyle bir denkleme değişkenlerine ayrılabilen denklem denir.

Çözüm yöntemi: Bu tip denklemler uygun çarpanlarla çarpılarak

$A(x)dx + B(y)dy = 0$ Formunda bir diferansiyel denkleme dönüştürülür. Artık denklemin her iki tarafının integrali alınabilir ve böylece genel çözüm

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = \int d(c) \Rightarrow F(x) + G(y) = c$$

Her integral için ayrı sabit almaya gerek yoktur. Çünkü c keyfi bir sabittir ve farklı keyfi sabitlerin birleşimi tek bir keyfi sabit ile ifade edilebilir.

ÖRNEK

$(x + y^2 x)dx - (y + x^2 y)dy = 0$ **denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$(x + y^2 x)dx = (y + x^2 y)dy$ şeklinde yazıp ortak paranteze alalım.

$x(y^2 + 1)dx = y(x^2 + 1)dy$ elde ederiz. Düzenleme yaparsak

$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{y}{1+y^2}dy$ integre edersek

$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy$

$\frac{1}{2}ln|1 + x^2| = \frac{1}{2}ln|1 + y^2| + \frac{1}{2}ln|c|$ buradan $\frac{1+x^2}{1+y^2} = c$ olarak genel çözümü bulunur.

ÖRNEK

$y' + x = xy^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{dy}{dx} + x = xy^2$ yazılabilir. Denklemi düzenlersek;

$\frac{dy}{dx} = x(y^2 - 1)$

$\frac{dy}{y^2-1} = dx.x$ Elde edilir. İntegre edersek

$\frac{1}{2} ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c\,,\ \ y \notin [-1,1]$ buradan da $ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - x^2 = c$ bulunur.

$\frac{y-1}{y+1} . e^{-x^2} = c$ olarak genel çözüm bulunur.

ÖRNEK

$(\sin y)y' - \cos(x)^2 = 0$ **denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)^2}{\sin x} \rightarrow dy.\sin y = \cos(x)^2\, dx$

$-\cos y = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ bulunur.

Düzenleme yaparsak;

$$\cos y + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) = c$$

elde edilir.

ÖRNEK

$tanx dx + y\cos(x)^2\, dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$tanx dx = -y\cos(x)^2\, dy$ buradan;

$$\frac{tanx\ dx}{\cos(x)^2} = -ydy \ \rightarrow \ \frac{\frac{sinx}{cosx}}{cos^2x}dx = -ydy$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{sinx}{cos^3x}dx = -ydy$$

integre edersek

$$-\int d(cosx)\frac{1}{cos^3x} = -\int ydy$$

buradan da

$$\frac{1}{2}\frac{1}{cos^2x} = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}c$$

bulunur. Yani $c = tan^2x + y^2$ olarak genel çözüm bulunur.

Soru 1: $x\tan y dx + (x^2+1)dy = 0; \quad y(1) = \pi/2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Cevap 1: $(x^2+1)\sin^2 y = 2$

Soru 2: $y' + y\cos(x) = 0$

Cevap 2: $y = ce^{-\sin x}$

2.2. Homojen Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde incelenen diferansiyel denklemler değişkenlerine ayrılabilir hale indirgenerek çözülürler.

Homojen Fonksiyon: Bir f(x,y) fonksiyonunda, x yerine λx ve y yerine λy konulduğunda $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y) \quad p \in R$ oluyorsa, fonksiyona p. Dereceden homojendir denir.

Not 1 : f fonksiyonu y/x 'in (veya x/y 'nin) bir fonksiyonu ise

$f(\lambda y/\lambda x) = \lambda^0 f(x,y)$ koşulu sağlandığından fonksiyon

sıfırıncı dereceden homojendir.

Not 2 : Bir çok durumda fonksiyonun homojenliği her bir terimin toplam derecesinden fark edilebilir. Homojen fonksiyonlarda her terimin toplam derecesi aynı olmalıdır.

Homojen Diferansiyel Denklem: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

diferansiyel denkleminde eğer M(x,y) ve N(x,y) fonksiyonlarının her ikisi de aynı dereceden homojen iseler veya denklem türev formunda $y' = f(x,y) \equiv g(y/x) \quad (veya\ g(x/y))$ şeklinde

ifade edilebiliyorsa, diğer bir deyişle f(x,y) sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyonsa , diferansiyel denkleme homojendir denir.

Teorem: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemi homojen ise $y=ux$ veya $x=vy$ değişken değişimi ile değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüşür.

İspat:

$Mdx+Ndy=0$ diferansiyel denklemi homojen olduğuna göre tanım gereği $dy/dx=g(y/x)$ formunda yazılabilir.

$y=ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ ifadelerini $\dfrac{dy}{dx}=g(y/x)$ yerine

yazarsak $u+x\dfrac{du}{dx}=g(u) \Rightarrow (u-g(u))dx+xdu=0$

ifadesi değişkenlerine ayrılabilir şekilde çözülebilir.

ÖRNEK

$(3x+2y)dx+2xdy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{3x+2y}{2x}=-\frac{dy}{dx}$ diyebiliriz. $y=vx$ ise $y'=v'x+v$

$\frac{3x+2vx}{2x}=-v'x-v$ elde edilir.

$$\frac{3+2v}{2}=-v'x-v \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}+v+v=-\frac{dv}{dx}.x$$

düzenleme yaparsak

$$-\left(\frac{3}{2}+2v\right)dv=\frac{dx}{x}$$

bulunur.

Buradan

$$-\frac{3}{2}v - v^2 = lnx - c$$

$$v^2 + \frac{3v}{2} + lnx = c$$

elde edilir. $y = vx \quad \rightarrow v = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa;

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{\frac{3}{2}y}{x} + lnx = c$$

sonucuna varılır. Bu da denklemin genel çözümüdür.

ÖRNEK

$xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$v = \frac{y}{x}$ yani $y = vx$, $y' = v'x + v$

$x(v'x + v) - vx = xe^{v}$

$\cancel{x}(v'x + v) = \cancel{x}e^{v} + v\cancel{x}$

$v'x + \cancel{v} = e^{v} + \cancel{v}$

$\frac{dv}{dx}x = e^{v} \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dv\, e^{-v}$ bulunur. Ayrılabilir halde olduğundan integre edersek

$lnx = -e^{-v} + c \qquad v = \frac{y}{x}$ 'i yerine yazarsak

$lnx + e^{-\frac{y}{x}} = c$ elde ederiz.

Soru 1: $xy\frac{dy}{dx}=y^2+x^2e^{y/x}$ Cevap 1: $-\frac{y}{x}e^{-y/x}-e^{-y/x}-Inx=c$

Soru 2: $xdy-(y+\sqrt{x^2+y^2})dx=0$ Cevap 2: $\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}=cx$

2.3. Homojen Hale İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$ $,a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2$ sabit formundadır.

sabit formundadır. Denkleminin homojen olabilmesi için $c_1=c_2=0$ olmalıdır. Eğer bu sabitlerden biri sıfırdan farklı ise çözüm şu üç durumda incelenebilir:

1.Durum: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\lambda$ ise denklem $\frac{dy}{dx}=g(\lambda)$ şeklini alır ki

bu denklemin çözümü $y=g(\lambda)x+c$ 'dir.

2.Durum: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ise denklem aslında $\frac{dy}{dx}=F(ax+by)$

formundadır ki bu da $z=ax+by$ dönüşümüyle değişkenlerine

ayrılabilir hale gelir.

3.Durum: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ise denklem $x=u+h,\ y=v+k$ dönüşümüyle

daima homojen hale indirgenebilir. Dönüşüm uygulandığında denklemin homojen olabilmesi için

$a_1h+b_1k+c_1=0,\quad a_2h+b_2k+c_2=0$ olmalıdır. Böylece denklem

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$$

Benzer şekilde aşağıdaki denklem modellerine yanlarına yazılı dönüşümler uygulanarak bir ayrılabilir diferansiyel denklem elde edilir:

- Denklem $xf(xy)dx + yf(xy)dy = 0$ modeline ise $xy = v(x)$ dönüşümü
- Denklem $y' = \frac{y}{x} f(x^k y^t)$ modeline ise $x^t y^k = v(x)$ dönüşümü
- Denklem $y' = \frac{y}{x} + g(x) f(\frac{y}{x})$ modeline ise $\frac{y}{x} = v(x)$ dönüşümü
- Denklem $xy' + ay = f(x) g(x^k y)$ modeline ise $x^k y = v(x)$ dönüşümü

ÖRNEK

$(x-2y+1)dx+(4x-3y-6)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{1}{4}=\frac{-2}{-3}$ ➔ $x=X+3$, $dX=dx$, $y=Y+2$, $dy=dY$

Dönüşümünü kullanırsak

$$h-2k=-1$$

$$4h-3k=6$$

Denklemlerinden $h=3$ ve $k=2$ *elde* ederiz.

Denklemde yerlerine yazarsak;

$$(x+3-2y-4+1)dX+(4x+12-3y-6-6)dY=0$$

elde edilir. Buradan da $(X-2Y)dX+(4X-3Y)dY=0$ homojen denklemi ortaya çıkar. Düzenlersek;

$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y-X}{4X-3Y}$, $Y=VX$ dönüşümü yapabiliriz.

$V'X=\frac{2V-1}{4-V}-V=\frac{3V^2-2V-1}{4-3V}$ bulunur. Yine düzenlersek

$\frac{4-3V}{3V^2-2V-1}dV=\frac{dX}{X}$ bulunur. İntegre edersek

$\int\frac{4-3V}{(3V+1)(V-1)}dV=\int\frac{dX}{X}$ ➔ $-\frac{15}{4}\int\frac{dV}{3V+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dV}{V-1}=\int\frac{dX}{X}$ bulunur.

$$-\frac{5}{4}ln|3V+1|+\frac{1}{4}ln|V-1| = ln|x| + ln|C|$$

denkleminden de $\frac{V-1}{(3V+1)^5} = cx^4$ elde edilir. $V = \frac{Y}{X}$ ve daha sonra $x = X + 3$ ve $y = Y + 2$ yerine yazılırsa

$\frac{\frac{Y}{X}-1}{\left(\frac{3Y}{X}+1\right)^5} = cX^2 \rightarrow \frac{\frac{y-2}{x-3}-1}{\frac{3(y-2)}{x-3}+1} = c(x-3)^4$ bulunur.

ÖRNEK

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{3})\boldsymbol{dx}+(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{y}-\mathbf{1})\boldsymbol{dy}=\mathbf{0}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$\big((x+2y)+3\big)dx+\big(2(x+2y)-1\big)dy=0$ olarak düzenlenebilir.

$z=x+2y \Rightarrow d\,z= dx+2dy$ buradan dy 'yi çekersek $\frac{dz-dx}{2}=dy$ bulunur.

$$(z+3)dx+\frac{(2z-1)(dz-dx)}{2}=0$$

$$\left(z+3-z+\frac{1}{2}\right)dx+\left(z-\frac{1}{2}\right)dz=0$$

$$\frac{7}{2}dx+\left(z-\frac{1}{2}\right)dz=0 \Rightarrow \frac{7}{2}x+\frac{z^2}{2}-\frac{7}{2}=c$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $7x+(x+2y)^2-(x+2y)=c$ bulunur.

ÖRNEK

$y' = (y - x + 1)^{\frac{1}{2}}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$y - x + 1 = u$ ➔ $u' = y' - 1$, $y' = u' + 1$ bulunur.

$$u' + 1 = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} + 1 = \sqrt{u}$$

$\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{u}$

$dx = \frac{du}{\sqrt{u}-1}$ ➔ $\int dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}-1}$

$\int \frac{du}{(\sqrt{u}-1)}$, $u = t^2, du = dt.2t$ ➔ $\int \frac{2tdt}{t-1} = 2\int \frac{t}{t-1} dt$,

$t - 1 = v$, $v + 1 = t$, $dv = dt$,

$$2\int\left(1+\frac{1}{v}\right)dv = 2(v+lnv) = 2(t-1+\ln(t-1)) = 2\left(\sqrt{u}-1+\ln\left(\sqrt{u}-1\right)\right)$$

$$x = 2\left(\sqrt{u}-1+\ln\left(\sqrt{u}-1\right)\right)+2c$$

$$\frac{x}{2} = (\sqrt{y-x+1}-1+\ln(y-x)+c$$

olarak genel çözüm bulunur.

ÖRNEK

$y' = (x + y - 5)^2$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$x + y - 5 = v(x)$ ise $1 + y' = v' \rightarrow y' = v' - 1$

$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2 \rightarrow v' = v^2 + 1$ bulunur. Buradan da;

$\frac{dv}{v^2+1} = dx$ ve $\arctan(v) = x + c$ elde ederiz. Sonuç olarak $\arctan(x + y - 5) = x + c$ olarak bulunur.

Soru 1: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 1}$

Cevap 1: $4x + 2y + 3(2x + y + 1/5) = 25x + 25c$

Soru 2: $(7x - 3y - 7)dx + (3x - 7y - 3)dy = 0$

Cevap 2: $(\frac{x-1}{y} - 1)^2 + (\frac{x-1}{y} + 1)^5 = cy^{-7}$

2.4. Tam Diferansiyel Denklemler

Toplam Diferansiyel: u=u(x,y) iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere bir D bölgesinde sürekli ve türevli olsun.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ifadesine u fonksiyonunun toplam diferansiyeli denir.

Tam Diferansiyel Denklem: Eğer $\forall(x,y) \in D$ için $\boldsymbol{M(x,y)dx +} \ \mathbf{N}\boldsymbol{(x,y)dy = 0}$ ifadesi, du(x,y) toplam diferansiyeline eşit olacak şekilde iki reel değişkenli bir u fonksiyonu varsa bu ifadeye D bölgesinde bir tam diferansiyel denir.

Tam Diferansiyel Olma Testi: $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ iken ve Swartz teoremi $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)$ biliniyorken $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olmalıdır.

Çözüm Yöntemi: Amaç M ve N belliyken, her ikisini birden sağlayan u fonksiyonunu bulmaktır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + f(y) \qquad (1)$$

Burada f(y) integrasyon sabitidir ve çözüm için bulunmalıdır. O halde yukarıdaki eşitliğin y 'e göre türevi alınıp N ile eşitleyelim.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\partial x + f(y)\right]$$

f(y) 'nin bulunmasının ardından (1) 'de yerine konularak çözüm bulunur.

ÖRNEK

$(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$2x+y=P(x,y)$, $x-2y=Q(x,y)$ diyebiliriz.

$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir.

Tanım gereği

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2x+y$$

olacak şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonu vardır.

$\int \frac{\partial F}{\partial x}dx=\int(2x+y)dx \rightarrow F(x,y)=x^2+xy+\varphi(y)$ elde edilir Aynı $F(x,y)$ fonksiyonunun y'ye göre kısmi türevinin $(x-2y)$ olduğunu biliyoruz, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x+\varphi'(y)$.

Denklemde $F(x,y)$ sağlatılırsa, $x-2y=x+\varphi'(y)$ bulunur. Buradan da $\varphi'(y)=-2y$ elde edilir.

$\int \varphi'(y)\,dy=\int -2ydy \rightarrow \varphi(y)=-y^2+c$ olarak buluruz. $F(x,y)$'de yerine yazarsak $F(x,y)=x^2+xy-y^2+c$

$(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel denklem olduğunu biliyoruz dx ve dy çarpanlarını parantezin içerisine dağıtırsak;

$2xdx+ydx+xdy-2ydy=0$ elde ederiz.

İntegralin lineerlik özelliğinden yararlanarak tek tek integre edebiliriz.

$$\int 2x^2dx = x^2+c \ , \int -2ydy = -y^2+c \ , \ \int (ydx+xdy) = \int d(xy)$$

Bu denklemler de $d(x^2)+d(xy)-d(y^2)=0$ denklemini verir ve sonuç

$$x^2+xy-y^2=c$$

bulunur.

Soru 1: $(2xy^2 - y\sin x + 2x + 1)dx + (2x^2y + \cos x + y^{-1})dy = 0$

Cevap 1: $x^2y^2 + y\cos x + x^2 + x + Iny = c$

Soru 2: $(x^2y - x)dy + (xy^2 - y)dx = 0$

Cevap 2: $\dfrac{x^2y^2}{2} - yx = c$

2.5. Tam Hale İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemi tam değilse, fakat

$T(x,y)M(x,y)dx + T(x,y)N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemi tam ise

$T(x,y)$ fonksiyonuna verilen diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı

Çözüm Yöntemi:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \Rightarrow T(x) = e^{\int f(x)dx}$$

veya

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y) \Rightarrow T(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

$T \cdot M(x,y)dx + T \cdot N(x,y)dy = 0$ tam diferansiyel denklemdir.

Verilen diferansiyel denklemin yapısına bağlı olarak bulunabilen bazı integral çarpanı bulma yöntemlerini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

1. Eğer $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemi homojen ise $\mu(x,y) = \frac{1}{xM+yN}$ olur
2. Eğer $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklem $yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$ şeklinde yazılabilirse $\mu(x,y) = \frac{1}{xM-yN}$ olur.
3. Eğer $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = N.H(x) - M.K(y)$ olarak yazılabilirse $m(x) = e^{-\int H(x)dx}$ ve $n(y) = e^{-\int K(y)dy}$ Olmak üzere integrasyon çarpanı $\mu(x,y) = m(x)n(y)$ olarak bulunabilir.

ÖRNEK

$\left(ye^{-\frac{x}{y}}\right)dx-\left(xe^{-\frac{x}{y}}+y^3\right)dy=0$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$$M=\left(ye^{-\frac{x}{y}}\right),\ N=-\left(xe^{-\frac{x}{y}}+y^3\right) \quad\rightarrow\quad My=e^{-\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right),\ Nx=e^{-\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$

$My\neq Nx$ olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Fakat uygun bir integrasyon çarpanıyla tam diferansiyel denklem formuna getirilebilir.

$\frac{My-Nx}{-M}=\frac{2e^{-\frac{x}{y}}}{-ye^{-\frac{x}{y}}}=\frac{2}{-y}$ oldugundan $\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}=e^{-2lny}=\frac{1}{y^2}$ olarak bulunur.

$$\frac{1}{y^2}Mdx+\frac{1}{y^2}Ndy=\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}dx-\left(\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}+y\right)dy=0$$

$$P=\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y},\qquad Q=\left(-\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}-y\right)\ \text{olarak alalim.}$$

$Py=\frac{e^{-\frac{x}{y}}(x-y)}{y}=Qx$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y)dx = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}dx \quad \rightarrow \quad F(x,y) = -e^{-\frac{x}{y}} + \varphi(y) \quad \rightarrow \quad F(x,y)dy = -\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}} + \varphi'(y)$$

$$-\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}} - y \qquad \rightarrow \qquad \varphi'(y) = -y \quad \rightarrow \quad \int \varphi'(y)dy = \int -ydy$$

$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \rightarrow \quad F(x,y) = -e^{-\frac{x}{y}} - \frac{y^2}{2} - c = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}^{-\frac{x}{y}} + \frac{y^2}{2}$ olarak buluruz.

ÖRNEK

$(1+2xy)y' = (1+y^2)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)}{(1+2xy)} \rightarrow dy(1+2xy) = (1+y^2)dx \rightarrow (1+y^2)dx + (-1-2xy)dy = 0$$

$$M = (1+y^2), \qquad N = -1-2xy$$

$$My = 2y, \qquad Nx = -2y$$

$My - Nx = 4y \rightarrow My \neq Nx$ oldugundan tam diferansiyel denklem degildir.

Fakat bildiğimiz üzere uygun bir integral çarpanı bulup denklemde çarparsak denklemi tam diferansiyel denklem haline dönüştürebiliriz.

$$\frac{My - Nx}{-M} = -\frac{4y}{(1+y^2)} \rightarrow \mu = e^{-2\int\left(\frac{2y}{(1+y^2)}\right)dy} = e^{-2\ln +y^2)} = \frac{1}{\left((1+y^2)\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left((1+y^2)\right)^2} Mdx + \frac{1}{\left((1+y^2)\right)^2} Ndy = \frac{1}{1+y^2}\,dx - \frac{1+2xy}{1+y^2}\,dy = 0$$

$$P = \frac{1}{1+y^2}, \qquad Q = \frac{-1-2xy}{(1+y^2)^2}$$

$$P = \frac{1}{1+y^2}, \qquad Q = \frac{-1-2xy}{(1+y^2)^2}$$

$$Py = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = Qx \text{ tam diferansiyel haline geldi}$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx - \frac{1}{(1+y^2)^2}dy - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{(1+y^2)} - \int \left(\frac{1}{(1+y^2)^2}\right)dy = c$$

Soru 1: $(y+xy^2)dx - xdy = 0, \quad y(1)=2$ denklemini çözünüz.

Cevap 1: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=c \quad , \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=1$

Soru 2: $xdy-(y-1+x^2)dx=0$

Cevap 2: $\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}-x+c$

2.6. Birinci Mertebeden Doğrusal Diferansiyel Denklemler

$\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ şeklinde olan denkleme birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem denir.

$g(x) = 0$ ise denklem değişkenlerine ayrılır ve çözülür.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + f(x)dx = 0$$

$$Iny + \int f(x)dx = Inc \Rightarrow y = ce^{-\int f(x)dx}$$

Eğer $g(x) \neq 0$ ise:

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ denklemini diferansiyel formunda yazarsak:

$(f(x)y - g(x))dx + dy = 0$ Tam olmayan bir denklemdir ve bir integrasyon çarpanını bulup tam hale getirerek çözebiliriz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f(x) \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \Rightarrow T(x) = e^{\int f(x)dx}$$

İntegral çarpanını ikinci eşitlik ile çarparak

$$e^{\int f(x)dx}(f(x)y - g(x))dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0$$

Tam diferansiyel denklemi elde edilir.

ÖRNEK

$y' = x - \frac{y}{x}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$y' + \frac{y}{x} = x \rightarrow y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = x$ elde edilir ve integrasyon çarpanı $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ bulunur.

$(yx)' = x.x$ integral alırsak $yx = \frac{x^3}{3} + c$ burdan da

$y = x^2.3^{-1} + cx^{-1}$ bulunur.

ÖRNEK

$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$y' + \left(-\frac{2xy}{1+x^2}\right) y = 1 + x^2$ buna göre integrasyon çarpanı

$\mu(x) = e^{\int -\frac{2xy}{1+x^2} dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$ elde edilir.

$\left(y\mu(x)\right)' = (1 + x^2)\mu(x) \rightarrow y\mu(x) = x + c$

$y = (1 + x^2)x + (1 + x^2)c$ bulunur.

ÖRNEK

$y' = \frac{1}{e^{-y}-x}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$\frac{dx}{dy} = e^{-y} - x$, $\frac{dx}{dy} + x = e^{-y}$ ve integrasyon çarpanı $\mu(y) = e^{\int dy} = e^{y}$ bulunur.

Buradan da

$$(xe^{y})' = e^{y}e^{-y} \rightarrow xe^{y} = y + c \rightarrow \boldsymbol{x = e^{-y}y + e^{-y}c}$$

bulunur.

ÖRNEK

$y' = \frac{y}{3x+y^2}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

Görüldüğü üzere verile denklem y'ye göre doğrusal değildir. Ancak $y_x = \frac{1}{x_y}$ olduğunu göz önüne alırsak

$\frac{1}{x'} = \frac{y}{3x+y^2}$ (Yani, $x = x(y)$ fonksiyonuna göre $x' - \frac{3}{y}x = y$ ve

$$x = e^{3lny}\left(\int y e^{-3lny}\,dy + c\right) \text{ ve } \boldsymbol{x = y^2(cy-1)}$$

olarak bulunur.

Soru 1: $\frac{dx}{dy} - 2y(x + e^{y^2}) = 0$

Cevap 1: $x = e^{y^2}(y^2 + c)$ veya $xe^{-y^2} = y^2 + c$

Soru 2: $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{x}y = \frac{1}{Inx}$

Cevap 2: $y = x(In(Inx) + c)$

2.7.Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklemler

2.7.1. Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1)$ şeklindeki diferansiyel denkleme

Bernoulli diferansiyel denklemi denir. n=0 olması halinde doğrusal diferansiyel denkleme, n=1 olması halinde ise değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denkleme dönüşür.

$h'(y)\dfrac{dy}{dx} + f(x)h(y) = g(x)$ diferansiyel denklemi de yine Bernoulli

diferansiyel denklemidir.

Çözüm Yöntemi: $\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \quad (n \in R,\ n \neq 0 \text{ ve } n \neq 1)$

$$y^{-n} / \frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n / y^{-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + f(x)y^{1-n} = g(x)$$

$y^{1-n} = u$ dönüşümü yapılırsa $(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{1}{1-n}\dfrac{du}{dx} + f(x)u = g(x)$ olur.

$\dfrac{du}{dx} + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x)$ doğrusal hale geldi.

$u = y^{1-n} = e^{(n-1)\int f(x)dx}\left(\int e^{(1-n)\int f(x)dx}(1-n)g(x)dx + c\right)$ çözümüne ulaşılır.

ÖRNEK

$\boldsymbol{y' + 4xy = 2e^{-x^2} y^{\frac{1}{2}}}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

Denklemi $y^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpıldığında $y^{-\frac{1}{2}} y' + 4xy^{\frac{1}{2}} = 2e^{-x^2}$ elde edilir.

$v = y^{\frac{1}{2}}$ ise $v' = y^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} . y'$, $y' = 2v' y^{\frac{1}{2}}$

ve yerine yazıldığında $2v' + 4vx = 2e^{-x^2}$ bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılıp düzenlersek

$v' + 2vx = e^{-x^2}$ (Lineer diferansiyel denklem)

$$\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2} \rightarrow \left(ve^{x^2}\right)' = e^{-x^2} e^{x^2}$$

$$ve^{x^2} = x + c \quad \rightarrow \quad v = e^{-x^2}(x + c) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \left(e^{x^2}(x + c)\right)^2}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK

$y' + y = -\frac{x^2+x}{y}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

$y' + y = -(x^2 + x)y^{-1}$ yazılır ve y ile çarpıldığında;

$yy' + y^2 = -(x^2 + x)$ olur. $v = y^2$ ise $v' = 2yy'$

$v' + 2v = -2(x^2 + x)$ olarak lineer diferansiyel denklem oluşturulur.

$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x} \rightarrow (ve^{2x})' = \frac{-(x^2+x)}{2}e^{2x}$ iki tarafı da integre edersek $ve^{2x} =$ $2(x^2 + x)e^{\frac{1}{2}x} - 4(2x + 1)e^{\frac{1}{2}x} + 16e^{\frac{1}{2}x} + c$ bulunur. Buradan da

$$v = 2(x^2 + x) - 4(2x + 1) + 16 + ce^{\frac{-x}{2}} \rightarrow y^{\frac{1}{2}} = 2x^2 - 6x + 12 + e^{\frac{-x}{2}} \;\; c$$

$$\boldsymbol{y = \left(2x^2 - 6x + 12 + e^{\frac{-x}{2}} \;\; c\right)^2}$$

olarak genel çözüm bulunmuş olur.

ÖRNEK

$xy' + y = y^2 \ln x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y^{-2}xy' + y^{-1} = \ln x$ olup $v = y^{-1}$ ise $y' = -v'y^2$

$-xv' + v = \ln x$ ve $v' - \frac{1}{x}v = \frac{\ln x}{x}$ lineer diferansiyel denklemi bulunur.

$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \rightarrow \left(\frac{v}{x}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2}$ elde edilir, $\frac{v}{x} = -\frac{\ln x+1}{x} + c$,

$v = -\ln x - 1 + xc$ olarak bulunur. $v = y^{-1}$ olduğunu düşünürsek;

$$\frac{1}{y} + \ln x + 1 = xc$$

olarak bulunur.

Soru 1: $$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1-x^2}y=xy^{1/2}$$

Cevap 1: $$y^{1/2}=(1-x^2)^{1/4}[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/4}+c]$$

Soru 2: $$\cos x\frac{dy}{dx}-y\sin x=y^4$$

Cevap 2: $$y^{-3}=(\cos^3 x)(-3\tan x-\tan^3 x+c)$$

veya

$$y^{-3}=(-3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+c\cos^3 x)$$

$$y=(\frac{1}{\sqrt[3]{-3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+c\cos^3 x}})$$

2.7.2. Riccati Diferansiyel Denklemi

R(x), P(x) ve Q(x) sürekli fonksiyonlar olmak üzere:

$$\frac{dy}{dx}+R(x)y^2+P(x)y+Q(x)=0$$

formundaki denklemlere Riccati diferansiyel denklemi denir. Q(x)=0 ise denklem Bernoulli ve R(x)=0 ise denklem doğrusal olur. Riccati denkleminin genel şekilde çözümünün olmadığı kanıtlanmıştır. Ancak denklemin herhangi bir özel çözümü $y_1(x)$ belli ise, denklemi Bernoulli veya doğrusal denkleme dönüştürerek genel çözüm bulunabilir.

Çözüm Yöntemi:

$y_1(x)$, Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. Riccati denklemi:

a) $y = y_1(x) + v(x)$ dönüşümü ile Bernoulli denklemine

b) $y = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$ dönüşümü ile doğrusal denkleme dönüşür.

ÖRNEK

$y' - \frac{3}{x}y - \frac{u}{x^2} = y^2$ diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y_1 = -\frac{2}{x}$ olan denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$y_r(x) = -\frac{2}{x} + u \quad \rightarrow \quad y^2 = u^2 + \frac{u}{x^2} - \frac{4u}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{2}{x^2} + u'$$

denklemleri elde edilir. Yerine yazıldığında;

$$\frac{2}{x^2} + u' + \frac{6}{x^2} - \frac{3u}{x} - \frac{4}{x^2} = u^2 + \frac{u}{x^2} - \frac{4u}{x}$$

$u' - \frac{3u}{x} = u^2 - \frac{4u}{x} \quad \rightarrow \quad u' + \left(\frac{1}{x}\right)u = u^2$ (Bernoulli diferansiyel denklemi)

denklemi u^{-2}ile çarparsak;

$u^{-2}u' + \left(\frac{1}{x}\right)u^{-1} = 1$ denklemi elde edilir. $v = u^{-1}$ ise $v' = -u^{-2}u'$, $u' = -v'u^2$

$-v' + \frac{1}{x}v = 1$, $v' - \frac{1}{x}v = 1$ (Lineer diferansiyel denlem)

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-lnx} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \left(v.\frac{1}{x}\right)' = 1/x$$

$$\frac{v}{x} = lnx + c \quad \rightarrow \quad v = xlnx + xc \quad \rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x(lnx + c)}$$

elde edilir. $u = y + \frac{2}{x}$ olduğundan;

$$\frac{1}{y + \frac{2}{x}} = \frac{1}{x(lnx + c)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = x(lnx + c) - \frac{2}{x}}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK

$(x^2+x)y'+y^2+(1-2x)y-2x=0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=-1$ olan denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$y=\frac{1}{u}-1\ ,\qquad y'=-\frac{u'}{u^2}$$

$-(x^2+x)\frac{u'}{u^2}+\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+(1-2x)\left(\frac{1}{u}-1\right)-2x=0$ elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$-(x^2+x)\frac{u'}{u^2}-\frac{(1+2x)}{u^2}u+\frac{1}{u^2}=0 \;\rightarrow\; u'+\frac{2x+1}{x^2+x}u=\frac{1}{x^2+x}$ Lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx}=e^{\ln(x^2+x)}=x^2+x \;\rightarrow\; \left((x^2+x)u\right)'=1 \;\rightarrow\; u=\frac{x+c}{x^2+c}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{x^2+x}{x+c}-1}$$

olarak genel çözüm bulunur.

Soru 1: $\frac{dy}{dx}+e^{x}-3y+e^{-x}y^{2}=0$ diferansiyel denkleminin özel çözümü

$y_1=e^{x}$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

Cevap 1: $y=e^{x}+\frac{1}{e^{-x}(x+c)}$ veya $y=e^{x}\left(1+\frac{1}{(x+c)}\right)$

Soru 2: $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y-\frac{4}{x^{2}}=y^{2}$ denkleminin özel çözümü $y_1=-\frac{2}{x}$ ise

genel çözümünü bulunuz.

Cevap 2: $y=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x(-Inx+c)}$