

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

GİRİŞ

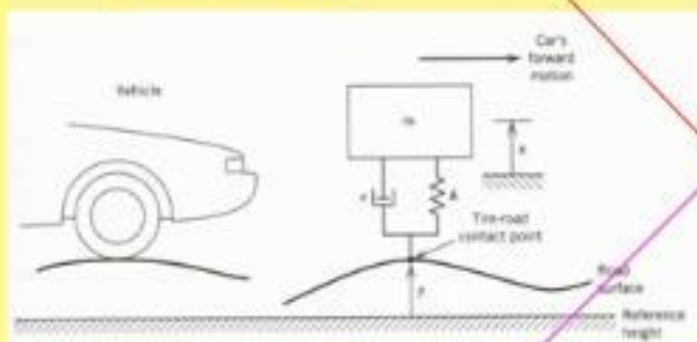
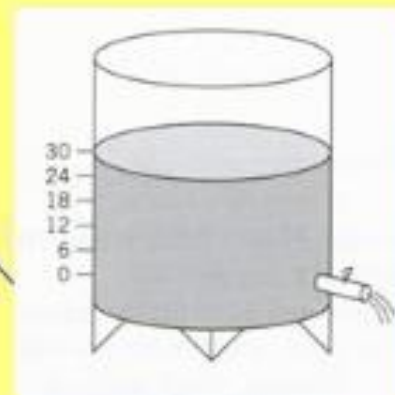
Doç. Dr. Zehra PINAR

Analizinde diferansiyel denklemler kullanılan alanlara örnekler



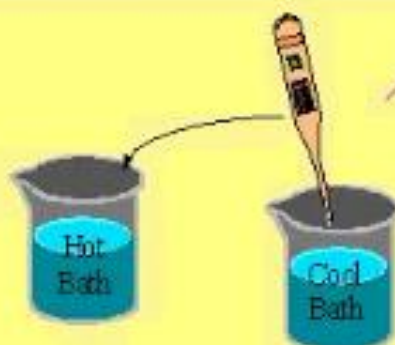
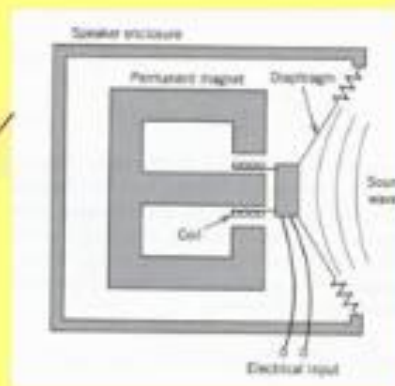
$$A \frac{dh}{dt} = -C_d A_o \sqrt{2gh}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = c \frac{dy}{dt} + ky$$

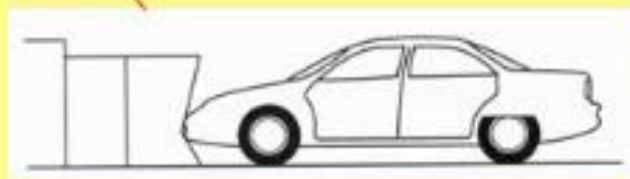


$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 70)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt} - kx + k_f i$$

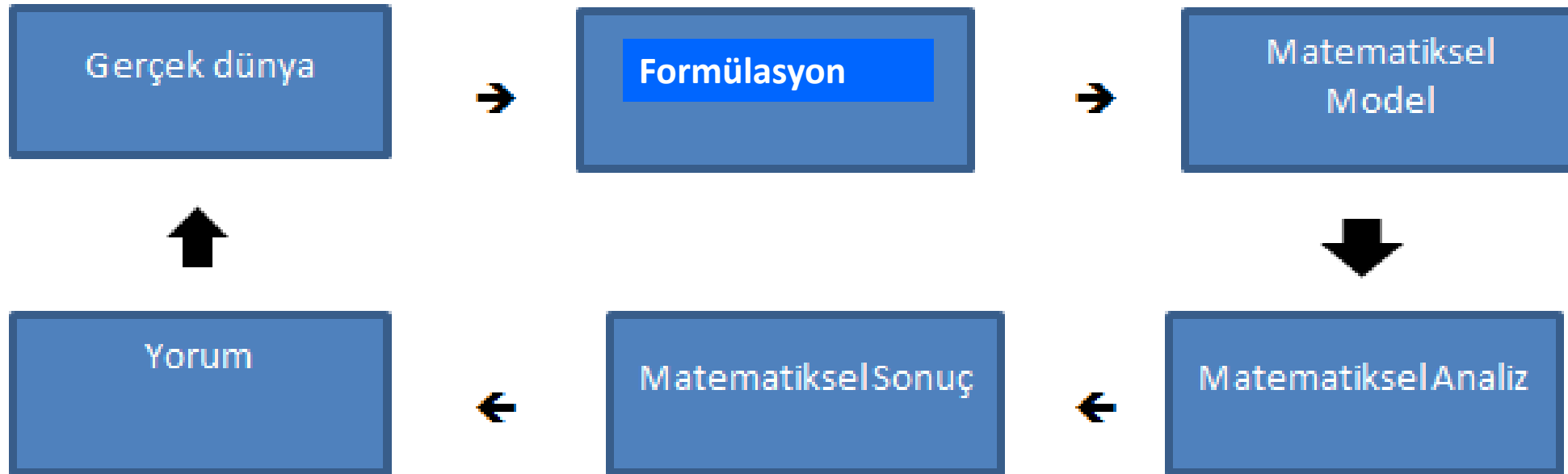


Dünyayı ve evreni anlamaya, yorumlamaya çalıştığımız bilimin adı fiziktir. Fiziğin de anadili matematiktir. Yani görmüş görmemiş olduğumuz her şey matematik dilinde yazılır. Cebir, birçok problemi çözmek için yeterli olsa da birçok doğal olaylar değişim içermektedir. Doğal veya yapay olayların en ilginç ve dikkat çekici yanı da değişim içermesidir. Bu değişimleri ve değişen nicelikleri birbirine bağlayan denklemler ile tanımlanırlar. Buna bağlı olarak değişim içeren olayları tanımlamak için türev içeren denklemlerin kullanılması doğaldır.

Diferansiyel denklemlerin incelenmesinin üç temel amacı vardır:

- Belirli bir fiziksel bir olayı tanımlayan diferansiyel denklemi bulmak.
- Diferansiyel denklemin “tam” ya da “yaklaşık” uygun bir çözümünü bulmak
- Bulunan çözümü yorumlamak

Cebirle diferansiyel denklemin farkı, cebirde örneğin bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bilinmeyen sayılarını ararız. Diferansiyel denklemi çözerken ise bilinmeyen bir değişkene bağlı olan fonksiyonun kendisini bulmak için çabalarız.



MEKANİKTEKİ UYGULAMALAR

Cisimlerin hareketlerinin incelenmesi mekaniğin bir dalıdır, buna da dinamik denir.

Newton'un üç kanunu, dinamik çalışmalarının temel dayanağı şeklindedir.

İlk olarak Newton tarafından ortaya atılan üç yasa aşağıdakiler gibidir:

- Üzerine dış kuvvetler etki etmedikçe duran bir cisim durmaya devam eder.
- Bir cismin momentumunun zamanla değişmesi cisme etki eden net kuvvetle ilgili orantılı ve aynı doğrultudadır
- Her etkiye karşın eşit ve zıt bir tepki vardır.

İkinci kanuna göre bir cismin momentumu, m kütlesi ile ve hızının çarpımı olarak tarif edilir.

Buna göre momentumun zamanla değişimi $\frac{d}{dt}(mv)$ dir.

Cismi etkileyen net kuvveti de F ile gösterirsek 2.kanuna göre

$$\frac{d}{dt} (mv) = \alpha F \text{ 'dir.}$$

Burada α bir orantı katsayısıdır. Orantıyı k ile gösterirsek $\frac{d}{dt} (mv) = kF$ elde ederiz. Kütle değişmez ise;

$$\frac{dv}{dt} m = kF \text{ veya } ma = kF$$

şeklindedir. ($a = \frac{dv}{dt}$ ivmedir.)

Böylece $F = \frac{ma}{k}$ olduğu görülür, k 'nın değeri kullanacağımız birimlere bağlıdır.

ELEKTRİK DEVRELERİ UYGULAMALAR

Mekanikte Newton yasaları gibi, elektrikte de elektrik devrelerini inceleyen Kirchhoff yasaları bulunur. Elektrik teorisi, elektromanyetik teoride Maxwell denklemleri denen belirli birkaç denkleme dayanır. Cisimlerin basit hareketlerini incelemek için nasıl Newton yasaları yeterli ise, elektrik devrelerinin basit özelliklerinin incelenmesi için Kirchhoff yasaları yeterli olur. En basit elektrik devresi, jeneratör veya pil gibi elektrik kaynağı kullanan bir rezistör bulunan bir seri devredir. Düğme kapatıldığında, bir I akımı rezistöre doğru akacak ve voltaj düşmesine sebep olacaktır. Yani rezistörün uçlarındaki elektrik potansiyel farklı olacaktır. Potansiyel farkı, voltaj düşüşü, voltmetre ile ölçülebilir.

Bir rezistörün iki ucundaki E_R –voltaj düşüşü, ani I akımı ile doğru orantılıdır.

R orantı sabiti olup aynı zamanda rezistörün direnci de denir, I akımı amper, R direnci *ohm* ve E_R voltajı volt ile ölçülen birimlerdir. Formülünü vermek gerekirse

$$E_R = RI$$

Bu denklem aynı zamanda OHM KANUNU olarak tanımlanır.

Bir indüktörün (bobinin) iki ucundaki E_L –voltaj düşüşü, I akımının zamana göre ani değişimi ile doğru orantılıdır.

Daha karışık veya daha fonksiyonel devrelerde kaynak ve rezistöre ek olarak iki önemli eleman daha eklenir. Bunlar indüktör (bobin) ve kapasitör (kondansatör) olarak tanımlanırlar. Bir indüktör, akımın değişmesine karşı koyar. Mekanikte kütlenin atalet (süre durum) etkisi olduğu gibi, elektrikte de indüktörün atalet etkisi bulunur. Kondansatör de devrenin enerji depolayan bir elemanıdır. Formül olarak;

$$E_L = L \frac{dl}{dt}$$

dir. Burada L orantı sabitine indüktörün indüktansı denir ve Henry ile ölçülür. Zaman yani t ise saniye ile ölçülür.

Kirchhoff Yasası

Kirchhoff Voltaj Kanunu olarak bilinen yasaya göre *kapalı bir devrede (loopta) ani voltaj düşüşlerinin cebirsel toplamı sıfıra eşittir* veya bir başka deyişle *kapalı bir devrede hâsıl olan voltaj, devrenin geri kalanındaki voltaj düşüşlerinin toplamına eşittir*. Kirchhoff yasasına göre, uygulanan e m k (E) indüktör üzerindeki voltaj düşüşü ($L \frac{dl}{dt}$) ile direnç üzerindeki voltaj düşüşünün (RI) toplamına eşit olduğundan diferansiyel denklem olarak ifade edilmek istenirse

$$L \frac{dl}{dt} + RI = E(t)$$

Lineer diferansiyel denklemi diyebiliriz. Bu denklemi oluşturan devreye RL-devresi de denir. Bu denklem $t = 0$ anında düğmenin kapatılarak devreye enerji verildiği kabul edilirse iki denklemden oluşan bir başlangıç değer problemine dönüşür.

$$L \frac{dl}{dt} + RI = E(t) \quad , \quad I(0) = 0$$

TANIM: Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren denkleme *Diferansiyel Denklem* denir.

$y = y(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere bir diferansiyel denklem genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{ya da daha genel olarak}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad \text{olarak ifade edilir.}$$

Diferansiyel denklemler:

$y=f(x)$ fonksiyonu ve türev yada türevlerini içeren denklemlerdir

En yüksek türev mertebesi, dif denklemin mertebesidir.

En yüksek türev mertebesinin kuveti ise, dif denklemin derecesidir.

$$y' = \cos x \quad (\text{I. Mertebeden dif.denklem})$$

$$x^2 y' + yx - y''' = 5 \quad (\text{III. Mertebeden dif.denklem})$$

$$y'' - y = y' \quad (\text{II. Mertebeden dif.denklem})$$

$$f(x, y, y', y'', y''', y^{(4)} \dots y^{(n)}) = 0 \quad (\text{n. Mertebeden dif.denklem})$$

Bir çok matematik model diferansiyel denklemler yardımı ile kurulur.

Lineer Diferansiyel Denklemler:

lineer olmayan dif denklemlere ise, non-lineer dif denklem denir.

$$* \quad y' + 4y = x.e^x + 4 \quad (\text{I. mertebe, I.dereceden lineer dif denklem})$$

$$* \quad y + y' = 3x \quad (\text{I. mertebe, I.dereceden lineer dif denklem})$$

$$* \quad y'' - y' = x + 2 \quad (\text{II. mertebe, I.dereceden lineer dif denklem})$$

$$* \quad yx - 3y'' + y' = 1 \quad (\text{II. mertebe, I.dereceden lineer dif denklem})$$

$$* \quad y^2 + (y')^3 = 3xy \quad (\text{I. mertebe, III.dereceden nonlineer dif denklem})$$

$$* \quad yx - 3(y'')^3 + (y')^4 = 1 \quad (\text{II. mertebe, III.dereceden nonlineer dif denklem})$$

Diferansiyel denklemlerde Sınıflandırma:

Değişken sayısına göre;

- i) Adi dif denklemler (Tek değişkenli)
- ii) Kısmi Türevli dif denklemler (Birden fazla değişkenli)

Dereceye göre;

- i) Lineer (Hem derecesi **1 olan**)
- ii) Non-lineer dif denklemler. (Derecesi **1'den büyük olan**)

Mertebeğe göre;

- i) I. Mertebeden dif denklemler
- ii) Yüksek Mertebeden dif denklemler

Katsayılarğa göre;

- i) Sabit Katsayılı dif denklemler
- ii) Değişken Katsayılı dif denklemler

Ayrıca, Bernoulli denklemleri , homojen denklemler gibi ayrımları da kullanacağız.

Genel ve Özel Çözümler

$y + y' = 0$ dif denkleminin genel çözümü $y = C.e^{-x}$ dir.

Bu durumda çözüm denklemini sağlamalı;

$$y' = -C.e^{-x} \text{ bulunur.}$$

$y + y' = 0$ yerlerine yazarsak;

$$-Ce^{-x} + C.e^{-x} = 0$$

$0 = 0$ bu durumda, çözüm doğrudur.

I.mertebeden bir dif denklemin genel çözümünde bir sabit sayı $\{C\}$,

II.Mertebeden bir dif denklemin genel çözümünde ise iki sabit sayı $\{C_1, C_2\}$ gibi bulunur.

* Genel çözüm C gibi sabit yada sabitler içerirken,
özel çözümler ise; bu sabitlere keyfi değerler verilerek bulunur.

* Genel çözüm belirli bir sabit içeriyor ve keyfi değerler veremiyorsak, çözüm TEKİL(singular) dir.

Başlangıç Değer Problemleri

* I.Mertebeden bir dif denklem ve m ve n gibi sabitler verildiğinde, dif denklemin çözümünde $f(m)=n$ koşulunu sağlayacak bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunması ile ilgili problemlere, Başlangıç Değer Problemi (b.d.p.) denir. m ve n çözümde yerine yazılarak, çözümdeki C sabiti değerce bulunur. Bulunan C değeri genel çözümde yazılarak, özel çözüm bulunmuş olur.

Örnek :

$y + y' = 0$ denklemi ve $y(-1) = e$ ile oluşan b.d.p. Çözelim;

$y + y' = 0$ denkleminin çözümü $y = C.e^{-x}$ ile bir önceki sayfada verilmişti.

$y(-1) = e$ ifadesini çözümde yazarsak;

$$e = C.e^{-(-1)} \Rightarrow C = 1 \text{ olur.}$$

bu $C = 1$ değerini genel çözümde yazarsak;

$$y = C.e^{-x} \Rightarrow y = 1.e^{-x} \Rightarrow y = e^{-x}$$

Ayrılabilir Diferansiyel denklemler:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

biçiminde yazılabilen denklemlerdir

$$y' = y \cdot \sin x \quad , \quad y' = x^2 \cdot \ln y \quad , \quad y' = e^x \cdot y \quad \text{gibi,}$$

bu tür denklemleri çözebilmek için,

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad \text{biçiminde düzenleyip,}$$

her iki tarafın integralini alabiliriz;

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

İntegraller hesaplanırsa, buradan genel-özel çözümler bulunur.

Örnek :

$y' = x.y$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım;

Çözüm :

$$y' = x.y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x.y \Rightarrow \frac{dy}{y} = x.dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x.dx \Rightarrow \ln y + \ln C = x^2$$

$$\Rightarrow y = C.e^{(x^2)}$$

Örnek :

$$y' = \frac{x^3}{y} \text{ diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım;}$$

Çözüm :

$$y' = \frac{x^3}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y}$$

$$\Rightarrow \int y \cdot dy = \int x^3 \cdot dx$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^4}{4} + C_1 \Rightarrow 4 \cdot y^2 = x^4 + C$$

Örnek :

$y'' = e^x$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım;

Çözüm :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^x \quad \Rightarrow \quad d \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^x . dx$$

$$\Rightarrow \int d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int e^x . dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x + C_1$$

$$\Rightarrow dy = (e^x + C_1) . dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int (e^x + C_1) . dx$$

$$\Rightarrow y = e^x + C_1 x + C_2$$