

Yüksek Mertebeden Denklemler

TANIM

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = F(x) \quad \text{şeklindeki}$$

denklemler lineer denklemdir. Eğer bu denklemde $F(x)=0$ ise lineer diferansiyel denklem homojen diferansiyel denklem aksi halinde homojen olmayan diferansiyel denklem denir.

Örneğin,

$$y''' - 9y' = 0$$

Homojen adi diferansiyel denklem

$$y'' + 5y = 4x + \sin x$$

Homojen olmayan adi diferansiyel denklem

SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

n 'inci mertebeden homojen olmayan bir lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$ değişken katsayılarıdır. Bu katsayıları ve $F(x)$ fonksiyonu, x 'in bir $I=[a,b]$ aralığında alınmış sürekli fonksiyonlardır ve bu durumda $a_0(x)$ daima sıfırdan farklı olur. Her x_0 bu $[a,b]$ aralığının bir elemanı olmak üzere

$$F(x_0) = c_0 , F'(x_0) = c_1 , \dots , F^{n-1}(x_0) = c_{n-1}$$

denkleminin $F(x)$ olacak şekilde tek çözümü vardır. Buradaki $c_0 , \dots , c_{n-1}$ keyfi sabit sayılardır.

Her $a_i(x) = c_i$ sabit ise denklem sabit katsayılı diferansiyel denklemdir...

HOMOJEN DENKLEMLER, LİNEER BAĞIMSIZLIK VE WRONSKIAN

TANIM : $a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$

n 'inci mertebeden hepsi sıfırdan farklı bir homojen diferansiyel denklemin birbirinden farklı k sayıda çözümü $y_1, \dots, y_k$ olsun. $c_1, c_2, \dots, c_k$ katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$ denklemin bir çözümüdür.

TANIM : $y_1, y_2, \dots, y_k$ herhangi k fonksiyonu ve $c_1, c_2, \dots, c_k$ herhangi keyfi sabitler olsun. Bu durumda $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k = 0$ ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_k$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonudur. Aksi halde $c_1, c_2, \dots, c_k$ 'lerin hepsi sıfır ise $y_1, y_2, \dots, y_k$ lineer bağımsızdır.

ÖRNEK:

$y_1(x) = e^{5x} - e^{2x}$, $y_2(x) = 5e^{5x} - e^{9x}$, $y_3(x) = e^x - e^{-x}$ fonksiyon kümelerini ele alalım. Hepsini sıfırdan farklı olmayacak durumda c_1, c_2 ve c_3 gibi sabit sayı bulunabilse bu durum da,

$$c_1(e^{5x} - e^{2x}) + c_2(5e^{5x} - e^{9x}) + c_3(e^x - e^{-x}) = 0$$

ise, bu üç fonksiyon aralarında lineer bağımlı olurlar. Çünkü $c_1 = 3$ $c_2 = -1$ $c_3 = -2$ olacak şekilde sabit sayılar bu denklemi sağlar.

TANIM

Eğer, $(n-1)$ 'inci dereceden türevlere sahip olan n -tane fonksiyonların lineer bağımsızlığını bulmak durumunda daha genel bir formül için

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

kullanarak fonksiyonlarının kendi aralarında lineer bağımsız oldukları ve aksi halde lineer bağımlı oldukları bulunur ve bu determinantı $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonların Wroskion'ıdır.

TANIM

$y_1, y_2, \dots, y_n$ n-inci mertebeden fonksiyonlarının her biri denklemin birer çözümü lineer bağımsızdır bu durumda Wroskionu ise sıfırdan farklı olmalıdır.

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k = y$$

fonksiyonu da denklemin bir çözümüdür. Bu şekilde oluşturulan fonksiyona homojen denklemin genel çözümü adı verilir.

ÖRNEK : $y'' - y' - 12 = 0$ denklemin çözümleri $y_1 = e^{-4t}$ ve $y_2 = e^{3t}$ dir.

$W(y_1, y_2)(t_0) = 7e^{-t} \neq 0$ olup , y_1, y_2 lineer bağımsızdır.

$c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$ genel çözümü olur.

SABİT KATSAYILI LİNEER HOMOJEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemler örneklerde karşınıza çok sık rastlanan denklemlerdir. Bunların genel çözümlerini bulmak oldukça kolaydır. Bu denklemler genellikle sonsuz seriler cinsinden çözülür. n'inci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem,

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

şeklinde yazılıp $a_0 \neq 0$ dır.

genel çözümü

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklinde ifade ederiz.

$$y = e^{mx} \quad y' = me^{mx} \quad \dots \quad y^k = m^k e^{mx} \text{ gibi}$$

$y = e^{mx}$ çözümü diferansiyel denklemde yerine yazarsak.

$$a(m^k e^{mx}) + a_1(m^{k-1} e^{mx}) + \dots + a_n(e^{mx}) = 0 \quad \text{veya} \quad e^{mx} (am^k + a_1 m^{k-1} + \dots + a_n) = 0$$

olur.

Eşitliğin sıfır olabilmesi için $e^{mx} \neq 0$ olduğundan

$$(am^k + a_1 m^{k-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n) = 0 \text{ olmalı ve bu karakteristik denklemdir.}$$

1.DURUM: AYRIK KÖK $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$

Bu özellikte $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \dots, e^{m_n x}$ lineer bağımsız olacağı için genel çözümü

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x} \text{ olur.}$$

2.DURUM: KATLI GERÇEK KÖK $m_1 = m_2 = \dots = m_n$

Bu özellikte denklemin kökleri k defa tekrarlandığı için

$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{m_n x} \text{ şeklinde olur.}$$

3.DURUM: KOMPLEKS KÖK

Bu durumda $m_1 = \alpha + i\beta$ ve $m_2 = \alpha - i\beta$ dır ve iki eşlenik kompleks sayılardır. Buradaki α ve β reel sayılar olup $i = \sqrt{-1}$ dir. Bu duruma göre, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ şeklinde yazılabilir. Ama bu şekilde diferansiyel denklemin çözümün verilmesi genel olarak pek uygun değildir. Bunun için “Euler formülü” olan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ bağıntısını kullanarak genel çözümü daha uygun bir şekilde yazılabilir. Bu ise;

$$\begin{aligned} y &= k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (k_1 e^{i\beta x} + k_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x} [k_1 (\cos\beta x + i\sin\beta x) + k_2 (\cos\beta x - i\sin\beta x)] \end{aligned}$$

Bu şekilde sadeleştirilir ve $k_1 + k_2 = c_1$ ve $i(k_1 - k_2) = c_2$ olmak üzere yeni keyfi sabit sayılar kullanılırsa, diferansiyel denklemin genel çözümü olarak

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK : $2y'' - 2y - 4 = 0$ denklemi çözünüz.

İlk önce bu denklemin karakteristik denklemini yazılsın:

$$2m^2 - 2m - 4 = 0$$

Bu denklemin kökleri $y_1 = -1$ ve $y_2 = 2$ olduğundan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK : $y'' - 8y + 16 = 0$ denklemini çözüntüz.

Bu denklemin karakteristik denklemini yazılsın..

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

Bu denklemin kökleri $y_1 = 4$ ve $y_2 = 4$ olarak bulunur ve katlı kök olduğundan dolayı diferansiyel denklemin genel çözümünü

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$ denklemini çözünüz

Bu denklemin karakteristik denklemini yazılsın.

$$m^5 + 8m^3 + 16m = 0$$

Bu denklemin kökleri $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 2i$ ve $y_4 = y_5 = -2i$ olarak bulunur.

Diferansiyel denklemin genel çözümü:

$$y = c_1 + (c_2 + c_3x)\cos 2x + (c_4 + c_5x)\sin 2x \text{ olarak bulunur.}$$

SABİT KATSAYILI HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

n'inci mertebeden, sabit katsayılı homojen olmayan lineer denklemler için özel çözümlerin inceleyeceğiz. Sabit katsayılı homojen olmayan

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x)$$

denklemdir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$F_n(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_n$$

şeklinde alınmış olsun. $F_n(x) = 0$ homojen denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_o$$

biçimindedir.

- i. Belirsiz Katsayılar Metodu
- ii. Parametrelerin Değişimi Metodu
- iii. **Mertebe İndirme Metodu**

BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Belirsiz Katsayı Fonksiyonları

- i. $x^n, n \in \mathbb{Z}^+$
- ii. $e^{ax}, a \neq 0$
- iii. $\sin(bx+c), b \neq 0, b \text{ ve } c \text{ sabit}$
- iv. $\cos(bx+c), b \neq 0, b \text{ ve } c \text{ sabit}$

ÖRNEK : $y'' + 4y' = \sin 2t$ denklemini çözüntüz.

İlk olarak denklemi homojen denklem şeklinde ele alıp çözümünü bulmalıyız. Homojen denklemi

$$y'' + 4y' = 0 \text{ olup.}$$

Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$\lambda(\lambda + 4) = 0$ bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = -4$ bulunur. Homojen denklemin çözümü

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

$$UC = \{\sin 2t, \cos 2t\}$$

$y_{\text{ö}_1} = A\sin 2t + B\cos 2t$ denklemin özel çözümü şeklinde yazılır. Bunların türevlerini alıp denklemde yerine yazılıp kat sayıları belirlenir.

$$y_{\text{ö}_1}' = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t$$

$$y_{\text{ö}_2}'' = -4A\sin 2t - 4B\cos 2t$$

Bu türevler denklemde yerine yazılırsa

$$-4A\sin 2t - 4B\cos 2t + 8A\cos 2t - 8B\sin 2t = \sin 2t$$

$$\sin 2t(-4A - 8B) + \cos 2t(-4B + 8A) = \sin 2t$$

$$-4A - 8B = 1$$

$$-4B + 8A = 0$$

$$B = -\frac{1}{10} \quad A = -\frac{1}{20}$$

Şeklinde bulunup $y_{\delta} = -\frac{1}{20}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos 2t$ şeklinde bulunur. Denklemin genel çözümü $y = y_h + y_{\delta}$ yazılacağından

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{20}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos 2t$$

olarak bulunur.

ÖRNEK : $y'' + 4y' + 4y = te^{-t}$ denklemini çözünüz.

İlk olarak denklemi homojen denklem şeklinde ele alıp çözümünü bulmalıyız. Homojen denklemi

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \text{ olup.}$$

Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$ ve buradan $\lambda_{1,2} = -2$ bulunur ve bu denklem katlı gerçekte kök olduğundan homojen denklemin çözümü

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

$$UC=\{ e^{-t}, te^t\}$$

$y_{\ddot{o}_1} = Ae^{-t} + B te^t$ denklemin özel çözümü şeklinde yazılır. Bunların türevlerini alıp denklemde yerine yazılıp kat sayıları belirlenir.

$$y_{\ddot{o}_1}' = -Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}$$

$$y_{\ddot{o}_1}'' = Ae^{-t} - Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t}$$

Bu türevler denklemde yerine yazılırsa

$$Ae^{-t} - 2Be^{-t} + Bte^{-t} - 4Ae^{-t} + 4Be^{-t} - 4Bte^{-t} + 4Ae^{-t} + 4Bte^{-t} + Ae^{-t} + 2Be^{-t} + Be^{-t} + Be^{-t} = te^{-t}$$

$$A+2B=0$$

$$B=1 \quad A=-2$$

Şeklinde bulunup $y_{\delta} = -2e^{-t} + te^{-t}$ şeklinde bulunur. Denklemin genel çözümü

$y = y_h + y_{\delta}$ yazılacağından

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - 2e^{-t} + t e^{-t}$$

olarak bulunur.

Parametrelerin Değişimi Yöntemi

- Belirsiz katsayılar metodunun kullanılmadığı durumlarda

(Sağ taraf yani kaynak fonksiyonun belirsiz katsayı fonksiyonu olmadığı durumlarda)

- Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Parametrelerin Değişimi yöntemini 2. mertebeden lineer denklemler üzerinde öğrenelim.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

yukarıdaki 2. mertebeden lineer denklemin ilgili homojen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

olsun. Temel fikir kısaca şöyledir: $y_h(x)$ fonksiyonundaki c_1, c_2 parametrelerinin yerine, x değişkenine bağlı fonksiyonlar $u_1(x), u_2(x)$ yazıp, yeni oluşan $y_h(x)$ fonksiyonunu denkleminizde yazarak, $u_1(x), u_2(x)$ fonksiyonlarını belirlemektir. Kısacası özel çözümümüz

$$y_o(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

şeklinde düşünülecek.

Bu özel çözümü denklemde yerine yazarak bilinmeyen $u_1(x)$, $u_2(x)$ bulmaya çalışalım. İki bilinmeyen fonksiyonumuz olduğunu göre, bunları belirleyebilmek için iki denkleme ihtiyacımız var. Şimdi bu denklemleri belirleyelim.

$$y'_0 = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + u'_1 y_1 + u'_2 y_2$$

Denklemde yerine yazabilmek için 2. türevi almalıyız. 2. türevi alırsak u_1 ve u_2 fonksiyonlarımızın 2. türevleri karşımıza çıkacak ve işimizi zorlaştıracaktır. Bu nedenle birinci denklemimizi işimizi kolaylaştırsın diye

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$$

olarak alacağız.

$$y'_0 = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

Özel çözümün ikinci türevini alalım

$$y''_0 = u_1 y''_1 + u_2 y''_2 + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2$$

Denkleminizde yerine yazalım

$$\underbrace{u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'}_{y''_a} + p(x) \underbrace{(u_1 y_1' + u_2 y_2')}_{y'_a} + q(x) \underbrace{(u_1 y_1 + u_2 y_2)}_{y_a} = f(x)$$

u_1, u_2 parantezlerine alalım

$$u_1 \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_0 + u_2 \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_0 + u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$$

y_1 ve y_2 fonksiyonları ilgili homojen denklemin $(y'' + p(x)y' + q(x)y = 0)$ çözümü olduğu için u_1, u_2 nin katsayıları 0'dır.

Böylece ikinci denklemimizi elde etmiş olduk.

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

Denklem sistemi iki bilinmeyenli iki denklemden oluşmaktadır. Tam çözümünü Kramer Kuralıyla elde edilmesi mümkündür.

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}, u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}$$

İntegre edilerek özel çözüm elde edilir.

Örnek 1.

$y'' + y = \tan x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Önce ilgili homojen denklemin $y'' + y = 0$ genel çözümünü bulalım. Karakteristik denkleminiz:

$$r^2 + 1 = 0$$

dir. Kökleri: $r_{1,2} = \mp i$ dir. $y_h(x)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Parametrelerin değişimi yöntemini kullanacağız. $y_h(x)$ ' e bakarak

$$y_1(x) = \cos x \quad y_2(x) = \sin x$$

olduğunu söyleyebiliriz. Özel çözümümüzü

$$y_o = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

Yerine koyulduğunda aşağıdaki denklem sistemini elde edeceğiz.

$$\begin{aligned}(u_1') \cos x + (u_2') \sin x &= 0, \\ -(u_1') \sin x + (u_2') \cos x &= \tan x\end{aligned}$$

Bilinmeyenlerimiz u_1', u_2' fonksiyonları ise

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\sin x \tan x = \cos x - \sec x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{1} = \sin x$$

şeklinde bulunur. İntegral alarak u_1 ve u_2 fonksiyonlarını bulabiliriz.

$$u_2(x) = -\cos x$$

$$u_1(x) = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$u_1(x)$ ve $u_2(x)$ i yerine yazalım

$$y_{\bar{0}}(x) = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \cos x - \cos x \sin x$$

$$y_{\bar{0}}(x) = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

ÖRNEK 2.

$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}x^{-2}$, $(x > 0)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Önce ilgili homojen denklemin $y'' + 4y' + 4y = 0$ genel çözümünü bulalım. Karakteristik denklemimiz:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

dir. Kökleri: $r_{1,2} = -2$ dir. $y_h(x)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Denklemimizin sağ tarafı belirsiz katsayılar metodunda incelediğimiz fonksiyon tiplerinden farklı. Parametrelerin değişimi metodunu kullanacağız. Özel çözümümüzü

$$y_0(x) = u_1(x) \underbrace{e^{-2x}}_{y_1(x)} + u_2(x) \underbrace{x e^{-2x}}_{y_2(x)}$$

olarak seçeceğiz ve $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ katsayı fonksiyonlarını bulacağız.

$$u_1' e^{-2x} + u_2' x e^{-2x} = 0$$

$$u_1' (-2e^{-2x}) + u_2' (e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = e^{-2x} x^{-2}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ x^{-2} & 1 - 2x \end{vmatrix}}{1} = -\frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x^{-2} \end{vmatrix}}{1} = x^{-2}$$

olarak bulunur. İntegral alarak bilinmeyen fonksiyonlarımızı buluruz.

$$u_1(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{x}$$

Böylece özel çözümümüz

$$y_{\text{ö}}(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)e^{-2x} - \frac{1}{x}xe^{-2x} = \ln\left(\frac{1}{x}\right)e^{-2x} - e^{-2x}$$

olur. Sonuç olarak genel çözümümüz

$$y_g(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)e^{-2x} - e^{-2x}$$

ÖRNEK 3.

$x(x+1)y'' + (2-x^2)y' - (2+x)y = (x+1)^2$ denkleminin homojen kısmına ait genel çözümü $y_h(x) = c_1e^x + c_2x^{-1}$ olduğuna göre özel çözümünü bulunuz.

Özel çözüm $y_o(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)x^{-1}$ formunda olup amacımız $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarını belirlemektir. Denklem sistemi

$$\begin{cases} u_1'e^x + u_2'x^{-1} = 0 \\ u_1'e^x - u_2'x^{-2} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{(x+1)}{x} \end{cases}$$

Sistemin çözümü

$$u_1'(x) = e^{-x}, u_2'(x) = -x \quad \xRightarrow{\text{integre edildiğinde}} \quad u_1(x) = -e^{-x}, u_2(x) = -\frac{x^2}{2}$$

Özel çözüm

$$y_{\delta}(x) = -e^{-x}e^x - \frac{x^2}{2}(x^{-1}) = -\frac{1}{2}(x+2) \text{ olur.}$$

Böylece genel çözüm

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x^{-1} - \frac{1}{2}(x+2) \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

ÖRNEK : $y'' + 2y' + y = e^{-t} \log t$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodu ile çözünüz.

İlk olarak denklemin homojen kısmını çözelim homojen denklemi

$$y'' + 2y' + y = 0$$

dir.

Karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \quad \text{dir.}$$

Bu durumda homojen denklemin genel çözümü

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

c_1 yerine $u_1(x)$ ve c_2 yerine $u_2(x)$ yazılırsa

$y_p = u_1(x)e^{-x} + u_2(x)x e^{-x}$ yazılır ve türev alırsak

$$u_1'(x)e^{-x} + u_2'(x)x e^{-x} = 0 \quad \text{ve}$$

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = \frac{g(x)}{a(x)} \quad \text{eşitliğinden}$$

$$-u_1'(x)e^{-x} + u_2'(x)(e^{-x} - x e^{-x}) = e^{-x} \log x \quad \text{denklemini elde ederiz.}$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\log x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{xe^{-x}e^{-x}\log x}{e^{-2x}(1-x) + xe^{-2x}}$$

$$= \frac{x\log x e^{-2x}}{e^{-2x}} = x\log x$$

$$u_1'(x) = x\log x \qquad u_1(x) = \frac{1}{4}x^2(2\log x - 1) \text{ bulunur.}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\log x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2x}\log x}{e^{-2x}} = \log x$$

$$u_2'(x) = \log x \qquad u_2(x) = x(\log x - 1) \text{ bulunur.}$$

Denklemin genel çözümünü

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

Verilerimizi yerlerine yazarsak

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + \frac{1}{4} (2 \log x - 3) x^2 e^{-x} \text{ bulunur.}$$

1) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ denkleminin homojen kısmına ait lineer bağımsız çözümleri $u_1(x) = x$ ve $u_2(x) = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

2) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \ln(x)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3) $y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}}{\cos(x)}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

MERTEBE İNDİRGEME METODU

Yöntem, homojen olmayan bir diferansiyel denklemin homojen kısmının bir özel çözümü bilindiği halde uygulanabilen özel bir yöntemdir. İkinci mertebeden bir diferansiyel denklemin $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$ $g(x) \neq 0$ 'nin homojen denklemin olan $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ 'nin bir özel çözümü biliniyor ise, mertebe indirgeme yöntemi ile denklem birinci mertebeye düşürülerek genel çözümü bulunur. Daha yüksek mertebeli denklemler içinde benzer şekilde uygulanabilir.

n-inci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin çözümü f olsun ve bu $f \neq 0$ alalım.

$y = vf(x)$ dönüşümü ile n-inci mertebeden denklemleri (n-1)-inci mertebeden denkleme indirgenir ve bağımlı değişken olarak $w = \frac{dv}{dx}$ alalım.

$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ denklemin çözümünün sıfırdan farklı bir f alalım.

$$y = vf$$

$$y' = \frac{dv}{dx}f + vf'$$

$$y'' = \frac{d^2v}{dx^2}f + 2\frac{dv}{dx}f' + vf''$$

$$a_0 \left(\frac{d^2v}{dx^2}f + 2\frac{dv}{dx}f' + vf'' \right) + a_1 \left(\frac{dv}{dx}f + vf' \right) + a_2vf = 0$$

$$\left(a_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + (2a_0 + a_1) \frac{dv}{dx}\right) f + v(a_0 f'' + a_1 f' + a_2 f) = 0 \quad f \neq 0$$

$$a_0 f'' + a_1 f' + a_2 f = 0$$

$$a_0 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + (2a_0 + a_1) \frac{dv}{dx} \right) = 0$$

$$W = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} \rightarrow a_0 \frac{dw}{dx} + (2a_0 + a_1)w = 0$$

$$a_0 \frac{dw}{dx} = -(2a_0 + a_1)w$$

$$\frac{dw}{w} = - \left(\frac{2a_0 + a_1}{a_0} \right) dx$$

$$\ln w = - \left(\frac{2a_0 + a_1}{a_0} \right) x$$

$$w = \exp \left(- \left(\frac{2a_0 + a_1}{a_0} \right) x \right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \exp \left(- \left(\frac{2a_0 + a_1}{a_0} \right) x \right) \rightarrow v = \int \exp \left(- \left(\frac{2a_0 + a_1}{a_0} \right) x \right) \cdot dx$$

olarak bulunur.

ÖRNEK : $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ denklemin bir çözümü $y=x$ olmak üzere lineer bağımsız diğer çözümü mertebeden indirgeme yöntemi ile çözünüz.

$$y = vx$$

$$y' = v'x + v$$

$$y'' = v''x + 2v'$$

$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ denklemde yerine yazalım.

$$x^2(v''x + 2v') - 4x(v'x + v) + 4vx = 0$$

$$x^3v'' + 2x^2v' - 4x^2v' - 4xv + 4xv = 0$$

$$x^3v'' + x^2(2v' - 4v') = 0$$

$$x^3v'' - 2v'x^2 = 0 \quad v' = w \quad v'' = w' \quad \text{dönüşümleri olsun.}$$

$$x^3w' - 2x^2w = 0$$

$$w' - \frac{2}{x}w = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2w}{x}$$

$$xdw = 2w dx$$

$$\frac{dw}{2w} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln w = 2 \ln x \quad w = x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = x^2 \implies v = \frac{x^3}{3}$$

$$y = vx \implies \frac{x^3}{3} x$$

$$y = c_1 x + c_2 \frac{x^4}{3} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK : $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ diferansiyel denklemin bir çözümüyü $y = x^{-1}$ olduğuna göre lineer bağımsız diğer çözümü mertebeden indirgeme yöntemi ile bulunuz.

$$y = vx^{-1}$$

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2}$$

$$y'' = v''x^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ denklemde yerine yazalım.

$$2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} = 0$$

$$2xv'' - 4v' + 4vx^{-1} + 3vx^{-1} - vx^{-1} = 0$$

$$2xv'' - v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1}) = 0$$

$2xv'' - v' = 0$ elde edilir ve $v' = w$ $v'' = w'$ dönüşümleri olsun.

$$2xw' - w = 0 \quad 2xw' = w$$

$$2x \frac{dw}{dx} = w \quad 2xdw = wdx$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln w = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln w = \ln x^{2^{-1}} \Rightarrow w = x^{2^{-1}}$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{2^{-1}} \Rightarrow dv = x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \quad y = x^{-1} c_1 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \text{ şeklinde bulunur.}$$

CAUCHY EULER DENKLEMLERİ

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ $a_0 \neq 0$ olmak üzere katsayıları birer sabit olmak üzere n . Basamaktan

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

Doğrusal denklemi, Cauchy Euler diferansiyel denklemi olarak adlandırılır değişken katsayılı denklemler arasında bir özel çözümü vardır. Bu denklemi değişken değiştirerek ile sabit katsayılı lineer denkleme indirgenerek çözüm yapılır.

Bu özel çözümler $x = e^t$ ya da $x = \ln t$ değişken dönüşümü ile

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x)$$

Sabit katsayılı lineer denkleme indirgenir.

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = F(x)$$

$x = e^t \Rightarrow \ln x = t$ değeri yerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$a_0 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t)$$

$$a_0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t)$$

Şeklinde ikinci dereceden sabit katsayılı lineer denklemi elde edilir.

Örnek : $x^2 y'' - 3xy' + 3y = \ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x = e^t$ ve $t = \ln x$ değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 3 \frac{dy}{dt} + 3y = t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 3y = t$$

Karakteristik denklemi yazarsak

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ ve } \lambda = 3 \text{ dir.}$$

Bu durumda homojen denklemin genel çözümü

$$y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^t \quad \text{bulunur. } x = e^t \text{ yazılırsa } y_h = c_1 x^3 + c_2 x \text{ olur.}$$

Özel çözümü ise

$$y_p = At + B$$

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Karakteristik denklemde yerine yazılırsa

$$0 - 4A + 3At + 3B = t$$

$$-4A + 3B = 0$$

$$3At = 1 \text{ ise } A = \frac{1}{3} \quad \text{ve} \quad -4\frac{1}{3} + 3B = 0 \text{ ise } B = \frac{4}{9}$$

$$y_p = \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} \text{ bulunur } x = e^t \text{ yazılırsa } y_p = \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9} \text{ olur.}$$

Denklemin genel çözümü

$$y = c_1x^3 + c_2x + \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9}$$

olarak bulunur.

Örnek : $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2t - 1$ denklemin genel çözümünü bulunuz.

$x = e^t$ ve $t = \ln x$ değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = 2t - 1$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 2t - 1$$

Elde edilir. Karakteristik denklemi yazarsak

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = -1 \text{ ve } \lambda = -2 \text{ dir.}$$

Bu durumda homojen denklemin genel çözümü

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ bulunur. } x = e^t \text{ yazılırsa } y_h = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1} \text{ olur.}$$

Özel çözümü ise

$$y_p = 2At + B$$

$$y_p' = 2A$$

$$y_p'' = 0$$

Karakteristik denklemde yerine yazılırsa

$$6A + 4At + 2B = 2t - 1$$

$$4A = 2 \text{ ise } A = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad 6\frac{1}{2} + 2B = -1 \text{ ise } B = -2$$

$y_p = t - 2$ bulunur $x = e^t$ yazılırsa $y_p = \ln x - 2$ bulunur.

Denklemin genel çözümü

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1} + \ln x - 2$$

olarak bulunur.

