SAYISAL ANALİZ

SONLU FARK FORMÜLÜ

İki Noktalı İleri Fark Formülü

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ limitinin varolması koşuluyla, Taylor teoremi ile; eğer f iki kere türevlenebilir ise

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(c) \quad ; \quad x < c < x+h$$

O halde

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(c)}_{\text{hata}} \quad ; \quad x < c < x+h} \rightarrow \text{iki Noktalı İleri Fark Formülü}$$

elde edilir.

İki noktalı ileri fark formülü;

1) Hata ile doğru orantılıdır
2) 1. mertebeden method $(O(h))$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \qquad \boxed{\text{Hata: } \frac{h}{2} f''(c)}$$

ÖRNEK: $f(x)=\frac{1}{x}$ için yaklaşım formülünü kullanarak $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz. ($h=0.1$)

İleri fark formülüne göre

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} \approx -0.2381$$

$$\underline{\text{hata}}: \; |\underbrace{f'(2)}_{\text{yaklaşık}} - \underbrace{f'(2)}_{\text{doğru}}| = |-0.2381-(-0.2500)| = 0.0119$$

Tahmin edilen hata: $\frac{hf''(c)}{2}$ $\qquad 2 < c < 2+0.1=2.1$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \rightarrow f''(x) \text{ azalandır}$$

$$\frac{h.f''(2.1)}{2} \leq \frac{h.f''(c)}{2} \leq \frac{h.f''(2)}{2} \Rightarrow \frac{0.1 * 2.(2.1)^{-3}}{2} \leq \frac{h.f''(c)}{2} \leq \frac{0.1 * 2.2^{-3}}{2}$$

$\Rightarrow$ $\quad 0.0108 \leq$ Tahmin edilen hata ≤ 0.0125

2. Mertebeden ($O(h^2)$) Formül

Taylor teoremini kullanarak f 3 kere sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(c_1) \qquad x < c_1 < x+h$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(c_2) \qquad x-h < c_2 < x$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!}\left[f'''(c_1) + f'''(c_2)\right]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}\left[f'''(c_1) + f'''(c_2)\right]$$

Genelleştirilmiş ara değer teoremi* ile öyle bir $c \in (x-h, x+h)$ vardır ki

$f'''(c_1) + f'''(c_2) = 2f'''(c)$ dir. O halde

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6}f'''(c)}_{\text{hata}} \qquad x-h < c < x+h}$$

→ 3 Noktalı Merkezi Fark Formülü

elde edilir.

3 noktalı merkezi fark formülü
1) Hata ile doğru orantılı
2) İkinci mertebeden bir methoddur.

ÖRNEK: $f(x) = \frac{1}{x}$ için 3 noktalı merkezi fark formülünü kullanarak $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz. ($h=0.1$)

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow f'(2) \simeq \frac{f(2.1) - f(1.9)}{0.2} \simeq \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{1.9}}{0.2} \simeq -0.2506$$

Hata: $|\underbrace{f'(2)}_{\text{yaklaşık}} - \underbrace{f'(2)}_{\text{doğru}}| = |-0.2506 - (-0.2500)| = 0.0006$

r

HATIRLATMA!

Teorem (Genelleştirilmiş Ara Değer Teoremi)*: $[a,b]$ kapalı aralığında f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun ve ayrıca $x_1, \dots, x_n$ noktaları da $[a,b]$ aralığında olsun. O halde a ile b arasında öyle bir c vardır ki

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) f(c) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n)$$

olur. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ dır.

İspat (ÖDEV):

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) . \min_i \{f(x_i)\} \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) . \max_i \{f(x_i)\}$$

eşitsizliği daima doğrudur. O halde

$$\min_i \{f(x_i)\} \leq \frac{a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \max_i \{f(x_i)\}$$

O halde f sürekli olduğundan ara değer teoreminden öyle bir $c \in [a,b]$ vardır ki,

$$f(c) = \frac{a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) f(c) = a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n).$$

DAHA YÜKSEK TÜREVLER İÇİN YAKLAŞIM FORMÜLÜ

2. türevin yaklaşım formülünü bulalım:

Taylor teoremiyle f fonksiyonunun 4 kere türevlenebilir olduğunu düşünelim:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(c_1) \qquad x < c_1 < x+h$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(c_2) \qquad x-h < c_2 < x$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{4!}\left[f^{iv}(c_1) + f^{iv}(c_2)\right].$$

O halde Genelleştirilmiş Ara Değer Teoremi uygulanıp, yukarıdaki eşitlik $f''(x)$ için çözülürse;

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{iv}(c) \quad ; \quad x-h < c < x+h}$$

3 noktalı, merkezi, 2. dereceden bir formül

formülü elde edilir.

YUVARLAMA HATASI

$f(x) = e^x$ in 1. türevini $x=0$ da yaklaşık olarak hesaplayalım:

(2) nokta formülü:
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \qquad \ldots (1)$$

(3) nokta formülü:
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad \ldots (2)$$

h	1. FORMÜL	HATA	2. FORMÜL	HATA
10^{-1}	1.05170918	-0.051709	1.00166756	-0.001...
10^{-2}				
10^{-3}				
10^{-4}				
10^{-5}				-0.0000000126
10^{-6}				+0.00000000026
10^{-7}		0.000000004943368		
10^{-8}	0.999999999215	0.00000000607747		
10^{-9}		-0.0000000082 74037		-0.0000002722

Loss of significance: Birbirine çok yakın iki sayının birbirinden çıkarılmasıdır, önemli digitlerin kaybolmasıdır.

ÖRNEK: 4 bitlik bir bilgisayar için $\sqrt{9.01}-3$ ü hesaplayın. → loss of significance

Alternatif olarak; $(\sqrt{9.01}-3) = (\sqrt{9.01}-3) \cdot \dfrac{(\sqrt{9.01}+3)}{(\sqrt{9.01}+3)} = \dfrac{0.01}{\sqrt{9.01}+3}$

(Çıkarma işlemini yok ederek problemi ortadan kaldırdık.

ÖRNEK: $E_1 = \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ → loss of significance

$$E_1 = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{1+\cos x}$$

$f(x+h)$: doğru değer

$\hat{f}(x+h)$: kayan nokta değeri (floating point value)

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}(x+h) &= f(x+h) + \varepsilon_1 \\ \hat{f}(x-h) &= f(x-h) + \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \quad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \approx \varepsilon_{makine} \equiv \text{makine epsilonu}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{2^{-52}}$

$1 + \varepsilon_{makine} \rightarrow$ 1 den büyük fakat bilgisayarın alabileceği en küçük sayı

$$f'_{doğru}(x) - f'_{makine}(x) = f'(x) - \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h}$$

$$= f'(x) - \frac{f(x+h) + \varepsilon_1 - f(x-h) - \varepsilon_2}{2h}$$

$$= \underbrace{\left[f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right]}_{\text{Kesme Hatası}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2h}}_{\text{Yuvarlama Hatası}}$$

$$= \left(f'_{doğru}(x) - f'_{formül}(x) \right) + hata_{yuvarlama}$$

$$\boxed{hata_{yuvarlama} = \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2h} \right| \leq \frac{2\,\varepsilon_{makine}}{2h} = \frac{\varepsilon_{makine}}{h}}$$

f' için 3 noktalı merkezi fark formülünü hatırlayalım:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(c)$$

$$E(h) = \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(c)}_{\text{matematiksel hata}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_{makine}}{h}}_{\text{yuvarlama hatası}} \qquad x-h < c < x+h$$

? Hangi h değeri için hata en küçük olur?

$$0 = E'(h) = \frac{h}{3} f'''(c) - \frac{\varepsilon_{makine}}{h^2}$$

$$|f'''(c)| \cong M \Rightarrow h = \left(\frac{3\,\varepsilon_{makine}}{M} \right)^{1/3} \qquad \varepsilon_{makine} \cong 10^{-5}$$ (double precision arithmetic)

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Genel Form

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

x, y: bağımsız değişkenler
u: diferansiyel denklemin çözümü

(1) Parabolik :	$B^2 - 4AC = 0$	(Isı Denklemi)	$u_t = c\,u_{xx}$ (c: ısı transfer katsayısı)
(2) Hiperbolik :	$B^2 - 4AC > 0$	(Dalga Denklemi)	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$
(3) Eliptik :	$B^2 - 4AC < 0$	(Poisson Denklemi)	$\Delta u(x,y) = F(x,y)$ $u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)$

Isı Denklemi

$u_t = c\,u_{xx}$
$c > 0$ (difüzyon katsayısı)
$u_t = c u_{xx}$ her $a \leq x \leq b$
$u(a,t) = l(t)$ her $t > 0$
$u(b,t) = r(t)$ her $t > 0$ } uç noktalardaki sıcaklıklar
$u(x,0) = f(x)$ $\forall\, a \leq x \leq b$ $t = 0$ anındaki ısı (Başlangıç Koşulu)

$f(t)$, $l(t)$ ve $r(t)$ çözümün tekliği için önemli.