

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus Teorem 2.1.4'ün yapılan yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirlememize yardımcı olduğudur. Bazı durumlarda bu üst sınır gerçek hatadan çok büyük olabilir. Örneğin Örnek 2.1.1'de dokuzuncu yaklaşım için

$$|p - p_9| \leq \frac{2-1}{2^9} = 1.953125 \times 10^{-3}$$

iken aslında gerçek hata değeri

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| = 4.362 \times 10^{-6}$$

olarak tespit edilir.

Örnek 2.1.5. $a = a_1 = 1$, $b = b_1 = 2$ olmak üzere $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminde en az 10^{-3} hassaslıkla bir yaklaşım ikiye bölme metodu kullanılarak yapılmak istendiğinde oluşacak iterasyon sayısını hesaplayınız.

Çözüm. n iterasyon sayısını göstermek üzere

$$|p_n - p| \leq 2^{-n}(b - a) = 2^{-n} < 10^{-3}$$

eşitsizliğini gerçekleyecek olan n sayısını tespit etmek gerekir. Buna göre 10 tabanında gerekli logaritma işlemleri yapılırsa $-n \log 2 < -3 \log 10$ yani

$$n > \frac{3}{\log 2} = 9.965784285$$

elde edilir. İterasyon sayısı yukarıda tespit edilen değerden büyük en yakın tam sayı olduğundan on iterasyon sonucunda en az 10^{-3} hassaslık ile bir yaklaşım yapılmış olunacağı sonucuna ulaşılır. Gerçekten Örnek 2.1.1'de elde edilen tabloda $p_{10} = 1.364257813$ olduğundan oluşan gerçek hata

$$|1.365230013 - 1.364257813| = 0.9722 \times 10^{-3} < 10^{-3}$$

olup verilen üst sınırı geçmez. Burada tekrar belirtmek gerekir ki yukarıdaki şekilde bulunan n iterasyon sayısı bazı durumlarda verilen hassaslık değeri ile bir yaklaşımda bulunmak için yapılması gereken iterasyon sayısından çok daha fazla olabilir.

2.2 Sabit Nokta İterasyonu

Bir fonksiyonun sabit noktaları, fonksiyon altındaki görüntüsü yine kendi değerine eşit olan noktalarıdır.

Tanım 2.2.1. *Bir g fonksiyonu verilsin. $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir noktaya g fonksiyonunun **sabit noktası** denir.*

Bu bölümde sabit nokta problemine bir çözümün ne şekilde bulunacağı ve sabit nokta problemi ile kök bulma problemi arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Aşağıda anlatıldığı anlamda kök bulma problemi ile sabit nokta problemi birbirine denk sınıflardır:

- Verilen bir $f(p) = 0$ kök bulma problemi için

$$g(x) = x - f(x) \text{ ya da } g(x) = x + 3f(x)$$

gibi çok farklı şekillerde p noktasında bir sabit nokta içeren g fonksiyonları tanımlanabilir. Zira

$$g(p) = p - f(p) = p - 0 = p \Rightarrow g(p) = p$$

dir.

- Tersine, eğer g fonksiyonunun bir sabit noktası p ise, örneğin

$$f(x) = x - g(x)$$

olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun bir kökü

$$f(p) = p - g(p) = p - p = 0$$

sağlandığından p 'dir.

Her ne kadar üzerinde durulan konu verilen bir denklemin köklerine bir yaklaşım yapma problemi olsa da sabit nokta barındıran fonksiyonlar kullanılarak kök bulma problemini çözme yolunda güçlü bir metot elde etmek mümkündür.

Öncelikle, verilen bir fonksiyonun sabit noktalarını bulma problemini incelemiden önce sabit nokta konseptini daha da anlaşılır kılmak amacı ile aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 2.2.2. $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonun herhangi bir sabit noktasını tespit ediniz.

Çözüm. Bir $g(x)$ fonksiyonu için p sabit noktası $g(p) = p$ eşitliğini sağladığından $p = p^2 - 2$ yani $p^2 - p - 2 = (p+1)(p-2) = 0$ denkleminin çözümü olan $p = -1$ ve $p = 2$ noktaları aranan sabit noktalar olarak bulunur. Gerçekten

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \text{ ve } g(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

dir.

Tanımından da anlaşılacağı üzere sabit noktalar verilen g fonksiyonu ile $y = x$ doğrusunun kesim noktalarıdır. Bu durum Şekil 2.4'de gösterilmektedir.

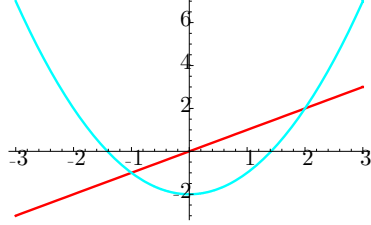
Aşağıdaki teorem bize sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili olarak yeter şartı vermektedir.

Teorem 2.2.3. (i) Eğer $g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ ise $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır.

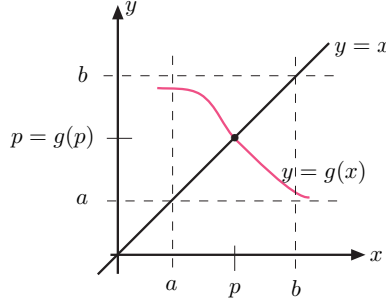
(ii) Yukarıda verilenlere ek olarak, (a, b) üzerinde $g'(x)$ türevi mevcut ve her $x \in (a, b)$ için

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $k < 1$ pozitif sabiti var ise $[a, b]$ aralığında g 'nin tek türlü belirli bir sabit noktası vardır (Bkz Şekil 2.5).



Şekil 2.4: $y = x$ ve $y = x^2 - 2$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2.5: Sabit noktaların varlığı ve tekliği

Kanıt. (i) Eğer $g(a) = a$ veya $g(b) = b$ ise g 'nin sabit noktası uç noktalarda yer alır. Diğer durumda her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olduğundan $g(a) > a$ ve $g(b) < b$ 'dir. $h(x) = g(x) - x$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[a, b]$ aralığında süreklidir ve

$$h(a) = g(a) - a > 0 \text{ ve } h(b) = g(b) - b < 0$$

eşitsizliklerini gerçeğe döndürür. Dolayısıyla Ara Değer Teoremi'ne göre $h(p) = 0$ olacak şekilde bir p sayısı (a, b) aralığında mevcuttur. Bu p sayısı için

$$0 = h(p) = g(p) - p$$

olduğundan $g(p) = p$ eşitliğini sağlar. Yani (a, b) aralığında yer alan p sayısı g fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

- (ii) Yukarıdaki koşullara ek olarak $|g'(x)| \leq k < 1$ sağlansın ve $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun p ve q gibi iki farklı sabit noktası var olsun. Ortalama Değer Teoremi'ne göre p ile q arasında ve dolayısıyla $[a, b]$ aralığı içinde bir ξ sayısı

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. Buna göre yukarıdaki ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınır, $g(p) = p$, $g(q) = q$ ve $|g'(\xi)| \leq k < 1$ olduğu kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

yani

$$|p - q| < |p - q|$$

çelişkisi elde edilir. Bu ise bizi $p \neq q$ varsayımının yanlış olduğu sonucuna götürür. Dolayısıyla $p = q$ 'dur, yani $[a, b]$ aralığındaki sabit nokta tek türlü belirlidir. $\square$

Örnek 2.2.4. $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $g'(x) = \frac{2x}{3}$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında türevi mevcuttur. Buna göre $g(x)$ fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini ya sınır noktaları olan $x = -1$ veya $x = 1$ 'de ya da türevini sıfır yapan $x = 0$ noktasında alır. $g(-1) = g(1) = 0$ ve $g(0) = -\frac{1}{3}$ olduğundan g fonksiyonun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında mutlak maksimumu ve $x = 0$ noktasında ise mutlak minimumu vardır. Buna göre her $x \in [-1, 1]$ için

$$-1 < -\frac{1}{3} < g(x) \text{ ve } g(x) < 0 < 1$$

olduğundan $g(x) \in [a, b] = [-1, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla verilen aralıktaki fonksiyonun en az bir tane sabit noktası vardır. Diğer taraftan

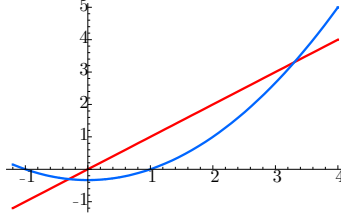
$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{2x}{3} \right| = \frac{2}{3} = k < 1$$

eşitsizliği de gerçekleştiğinden $[-1, 1]$ aralığında yer alan sabit nokta tek türlü belirlidir.

Örnek 2.2.4'de $[-1, 1]$ aralığında tek türlü belirli olduğu saptanan sabit nokta cebirsel olarak da bulunabilir: $p = g(p) = \frac{p^2-1}{3}$ olduğundan $p^2 - 3p - 1 = 0$ kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden iki tane kök bulunur. Bunlardan biri $[-1, 1]$ aralığında yer alan

$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

olup g fonksiyonunun sabit noktasıdır (Bkz Şekil 2.6). Diğer taraftan $p^2 - 3p - 1 = 0$ denkleminin diğer bir kökü $[3, 4]$ aralığında yer alan $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ 'dir. Bununla beraber $g(3) = \frac{3^2-1}{3} = 2\bar{6} \notin [3, 4]$ olduğundan $[3, 4]$ aralığı ile göz önüne alındığında g fonksiyonu Teorem 2.2.3'ün hipotez koşullarını sağlamaz. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 verilen bir fonksiyonun söz konusu aralıktaki sabit noktasının varlığını garantilemek için yeterlidir fakat gerek değildir.



Şekil 2.6: $y = (x^2 - 1)/3$ fonksiyonunun sabit noktaları

Örnek 2.2.5. $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktasının varlığının Teorem 2.2.3 kullanılarak gösterilemeyeceğini, fakat aslında bu aralıkta verilen fonksiyona ait sadece bir sabit noktanın mevcut olduğunu gösteriniz.

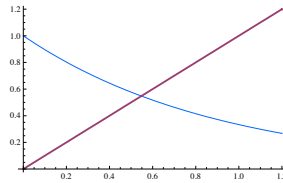
Çözüm. $[0, 1]$ aralığında $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton azalandır. Buna göre maksimum değerini aralığın sol ucunda, minimum değerini ise sağ ucunda alır. Ayrıca

$$g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$$

olduğundan her $x \in [0, 1]$ için $g(x) \in [0, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.2.3'ün ilk kısmına göre $[0, 1]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$g'(0.01) = -3^{-0.01} \ln 3 = -1.086608855$$

olduğundan en azından $(0, 1)$ aralığında yer alan 0.01 noktası için $|g'(x)| \not\leq 1$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 kullanılarak var olduğu bilinen sabit noktanın tekliği hakkında bir hüküm bildirilemez. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ise $|g'(x)| \not\leq 1$ olmasından sabit noktanın verilen aralıkta tek türlü belirli olmadığı sonucu çıkmadığıdır. Sadece teklik hakkında herhangi bir bilgi elde edilememiş olur. Gerçekte, $[0, 1]$ aralığında $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonu g monoton azalan olduğundan $y = x$ doğrusunu sadece bir kez keser ve kesim noktası g 'nin tek türlü belirli sabit noktasıdır. Bu durum Şekil 2.7'de gösterilmektedir.



Şekil 2.7: $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun sabit noktası

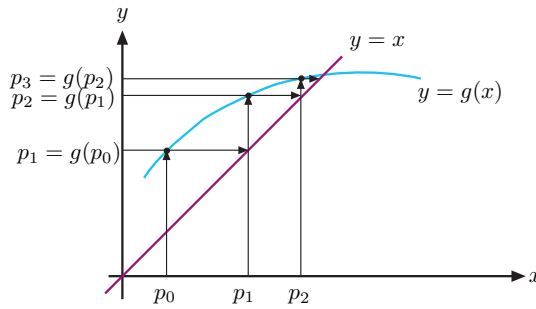
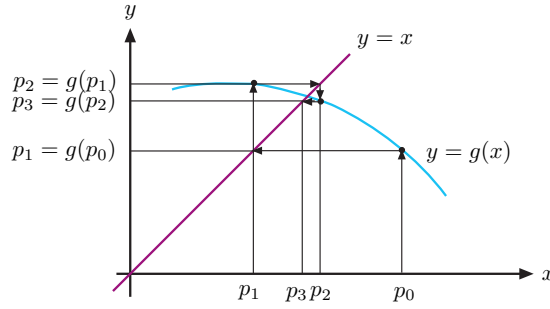
2.2.1 Sabit Nokta İterasyonu

Bu aşamada Örnek 2.2.5'de verilen g fonksiyonunun $p = g(p) = 3^{-p}$ eşitliğini gerçekleyen sabit noktalarını tespit etmemizi sağlayacak bir yöntem bilmediğimiz için söz konusu sabit noktaları belirleyemeyiz. Bununla birlikte belirli bir yakınsaklık derecesine sahip olarak verilen fonksiyonun sabit noktaları için yaklaşımlarda bulunabiliriz.

g fonksiyonunun sabit noktasına bir yaklaşımda bulunmak için bir p_0 ilk yaklaşım değeri seçelim ve her $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ olacak şekilde $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlayalım. Eğer bu dizi p' 'ye yakınsar ve g fonksiyonu sürekli ise

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

sağlanır ve $x = g(x)$ ifadesi için çözüm elde edilmiş olur. Bu teknik **sabit nokta iterasyonu** ya da **fonksiyonel iterasyon** olarak adlandırılır (Bkz. Şekil 2.8).



Şekil 2.8: Sabit nokta iterasyonu

Örnek 2.2.6. Şimdi Örnek 2.1.1'de incelenen $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin [1, 2] aralığında tek türlü belirli bir çözümünün olduğunu biliyoruz. Bu köke sabit nokta iterasyonu ile bir yaklaşımda bulunmak için $x = g(x)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Bu fonksiyon verilen denklem kullanılarak pek çok farklı şekilde oluşturulabilir. Örneğin $4x^2 = 10 - x^3$ yazarsak $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$ olduğundan $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ elde edilir. Biz [1, 2] aralığındaki çözüm ile ilgilendiğimizden pozitif olan $x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ ifadesini sabit nokta fonksiyonu adayı olarak seçebiliriz. Bunun yanında $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemini kullanılarak $x = g(x)$ eşitliğini sağlayan başka fonksiyonlar da yazılabilir:

$$(a) \quad x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10,$$

$$(b) \quad x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x},$$

$$(c) \quad x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3},$$

$$(d) \quad x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}},$$

$$(e) \quad x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}.$$

Okuyucu, yukarıdaki şekilde tanımlanan her fonksiyonun $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin [1, 2] aralığındaki çözümünü sabit nokta iterasyonu metodu ile bulmak için kullanılabilecek Teorem 2.2.3'in koşullarını sağlayan sabit nokta fonksiyonu olup olmadığını araştırmalıdır ki bu fonksiyonlardan (b) ile verilen [1, 2] aralığında sürekli değil iken, (a) her $x \in [1, 2]$ için $g(x) \in [1, 2]$ içermesini sağlamaz. Şimdi bu ayrıntıya değinmeden verilen aralıkta herhangi bir p_0 başlangıç yaklaşımı seçelim ve bulunan yaklaşımlarda elde edilen sonuçlardan tespit edilen sabit nokta fonksiyonu adaylarından hangilerinin isteneni sağladığını görelim. Eğer $p_0 = 1.5$ olarak almır ve g 'nin yukarıdaki şekilde tanımlanan tüm seçimleri kullanılarak

$$p_n = g(p_{n-1})$$

sabit nokta iterasyonu uygulanırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir. Diğer taraftan Örnek 2.1.1'de belirtildiği üzere gerçek kök değeri 1.365230013'dür. Bu değere ikiye bölme metodu uygulanarak ulaşmak istendiğinde 27 iterasyon yapmak gerekirken (c), (d) ve (e) ile verilen fonksiyonlar kullanılarak yapılan yaklaşımlarda farklı iterasyon sayılarına karşılık gerçek kök değerine ulaşılmaktadır. Bununla beraber (a) ile verilen fonksiyon ıraksak iken (b) ile verilen fonksiyonun üçüncü adımı tanımsızdır.

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.81649658	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.73242188	2.99690881	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.720012	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Yukarıdaki örnekten görüleceği üzere verilen bir denklemin çözümüne sabit nokta iterasyonu metodu kullanılarak yapılacak bir yaklaşımda iki önemli problem ortaya çıkmaktadır. Bunlardan ilki sabit nokta fonksiyonunun tanımlanması, bir diğeri de tanımlanan bu fonksiyonun uygun bir adım sayısı ile sonucu vermesidir. Bu aşamada aşağıdaki teorem ve ilişkili sonuç bu sorulara cevap olacaktır:

Teorem 2.2.7. (Sabit Nokta Teoremi)

$g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olsun. Bunlara ek olarak g' türevi (a, b) aralığında mevcut ve her $x \in (a, b)$ için

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı var olsun. Buna göre $[a, b]$ aralığındaki her p_0 sayısı için

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan dizi $[a, b]$ aralığında tek türlü belirli bir p sabit noktasına yakınsar.

Kanıt. Teorem 2.2.3'den biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir p sabit noktası tektürlü belirli olacak şekilde mevcuttur. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ aralığını kendi içine resmettiğinden yukarıdaki şekilde verilen $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 0$ için tanımlıdır ve $p_n \in [a, b]$ bağıntısını gerçekler. Diğer taraftan $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi kullanılarak her n için $\xi_n \in (a, b)$ olmak üzere

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p| \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir. Bu prosedür indaktif olarak uygulandığında

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p|$$

sonucuna ulaşılır. $0 < k < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

elde edilir. Yani, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p 'ye yakınsar. $\square$

Sonuç 2.2.8. g fonksiyonu Teorem 2.2.7'nin koşullarını sağlıyorsa p sabit noktasına yapılan p_n yaklaşımında oluşan mutlak hata için bir sınır $n \geq 1$ olmak üzere

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad (2.5)$$

ve

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0| \quad (2.6)$$

eşitsizlikleri ile elde edilir.

Kanıt. $p \in [a, b]$ olduğundan (2.4) eşitsizliğinden

$$|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $n \geq 1$ için Teorem 2.2.7'nin ispat tarzındaki gibi hareket ederek

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k |p_n - p_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |p_1 - p_0|$$

bulunur. Dolayısıyla $m > n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \dots + p_{n+1} - p_n| \\ &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq k^{m-1} |p_1 - p_0| + k^{m-2} |p_1 - p_0| + \dots + k^n |p_1 - p_0| \\ &= k^n |p_1 - p_0| (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ olduğundan

$$|p - p_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $0 < k < 1$ için $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ serisi toplamı $\frac{1}{1-k}$ olan geometrik bir seri olduğundan

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|$$

eşitsizliği elde edilir. $\square$

Yukarıdaki sonuçta verilen her iki eşitsizlik de türevi sınırlayan k sayısına bağlıdır. Ayrıca bu k değeri ne kadar küçük olursa yakınsama hızı o kadar yüksek olacaktır. Eğer k değeri 1'e yakın ise yakınsama çok düşük bir hızda gerçekleşir.

Örnek 2.2.9. Teorem 2.2.7 ve Sonuç 2.2.8'de elde edilen sonuçları Örnek 2.2.6'da tanımlanan fonksiyonlar üzerinde uygulayalım:

- (a) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ için $g_1(1) = 6$ ve $g_1(2) = -12$ olduğundan g_1 fonksiyonu $[1, 2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca, $g'_1(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ olduğundan her $x \in [1, 2]$ için $|g'_1(x)| > 1$ sağlamır. Her ne kadar Teorem 2.2.7, g_1 şeklinde tanımlanan fonksiyonun bu metotta kullanılmayacağını söylemesede, yakınsamanın garantisi yoktur. Keza örneğe ilişkin tabloda fonksiyonun sabit noktaya yakınsamadığı görülmektedir.
- (b) $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ şeklinde verilen fonksiyon $[1, 2]$ aralığını $[1, 2]$ içine resmetmez. Ayrıca verilen aralıkta, en azından bir $p_0 = 1.5$ noktası için $p_n = g_2(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımsızdır. Bundan daha fazla olarak, $|g'_2(p)| \approx 3.4$ olduğundan $|g'_2(x)| < 1$ eşitsizliğini sağlayan ve $p \approx 1.356$ değerini içeren bir aralık yoktur. Dolayısıyla bu metod ile yakınsama garanti edilemez.
- (c) $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1, 2]$ aralığında sürekli. Ayrıca her $x \in [1, 2]$ için

$$g'_3(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$$

olduğundan monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini sol uçta, minimum değerini ise aralığın sağ ucunda alır. Diğer yandan

$$g_3(1) = 1.5 < 2 \text{ fakat } g_3(2) = 0.7071067812 \neq 1$$

olduğundan g_3 fonksiyonu $[1, 2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca $|g'_3(2)| \approx 2.12 \not< 1$ olduğundan $[1, 2]$ aralığında $|g'_3(x)| \leq k < 1$ eşitsizliği de geçersizdir.

Şimdi, $[1, 2]$ aralığı yerine $p_0 = 1.5$ olmak üzere $[1, 1.5]$ aralığında $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $[1, 1.5]$ aralığında $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır ve yukarıda olduğu gibi $g'_3(x) < 0$ sağlandığından $g_3(x)$ fonksiyonu monoton azalandır. Dolayısıyla her $x \in [1, 1.5]$ için

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5$$

eşitsizliği gerçekleştiğinden g_3 fonksiyonu $[1, 1.5]$ aralığını kendi içine resmeder. Diğer taraftan $|g'_3(x)| \leq |g'_3(1.5)| \approx 0.66 < 1$ sağlandığından Teorem 2.2.7'e göre yakınsaklığın sağlandığı sonucuna ulaşılır ki biz zaten yukarıdaki tabloda kök değerine bir yaklaşım elde etmiştik.

- (d) $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1, 2]$ aralığında sürekli. Ayrıca

$$g'_4(x) = -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} < 0$$

olduğundan $[1, 2]$ aralığında monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini aralığın sol ucunda minimum değerini ise sağ ucunda alır. Buna göre her $x \in [1, 2]$ için

$$1 < 1.29 \approx g_4(2) \leq g_4(x) \leq g_4(1) \approx 1.41 < 2$$

eşitsizlikleri sağlandığından $g_4(x) \in [1, 2]$ bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |g_4'(x)| &= \left| -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \\ &= \left| \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} \right| \approx 0.14142 < 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki buna göre Teorem 2.2.7'e göre yakınsama garantidir. Daha fazla olarak, türev için elde edilen birden küçük üst sınır değeri (d) şıkında yaklaşık olarak 0.14142, (c) şıkında ise 0.66 olarak elde edildiğinden Sonuç 2.2.8'e göre g_4 fonksiyonu sabit noktasına g_3 'e göre daha hızlı yakınsayacaktır. Bu olgu yukarıdaki tablodan da gözlemlenmektedir.

- (e) Sabit nokta fonksiyonun $g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ şeklinde seçilmesi ile yukarıda yakınsaklığını ortaya koyduğumuz tüm fonksiyonlardan daha hızlı bir biçimde sabit noktaya yakınsayan bir $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilmiş olur. Okuyucu diğer şıklardaki gibi hareket ederek bu durumu analiz etmelidir.

Örnek 2.2.10. (a) $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0$ denkleminin $[1, \pi/2]$ aralığındaki çözümünü Sabit-Nokta Metodu ile elde etmek için bir $g(x)$ sabit nokta fonksiyonu belirleyiniz.

- (b) (a) şıkında elde edilen $g(x)$ fonksiyonunu kullanarak $p_0 = 1.4$ olmak üzere yukarıda verilen denklemin çözümünü $\varepsilon = 10^{-6}$ hassaslıkla bulmak için yapılması gereken iterasyon sayısını hesaplayınız.

Çözüm.

- (a) $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0 \Rightarrow x = 1.4 \sin x$ olduğundan $g(x) = 1.4 \sin x$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim. Yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonun $[1, \pi/2]$ aralığında sürekli olduğu açıktır. Ayrıca $g'(x) = 1.4 \cos x$ fonksiyonu her $x \in [1, \pi/2]$ için pozitif olduğundan $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton artandır. Dolayısıyla maksimum değerini $\pi/2$ 'de ve minimum değerini ise 1'de alır ve $g(x)$ fonksiyonunun alacağı tüm değerler $g(\pi/2)$ ve $g(1)$ değerleri arasında olur.

$$g(\pi/2) = 1.4 \sin \frac{\pi}{2} = 1.4 < \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

ve

$$g(1) = 1.4 \sin 1 = 1.1781 > 1$$

gerçeklendiğinden her $x \in [1, \pi/2]$ için $g(x) \in [1, \pi/2]$ sağlanır. Yani $g(x)$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$|g'(x)| = |1.4 \cos x| = 1.4 |\cos x| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x|$$

olduğundan $h(x) = \cos x$ dersek bu fonksiyon $x \in [1, \pi/2]$ için $h'(x) = -\sin x < 0$ özelliğini sağladığından monoton azalandır ve ekstremum değerlerini uç noktalarda alır. Buna göre

$$|h(1)| = |\cos 1| = 0.54030 > |h(\pi/2)| = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

olduğundan

$$|g'(x)| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x| = 1.4 \cos 1 = k = 0.75642 < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası vardır.

- (b) $p_0 = 1.4$ ise $p_1 = g(p_0) = 1.4 \sin 1.4 = 1.3796$ 'dir. n iterasyon sayısını göstermek üzere $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \leq 10^{-6}$ olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{0.75642^n}{1 - 0.75642} |1.3796 - 1.4| \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{0.75642^n}{0.24358} (0.0204) \leq 10^{-6} \Rightarrow$$

$$0.75642^n \leq 0.11940 \times 10^{-4} \Rightarrow n \log(0.75642) \leq \log(0.11940 \times 10^{-4}) \Rightarrow$$

$$n(-0.12124) \leq -4.9230 \Rightarrow n \geq 40.605$$

yani $n \geq 41$ elde edilir.

Örnek 2.2.11. Sabit Nokta Metodunu kullanarak $xe^x = 0.3$ denkleminin $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $p_0 = 0.2$ olmak üzere 10^{-4} hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonunun bir sabit nokta fonksiyonunun $g(x) = 0.3e^{-x}$ olduğunu gösterelim. Açık olarak üstel $g(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de ve özel olarak $[0.1, 0.9]$ aralığında süreklidir. Ayrıca $g'(x) = -0.3e^{-x} < 0$ eşitsizliği her x için sağlandığından fonksiyon monoton azalandır. Dolayısıyla $g(x)$ maksimum değerini $[0.1, 0.9]$ aralığının sol, minimum değerini ise sağ ucunda alır.

$$g(0.1) = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 < 0.9$$

$$g(0.9) = 0.9e^{-0.9} = 0.12197 > 0.1$$

olduğundan her $x \in [0.1, 0.9]$ için $g(x) \in [0.1, 0.9]$ sağlanır. Dolayısıyla Sabit Nokta Teoremi'ne göre verilen aralıkta $g(x)$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Ayrıca

$$|g'(x)| = |0.3e^{-x}| \leq 0.3 \max_{0.1 \leq x \leq 0.9} e^{-x} = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 = k < 1$$

sağlandığından yani $g(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri üstten $k = 0.27145$ gibi birden küçük bir sayı ile sınırlı olduğundan, Sabit Nokta Teoremi'ne göre $[0.1, 0.9]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun sabit noktası tek türlü belirlidir. Şimdi Sabit Nokta Metodu'nu kullanarak 10^{-4} hassaslıkla istenen kökü bulalım. Buna göre

$$p_n = g(p_{n-1}) \Rightarrow p_n = 0.3e^{-p_{n-1}}$$

olduğundan

n	p_n	$g(p_n)$	$ p_n - g(p_n) $
0	0.20000	0.24562	0.45620×10^{-1}
1	0.24562	0.23467	0.10950×10^{-1}
2	0.23467	0.23725	0.25800×10^{-2}
3	0.23725	0.23664	0.61000×10^{-3}
4	0.23664	0.23678	0.14000×10^{-3}
5	0.23678	0.23675	0.30000×10^{-4}

elde edilir. Dolayısıyla $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonun $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökü 10^{-4} hassaslıkla $p_5 = 0.23675$ olarak bulunur.

2.3 Newton, Secant ve Regula Falsi Metotları

Newton metodu ya da diğer bilinen bir ismi ile **Newton-Raphson metodu** kök bulma probleminde kullanılan en güçlü ve iyi bilinen metotlardan birisidir. Bu bölümde anlatılacak diğer yaklaşım teknikleri Newton metodu kullanılarak elde edilmektedir. Newton metodunu ortaya koymak için pek çok yol izlenebilir. Biz metodun inşasını Taylor polinomları ile yapacağız.

2.3.1 Newton Metodu

$f \in C^2[a, b]$ olsun. $f'(p_0) \neq 0$ ve $|p - p_0|$ farkı *yeterince küçük* olmak üzere p kök değerine $p_0 \in [a, b]$ gibi bir yaklaşım yapılsın. $f(x)$ fonksiyonunun p_0 civarında birinci Taylor polinomunu $\xi(x)$ sayısı x ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{(x - p_0)^2}{2}f''(\xi(x))$$

şeklinde yazılabilir. Burada eğer $x = p$ alınırsa $\xi(p)$ sayısı p ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

elde edilir. $f(p) = 0$ olduğundan

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

eşitliğine ulaşılır.

Newton metodu $|p-p_0|$ farkının çok küçük olduğu varsayımı altında $(p-p_0)^2$ değerinin çok daha küçük olması olgusuna dayanır. Buna göre oluşan hata ihmal edilebilir bir büyüklüktedir. Dolayısıyla

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

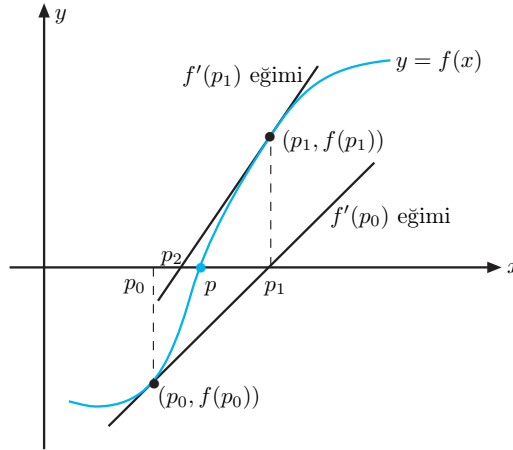
yazılabilir. Bu ifade p 'ye göre düzenlenirse

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1, \quad f'(p_0) \neq 0$$

elde edilir. Rekürsif olarak $n \geq 1$ için $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanırsa p_0 başlangıç yaklaşımı olmak üzere Newton metodu elde edilmiş olur (Bkz. Şekil 2.9).



Şekil 2.9: Newton metodu

İkiye bölme metodunda açıklanan tüm durma kriterleri Newton metodunda da kullanılabilir. Yani, bir ε değeri verildiğinde $p_1, p_2, \dots, p_k$ her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere $n = 1, \dots, k$ için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \quad (2.8)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \quad p_n \neq 0 \quad (2.9)$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \quad (2.10)$$

eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Fakat biliyoruz ki ne (2.8) ne (2.9) ne de (2.10)'dan elde edilen sonuçlar $|p_n - p|$ gerçek hata değerine tam olarak eşit değildir.

Newton metodu $n \geq 1$ için

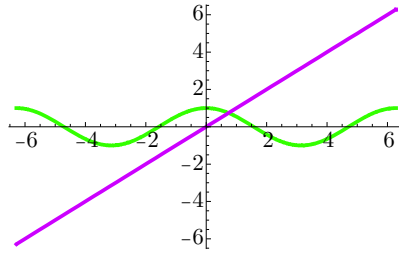
$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (2.11)$$

olmak üzere $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel bir iterasyon tekniğidir. Bu metodun herhangi bir n için $f'(p_{n-1}) = 0$ değerini alması durumunda kullanılamayacağı (2.7)'den açıktır. Daha sonra gösterileceği üzere teknik, f' ifadesinin sınırının sıfıra uzak olması durumunda daha kuvvetli hale gelmektedir.

Örnek 2.3.1. $f(x) = \cos x - x = 0$ fksiyonu göz önüne alınsın. **(a)** sabit nokta ve **(b)** Newton metotlarını kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kök değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

- (a)** Verilen kök bulma problemi $x = \cos x$ şeklinde bir sabit nokta problemine dönüştürülebilir. Şekil 2.10'dan görüldüğü gibi $x = \cos x$ denkleminin tek türlü belirli sabit noktası $[0, \pi/2]$ aralığında yer alır.



Şekil 2.10: $x = \cos x$ ve $y = x$ eğrilerinin grafikleri

$p_0 = \pi/4$ olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1}) = \cos(p_{n-1})$ alınırsa sabit nokta iterasyonu ile aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

Bu aşamada dikkat edilmesi gereken bir husus yakınsamanın göz önüne alınan fonksiyon için çok yavaş olduğudur. Zira uygulanan sekiz adımda $p_n = g(p_{n-1})$ eşitliği sağlanmamıştır. Dolayısıyla adım sayısını arttırmak gerekir.

- (b) $f(x) = \cos x - x = 0$ fonksiyonunun $f'(x) = -\sin x - 1$ türevi üzerinde çalışılan $[0, \pi/2]$ aralığında sıfırdan farklı olduğundan Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_0 = \pi/4$ seçilir ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1}$$

dizisi göz önüne alınırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Tabloya göre 10 ondalık basamak alınarak yapılan bu yaklaşımda p_3 ile p_4 değerleri aynı olduğundan aranan kök değerinin 0.7390851332 olduğu sonucuna ulaşılır.

2.3.1.1 Newton Metodunda Yakınsama

Örnek 2.3.1’de görüldüğü üzere Newton metodu ile az sayıda iterasyonla, yakınsaması çok hızlı yaklaşımlar yapmak mümkündür. Örnek 2.3.1’de sabit nokta metodu ile elde edilen yedinci iterasyon değerinden daha iyi bir yaklaşıma Newton metodunun ilk iterasyonunda rastlanmaktadır. Şimdi Newton metodunun neden bu kadar etkili olduğunu inceleyelim: Newton metodunun Taylor serisi kullanılarak yapılan inşasında p_0 başlangıç yaklaşımı büyük önem taşımaktadır. Aslında en kritik varsayım $|p - p_0|$ değerinin çok küçük olduğu ve dolayısıyla $(p - p_0)^2$ ifadesini içeren terimin ihmal edilebileceğidir. Bu varsayım p_0 başlangıç yaklaşımı p gerçek kök değerinden çok farklı olması durumunda geçersiz olacaktır. Eğer p_0 yaklaşımı gerçek kök değerine yeterince yakın değil ise Newton metodu ile yapılan yaklaşımda yakınsamanın sağlanamayacağı şüphesi oluşabilir. Çoğu durumda, istisnalar olmakla birlikte, zayıf başlangıç yaklaşımı altında dahi yakınsamanın gerçekleştiği gözlemlenmektedir.

Theorem 2.3.2. $f \in C^2[a, b]$ olsun. Eğer bir $p \in (a, b)$ için $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa, alınan her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç yaklaşımı için Newton metodu kullanılarak yaratılan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p kök değerine yakınsamasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. İspat Newton metodunun

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde bir fonksiyonel iterasyon olarak analiz edilmesi olgusuna dayanır. k sayısı $(0, 1)$ aralığında yer alsın. g fonksiyonunun kendini kendi içine resmettiği bir $[p-\delta, p+\delta]$ aralığını, her $x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği sağlanacak şekilde tespit edelim.

Analiz derslerinden biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a, b)$ olmak üzere $h(p) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a, b]$ 'nin bir alt aralığı olan $[p - \delta_1, p + \delta_1]$ aralığında yer alan her x değeri için $h(x) \neq 0$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta_1 > 0$ sayısı mevcuttur. $h \equiv f'$ olarak göz önüne alınabilir. Zira f' süreklidir ve $f'(p) \neq 0$ koşulunu sağlar. Buna göre bir $\delta_1 > 0$ sayısı için $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$ olmak üzere $f'(x) \neq 0$ eşitsizliği gerçekleşir. Diğer taraftan $f \in C^2[a, b]$ ve her $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$ için

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

olduğundan $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$ bulunur.

$f(p) = 0$ kabulü altında

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

olduğu sonucu elde edilir. Diğer taraftan yine analiz derslerinden biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a, b)$ olmak üzere $h(p) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a, b]$ 'nin bir alt aralığı olan $[p - \delta, p + \delta]$ aralığında yer alan her x değeri için $|h(x)| \leq k$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Gerekli koşulları sağladığından $h \equiv g'$ alınabilir. Bu durumda $0 < \delta < \delta_1$ koşulunu sağlayan bir δ sayısı için $x \in [p - \delta, p + \delta] \subseteq [a, b]$ olmak üzere $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği gerçekleşir.

Şimdi g fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığını kendi içine resmettiğini gösterelim: Ortalama Değer Teoremi'ne göre $x \in [p - \delta, p + \delta]$ için $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$ eşitliğini sağlayacak bir ξ sayısı x ile p arasında mevcuttur. Buna göre

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \leq k|x - p| < |x - p|$$

elde edilir. x sayısı $x \in [p - \delta, p + \delta]$ aralığında yer aldığından $|x - p| < \delta$ sağlanır ve dolayısıyla $|g(x) - p| < \delta$ olduğu sonucuna ulaşılır. $|g(x) - p| < \delta$ yazılımdan her $x \in [p - \delta, p + \delta]$ için $p - \delta \leq g(x) \leq p + \delta$ eşitsizliği elde edildiğinden g fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığını kendi içine resmettiği bulunur.

Yukarıda elde edilen tüm çıkarımlardan $g(x)$ fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin (Teorem 2.2.7) koşullarını sağladığı sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç yaklaşımı için p kök değerine yakınsar. $\square$

Teorem 2.3.2'den anlaşılacağı üzere uygun p_0 ilk yaklaşımı ile Newton metodu kök değerine yakınsayan bir dizi elde etmemize olanak tanır. Ayrıca g fonksiyonunun sınırı olan k sayısı yakınsamanın hızında önemli rol oynar. Buna göre k sayısı 0'a ne kadar yakın ise yakınsama o kadar hızlı olacaktır. Bu sonuç Newton metodu için önemli olmakla birlikte δ sayısının ne şekilde belirleneceği konusunda herhangi bir bilgi vermediğinden uygulamada nadiren kullanılır.

Örnek 2.3.3. $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $y = x^3 - 4x - 5$ ve $y = e^x - 4x - 5$ eğrilerinin bir kesim noktasını Newton metodunu ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. Bu iki eğri aynı bir (x, y) noktasında kesişeceğinden $x^3 - 4x - 5 = e^x - 4x - 5 \Rightarrow x^3 = e^x$ eşitliğini sağlayan x noktası ya da buna denk olarak $f(x) = x^3 - e^x$ fonksiyonunun kökleri aranmalıdır. $f(x)$ fonksiyonu her mertebeden sürekli türevlere sahip ve $f'(x) = 3x^2 - e^x$ türev fonksiyonu $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı için $f'(p_0) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - e^3 = 6.9145 \neq 0$ sağladığından Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ için gerekli işlemler aşağıdaki gibi yapılır:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{6.9145}{6.9145} = 2 \Rightarrow \\ |f(p_1)| &= |f(2)| = 0.61094 > \varepsilon \\ p_2 &= p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{0.61094}{4.6109} = 1.8675 \Rightarrow \\ |f(p_2)| &= |f(1.8675)| = 0.40915 \times 10^{-1} > \varepsilon \\ p_3 &= p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = 1.8675 - \frac{f(1.8675)}{f'(1.8675)} = 1.8675 - \frac{0.040915}{3.9906} = 1.8572 \Rightarrow \\ |f(p_3)| &= |f(1.8572)| = 0.63619 \times 10^{-4} < \varepsilon \end{aligned}$$

n	p_n	$ f(p_n) $
0	3	6.9145
1	2	0.61094
2	1.8675	0.40915×10^{-1}
3	1.8572	0.63619×10^{-4}

Buna göre yukarıda verilen iki eğrinin kesim noktasının apsisine, 10^{-3} hassaslıkla yapılan yaklaşımın değeri $p_3 = 1.8572$ olarak elde edilir.

2.3.2 Secant Metodu

Newton metodu çok güçlü bir kök bulma tekniği olmakla birlikte her iterasyonda f fonksiyonunun türevinin aldığı değerin kontrol edilmesi gerekliliği bir

zorluk olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırarak Newton metodundan daha zayıf bir metot elde etmek mümkündür.

Bir p_{n-1} noktasındaki türev

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

ifadesi ile verildiğinden p_{n-1} değerinin p_{n-2} 'ye yakın olduğu kullanılarak

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

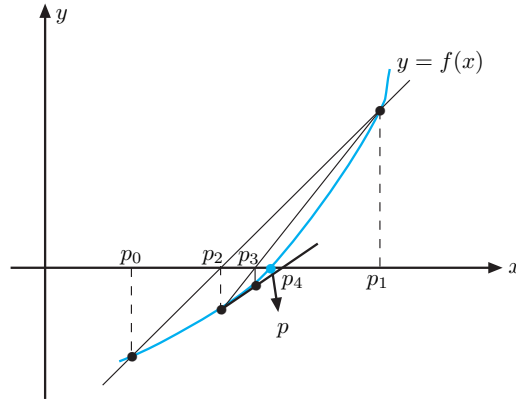
elde edilir. Bu yaklaşım değeri

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

şeklinde verilen Newton metodunda kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}} \\ &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ifadesine ulaşılır. Yukarıda ifade edilen kök bulma tekniğine **Secant Metodu** adı verilir (Bkz. Şekil 2.11). Sekant metodunda Newton'dan farklı olarak p_0 ve p_1 gibi iki tane başlangıç yaklaşımı belirlemek gerekir.



Şekil 2.11: Secant metodu

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.1’de göz önüne alınan $x = \cos x$ denkleminin çözümüne Secant metodunu kullanarak yaklaşımlarda bulununuz. Bulduğunuz bu yaklaşımları Newton metodu ile elde edilen yaklaşımlarla kıyaslayınız.

Çözüm. $f(x) = \cos x - x$ olmak üzere, Örnek 2.3.1’de $p_0 = \pi/4$ başlangıç yaklaşımı için Newton ve sabit nokta metotları ile elde edilen yaklaşımların karşılaştırılması yapılmıştı. Şimdi problemi Secant metodu ile çözelim. Bunun için iki tane başlangıç yaklaşımına ihtiyaç vardır. $p_0 = 0.5$ ve $p_1 = \pi/4$ olarak seçilsin. $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \\ &= p_{n-1} - \frac{(\cos p_{n-1} - p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \end{aligned}$$

iterasyonu yapılarak aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_n
0	0.5000000000
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Örnek 2.3.1’den biliyoruz ki on ondalık basamak kullanılarak yapılan yaklaşım ile elde edilen kök değeri 0.7390851332’dir ve bu değere Newton metodu ile p_3 yaklaşımında, Secant metodu ile p_5 yaklaşımında ulaşılmıştır. Bu örnekte Secant metodunun yakınsama hızı Newton metoduna göre daha yavaş iken sabit nokta iterasyonu metodunun yakınsama hızına kıyasla çok daha hızlıdır.

Örnek 2.3.5. $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ olmak üzere Secant Metodunu kullanarak $\ln x = \cos x$ denkleminin bir çözümünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = \ln x - \cos x$ olsun. Bu denklemin kökleri bize yukarıdaki eşitliği sağlayan x değerini verir. Şimdi Secant metodunu uygulayarak $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ için köke yaklaşım yapalım.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} = 1.2 - \frac{f(1.2)(1.2 - 1)}{f(1.2) - f(1)} \\
&= 1.2 - \frac{(-0.18004)(0.2)}{(-0.18004) - (-0.54030)} = 1.3 \\
f(p_2) &= f(1.3) = -0.51346 \times 10^{-2} \Rightarrow \\
|f(p_2)| &= |f(1.3)| = 0.51346 \times 10^{-2} > \varepsilon = 10^{-3} \\
p_3 &= p_2 - \frac{f(p_2)(p_2 - p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} = 1.3 - \frac{f(1.3)(1.3 - 1.2)}{f(1.3) - f(1.2)} \\
&= 1.3 - \frac{(-0.51346 \times 10^{-2})(1.3 - 1.2)}{(-0.51346 \times 10^{-2}) - (-0.18004)} = 1.3029 \\
f(p_3) &= f(1.3029) = -0.11084 \times 10^{-3} \Rightarrow \\
|f(p_3)| &= |f(1.3029)| = 0.11084 \times 10^{-3} \leq \varepsilon = 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre aranan kök $p \approx p_3 = 1.3029$ olarak hesaplanır.

n	p_n	$ f(p_n) $
0	1	$ -0.54030 $
1	1.2	$ -0.18004 $
2	1.3	$ -0.51346 \times 10^{-2} $
3	1.3029	$ 0.11084 \times 10^{-3} $

2.3.3 Regula Falsi Metodu

Eğer bir yaklaşımda Secant metodunu kullanarak iterasyonlar oluşturur, aynı zamanda ikiye bölme metodunda olduğu gibi her bir adımda kökü ihtiva eden aralığı test ederek ilerlersek **Regula Falsi Metodu** ile bir yaklaşımda bulunmuş oluruz.

Bu metotla önce $f(p_0)f(p_1) < 0$ koşulunu sağlayan p_0 ve p_1 başlangıç yaklaşımları seçilir. Daha sonra Secant metodunda elde edilen iteratif formül kullanılarak, $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta olan p_2 yaklaşımı bulunur. p_3 yaklaşımını elde etmek için $f(p_0)$, $f(p_1)$ ve $f(p_2)$ değerlerinin işaretlerine bakılır. Eğer $f(p_1)f(p_2) < 0$ ise $(p_1, f(p_1))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Eğer $f(p_0)f(p_2) < 0$ ise $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Bu prosedür tekrarlanarak $p_4, p_5, \dots$ yaklaşımları bulunur.

Şekil 2.12'de grafik anlamda Secant ve Regula Falsi metodu arasındaki fark gösterilmektedir. Secant metodunda işaretine bakılmaksızın elde edilen ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği noktanın yeni yaklaşım değeri olarak elde edilmesine karşın, Regula Falsi metodunda ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği yeni yaklaşım noktasının işaretinin kendinden önceki iki yaklaşımın işaretleri ile karşılaştırılması yapılmaktadır. Şekil 2.12'de görüldüğü üzere Secant ve Regula