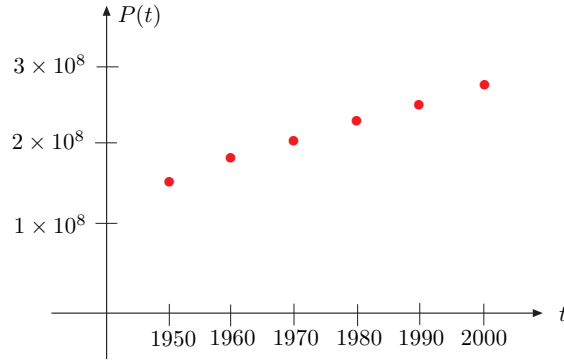


3 İnterpolasyon ve Polinomsal Yaklaşımlar

3.0.2 Giriş

Amerika Birleşik Devletleri'nde her 10 yılda bir nüfus sayımı yapılmaktadır. Buna göre 1950 ile 2000 yılları arasında yapılan nüfus sayımı sonucu elde edilen veriler aşağıdaki tabloda ve grafikte gösterilmektedir:

Yıl	Nüfus
1950	151,326,000
1960	179,323,000
1970	203,302,000
1980	226,542,000
1990	249,633,000
2000	281,422,000



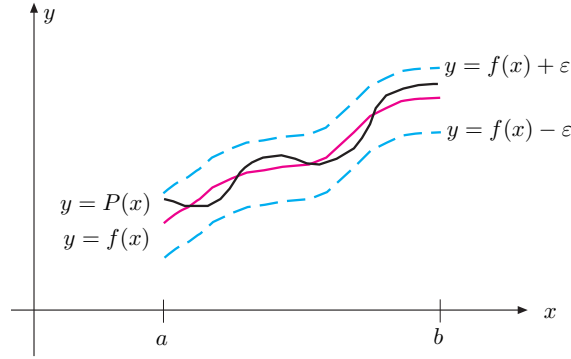
Verilen datalar ışığında 1975 ve hatta 2020 yılında oluşacak nüfus yoğunluğu hakkında bir yaklaşım yapılması istenebilir. Bu tip bir kestirim yapmak için söz konusu noktalardan geçen bir fonksiyon kullanılır. Bu prosese interpolasyon adı verilir.

3.1 Interpolasyon ve Lagrange Polinomu

Reel sayılar cümlesini kendi içine resmeden en kullanışlı ve iyi bilinen fonksiyonlar sınıfı, n negarif olmayan bir tamsayı ve $a_0, \dots, a_n$ reel sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

formundaki *cebirsel polinom*lardır. Bu tip fonksiyonların önemi düzgün yaklaşık sürekli fonksiyonlar olmalarıdır. Yani, kapalı bir aralıkta tanımlı ve sürekli her fonksiyona istenildiği kadar *yakın* bir polinom vardır. Bu durum Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nde açıkça ortaya koyulmaktadır (Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Polinom ile bir fonksiyona yaklaşma

Teorem 3.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $P(x)$ polinomu

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad x \in [a, b]$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde mevcuttur.

Bu teoremin ispatı herhangi bir reel analiz kitabında bulunabilir.

Fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım yapılmasının bir diğer önemli nedeni ise türev ve integral değerlerinin kolayca hesaplanması ve sonuçta elde edilen fonksiyonun da yine bir polinom olmasıdır.

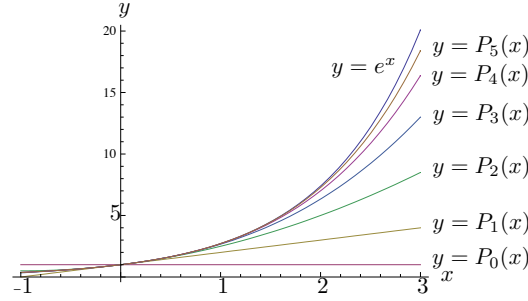
Bölüm 1.1'de Taylor polinomları incelenirken nümerik analizin temel unsurlarından biri olduğu vurgulanmıştı. Bu algıyla polinom yaklaşımında özellikle Taylor polinomlarının kullanılacağı gibi bir beklenti oluşabilir. Fakat, Taylor polinomları ile, etrafında açıldığı noktada tam, bu noktanın civarında yaklaşık ve noktadan uzaklaştıkça hassaslığı kötü yaklaşımlar elde edildiğinden polinom yaklaşımından bekleneni gerçeklemezler. Bunun yerine bir aralık boyunca istenen hassaslığı gerçekleyen bir polinom kullanmak gerekir. Örneğin, $f(x) = e^x$

fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki ilk altı Taylor polinomu göz önüne alınsın:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \text{ ve } P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Yukarıdaki polinomlara ait grafikler Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Her ne kadar yüksek mertebeden polinomlar kullanılsa da sıfır noktasından uzaklaştıkça oluşan hata değeri daha da büyümeaktadır.



Şekil 3.2: $f(x) = e^x$ fonksiyonunun grafiği

$f(x) = e^x$ fonksiyonu için daha iyi yaklaşımlar yüksek mertebeden Taylor polinomları için elde edilmiş olsa da bu durum bütün sürekli fonksiyonlarda geçerli değildir. Ters örnek olarak, $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ civarındaki Taylor polinomunu kullanarak $f(3) = 1/3$ değerine yapılan yaklaşımı göz önüne alalım:

$$f(x) = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = (-1)^2 2x^{-3}$$

ve en genel halde türev formülü

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}$$

olduğundan Taylor polinomları

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k$$

formülünden elde edilir. Artan n değerleri için $P(3) = 1/3$ değerine yapılan yaklaşımda $P_n(x)$ polinomları kullanıldığında elde edilen sonuçlar aşağıda listelenmektedir. Buna göre n değeri büyüdükçe yaklaşımdan elde edilen sonuçlar kabul edilemez hale gelmekte, hata göz ardı edilebilir olmaktan çıkmaktadır.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

3.1.1 Lagrange Interpolasyon Polinomları

$f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ olsun. Yani f fonksiyonu (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçsin. Şimdi bu noktalardan geçen, yani (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarında f fonksiyonunu kesen birinci dereceden **interpolasyon** polinomunun ne şekilde yazılabileceğini araştıralım. Zira bu polinom yardımı ile (x_0, x_1) aralığında yer alan değerler için verilen fonksiyona, elde edilen en fazla birinci dereceden interpolasyon polinomu ile yaklaşım yapılabilir.

Şimdi

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen lineer **Lagrange interpolasyon polinomu**

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0 \quad \text{ve} \quad L_1(x_1) = 1$$

olduğu kullanılarak

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

ve

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

elde edilir. Yani, yukarıdaki şekilde tanımlanan P fonksiyonu (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen derecesi en fazla 1 olan tek türlü belirli bir interpolasyon polinomudur.

Örnek 3.1.2. $(2, 4)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm. $x_0 = 2, y_0 = 4, x_1 = 5$ ve $y_1 = 1$ olmak üzere

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{2 - 5} = -\frac{1}{3}(x - 5) \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{1}{3}(x - 2)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre istenen lineer Lagrange polinomu

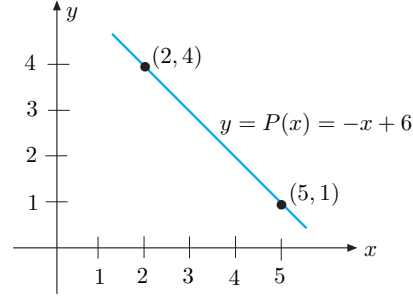
$$P(x) = -\frac{1}{3}(x - 5) \cdot 4 + \frac{1}{3}(x - 2) \cdot 1 = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6$$

olarak elde edilir. $y = P(x)$ polinomunun grafiği Şekil 3.3'de gösterilmektedir.

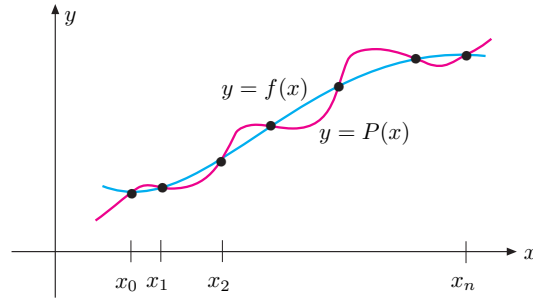
Lineer interpolasyon konseptini genelleştirmek için

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

gibi $n + 1$ farklı noktadan geçen en fazla n . dereceden bir polinom inşa etmeye çalışalım (Bkz. Şekil 3.4).



Şekil 3.3: $f(x) = -x + 6$ doğrusunun grafiği



Şekil 3.4: $n + 1$ noktadan geçen Lagrange interpolasyon polinomu

Öncelikle $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $L_k(x_k) = 1$ ve $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ değerlerini alacak bir fonksiyon tanımlayalım. $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesi için $L_k(x)$ 'in payının

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

şeklinde bir terim içermesi gerekir. Diğer taraftan $L_k(x_k) = 1$ olması için ise paydanın yukarıda verilen eşitlikte $x = x_k$ alınmasıyla elde edilen ifadeye denk olması gerekir. Buna göre fonksiyonu

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

şeklinde tanımlarsak isteneni sağlamış oluruz.

Teorem 3.1.3. $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ tane farklı nokta ve f , bu noktalarda aldığı değerler bilinen bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için en

fazla n . mertebeden bir polinom

$$f(x_k) = P(x_k)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. Bu polinom

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \quad k=0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır ve n . **Lagrange İnterpolasyon Polinomu** adını alır.

Örnek 3.1.4. (a) $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ ve $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için ikinci Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

(b) Yukarıda elde edilen polinomu kullanarak $f(3) = 1/3$ değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

(a) Öncelikle $L_0(x)$, $L_1(x)$ ve $L_2(x)$ katsayı polinomlarını tespit edelim:

$$L_0(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

and

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

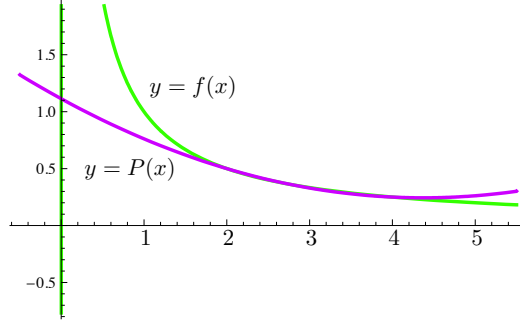
Diğer taraftan $f(x_0) = f(2) = 1/2$, $f(x_1) = f(2.75) = 4/11$ ve $f(x_2) = f(4) = 1/4$ değerleri

$$P(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x)$$

ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{4}{11} \frac{16}{15}(x-2)(x-4) + \frac{1}{4} \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75) \\ &= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44} \end{aligned}$$

ikinci Lagrange interpolasyon polinomu elde edilir (Bkz Şekil 3.5).



Şekil 3.5: $f(x) = 1/x$ ve $P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$ fonksiyonlarının grafikleri

- (b) Yukarıda elde edilen polinom kullanılarak $f(3) = 1/3$ değerine bir yaklaşım

$$f(3) \approx P(3) = \frac{1}{22}3^2 - \frac{35}{88}3 + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32954$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü üzere Lagrange interpolasyon polinomu kullanıldığında elde edilen bu yaklaşım, bölümün başında $x_0 = 1$ civarında $f(x) = 1/x$ fonksiyonunu çeşitli mertebelerden Taylor polinomuna açmak suretiyle elde edilen $f(3)$ yaklaşımlarına kıyasla çok çok daha iyidir.

Teorem 3.1.5. $x_0, x_1, \dots, x_n$ birbirinden farklı $[a, b]$ aralığında $n + 1$ tane nokta ve $f \in C^{n+1}[a, b]$ olsun. Buna göre $P(x)$, (3.2) ile verilen interpolasyon polinomu olmak üzere her $x \in [a, b]$ için $x_0, x_1, \dots, x_n$ arasında ve dolayısıyla (a, b) içinde

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlayan bir $\xi(x)$ sayısı mevcuttur.

Kanıt. Herhangi bir $k = 0, 1, \dots, n$ için $x = x_k$ alınırsa $f(x_k) = P(x_k)$ olduğundan (a, b) aralığından seçilen herhangi bir $\xi(x_k)$ sayısı (3.3) eşitliğini gerçektir. Zira, bu durumda yukarıdaki şekilde tanımlanan polinom kullanılarak yapılan yaklaşım tam sonuç vereceğinden yaklaşımın hatası sıfır olacaktır.

Her $k = 0, 1, \dots, n$ için $x \neq x_k$ olsun. Şimdi $t \in [a, b]$ olmak üzere bir g fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f \in C^{n+1}[a, b]$ ve $P \in C^\infty[a, b]$ olduğundan $g \in C^{n+1}[a, b]$ 'dir. Eğer $t = x_k$ ise

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{x_k - x_i}{x - x_i} = 0 - [f(x) - P(x)] \times 0 = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca $t = x$ için

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x - x_i} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

dır. Buna göre $g \in C^{n+1}[a, b]$ fonksiyonunun $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi $n+2$ tane farklı noktada sıfır yeri vardır. Dolayısıyla Genelleştirilmiş Rolle Teoremi'ne (Theorem 1.1.10) göre (a, b) aralığında bir ξ sayısı için $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ eşitliği gerçekleşir. Buradan

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} \right)_{t=\xi} \quad (3.4)$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan $P(x)$, en fazla n . mertebeden bir polinom olduğundan $(n+1)$. türev ifadesi $P^{(n+1)}(x)$, sıfıra denktir. Ayrıca $\prod_{i=0}^n \frac{t-x_i}{x-x_i}$ çarpım sonucu $(n+1)$. dereceden bir polinom olduğundan, bu polinom

$$\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} = \left(\frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \right) t^{n+1} + (t\text{'nin diğer daha düşük dereceden terimleri})$$

şeklinde yazılır ve $(n+1)$. türevi alınırsa

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla (3.4) eşitliği

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

olarak ifade edilebilir. Son eşitlik $f(x)$ 'e göre yazılırsa

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

elde edilir. Bu ise doğruluğu gösterilmesi istenen ifadedir. $\square$

Theorem 3.1.5 ile verilen hata formülü nümerik diferansiyel ve integral formüllerinin elde edilmesinde Lagrange polinomlarının kullanılmasından dolayı büyük önem taşımaktadır. Daha sonra üzerinde durulacağı üzere, bu tekniklerde hata sınırı Lagrange hata formülü kullanılarak elde edilecektir.

Lagrange ve Taylor polinomlarının hata terimleri birbirlerine benzer. Bir x_0 civarında açılan n . Taylor polinomunun hata terimi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

formundandır ve polinom sadece x_0 noktasında verilen bilgilerle oluşturulur. $x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi farklı noktalar için yazılan n . Lagrange polinomu ise tüm bu noktalarda verilen bilgiler ile yazılır ve hata terimi $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ şeklinde $n+1$ tane terimin çarpımını içerir:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Örnek 3.1.6. Örnek 3.1.4'de $[2, 4]$ aralığında $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ ve $x_2 = 4$ noktaları kullanarak ikinci Lagrange polinomu elde edilmişti. Bu polinoma ait hatanın formunu belirleyiniz ve $x \in [2, 4]$ için $f(x)$ fonksiyonuna ikinci Lagrange polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımlarda oluşacak hata için bir sınır tespit ediniz.

Çözüm. $f(x) = 1/x = x^{-1}$ olduğundan gerekli türevler

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3} \quad \text{ve} \quad f'''(x) = -6x^{-4}$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla $\xi \in (2, 4)$ olmak üzere ikinci Lagrange polinomunun hata terimi

$$\frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = -(\xi(x))^{-4}(x-2)(x-2.75)(x-4)$$

olarak elde edilir. Şimdi bu hata için bir üst sınır belirleyelim: verilen $[2, 4]$ aralığında $(\xi(x))^{-4}$ ifadesinin alabileceği maksimum değer $2^{-4} = 1/16$ 'dır. Diğer taraftan

$$g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4) = x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22$$

polinomunun türevi

$$D_x \left(x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22 \right) = 3x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{49}{2} = \frac{1}{2}(3x-7)(2x-7)$$

olduğundan kritik noktalar $x = 7/3$ ve $x = 7/2$ şeklinde tespit edilir. Bu noktalarda $g(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler

$$g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{108} \approx 0.2314814815 \quad \text{ve} \quad g\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{9}{16} = -0.5625$$

dir. Dolayısıyla maksimum hata değeri

$$\left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right| \leq \frac{1}{16} \left| -\frac{9}{16} \right| = \frac{9}{256} \approx 0.3515625 \times 10^{-1}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.7. $x \in [0, 1]$ olmak üzere $f(x) = e^x$ fonksiyonunun değerleri için bir tablo, her bir girdi $d \geq 8$ ondalık basamak kullanılarak ve birbirine komşu x değerleri arasındaki mesafe, adım uzunluğu, birbirine eşit ve h olacak şekilde hazırlanmış olsun. Buna göre hangi h adım uzunluğu için mutlak hatası en fazla 10^{-6} olan bir lineer interpolasyon polinomu yazılabilir?

Çözüm. f fonksiyonu $x_0, x_1, \dots$ noktalarında hesaplanmış olsun ve $x \in [0, 1]$ için bir j indisi $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ eşitsizliğini sağlansın. (3.3) denklemi bir lineer interpolasyonda hatanın

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_j)(x - x_{j+1}) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |x - x_j| |x - x_{j+1}|$$

formunda olduğunu söyler. Adım aralığı h olduğundan $x_j = jh$ ve $x_{j+1} = (j+1)h$ 'dir ve buna göre

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \left(\max_{\xi \in [0,1]} \frac{e^\xi}{2} \right) \left(\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \right) \\ &\leq \frac{e}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \end{aligned}$$

elde edilir. $jh \leq x \leq (j+1)h$ olmak üzere $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Şimdi bu fonksiyonun mutlak değerce maksimum yaptığı yeri bulalım. Biliyoruz ki verilen fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları ya sınırlarda ya da türevinin sıfır olduğu yerlerde. Buna göre

$$g'(x) = (x - (j+1)h) + (x - jh) = 2 \left(x - jh - \frac{h}{2} \right)$$

olduğundan fonksiyonun aralık içerisindeki tek kritik noktası $x = jh + h/2$ 'dir. Bu noktada fonksiyonun aldığı değer $g(jh + h/2) = (h/2)^2 = h^2/4$ iken sınır noktalarda aldığı değerler $g(jh) = g((j+1)h) = 0$ olarak tespit edilir. Buna göre $|g(x)|$ fonksiyonu $[jh, (j+1)h]$ aralığında maksimum değerini kritik noktasında alır. Dolayısıyla

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{e}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| \leq \frac{e}{2} \frac{h^2}{4} = \frac{eh^2}{8}$$

elde edilir. Bu lineer interpolasyon yaklaşımında oluşacak hata 10^{-6} ile sınırlı olduğundan

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en küçük h değerinin seçilmesi gerekir. Buna göre

$$\frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6} \Rightarrow h^2 \leq 10^{-6} \frac{8}{e} \Rightarrow h \leq \sqrt{10^{-6} \frac{8}{e}} \Rightarrow h \leq 1.71552777 \times 10^{-3}$$

olmalıdır. n alt aralık sayısı $n = \frac{1-0}{h}$ formülü ile hesaplanan bir tamsayı olduğundan adım uzunluğunu $h = 0.001$ şeklinde almak istenen hassaslığa ulaşılmasını garantiler.

Örnek 3.1.8. (a) $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarında $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ fonksiyonunu kesen ikinci Lagrange interpolasyon polinomu $P_2(x)$ 'i yazınız.

(b) $|f(x) - P_2(x)|$ değeri için bir sınır belirleyiniz.

Çözüm.

(a) Önce Lagrange katsayı fonksiyonlarını hesaplayalım:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - x),$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{-1} = 1 - x^2,$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{(x + 1)x}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + x).$$

Ayrıca $f(x_0) = f(-1) = \sin \frac{-\pi}{2} = -1$, $f(x_1) = f(0) = \sin 0 = 0$ ve $f(x_2) = f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ olduğundan $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarında $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ fonksiyonunu kesen ikinci Lagrange interpolasyon polinomu

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= (-1)\frac{1}{2}(x^2 - x) + 0(1 - x^2) + (1)\frac{1}{2}(x^2 + x) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2 + x + x^2 + x) = \frac{1}{2}(2x) = x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(b) Gerekli türevler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}, f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}, f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}, f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

İstenen mutlak değer, $\xi(x)$ sayısı -1 ile 1 arasında olmak üzere

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi \xi(x)}{2}}{3!} (x+1)(x-0)(x-1) \right| \\
&= \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!} \underbrace{\left| \cos \frac{\pi \xi(x)}{2} \right|}_{\leq 1} |x^3 - x| \leq \frac{\pi^3}{48} |x^3 - x|
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $|x^3 - x|$ ifadesinin maksimum yaptığı noktayı bulalım. $g(x) = x^3 - x$ olarak göz önüne alınsın. Buna göre $g(-1) = g(1) = 0$ ve

$$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

için

$$\left| g\left(\pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \right| = \left| \left(\pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(\pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

olduğundan

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3}{48} |x^3 - x| \leq \frac{\pi^3}{48} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - x| = \frac{\pi^3}{48} \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.9. $g(x)$ fonksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ve $h(x)$ fonksiyonu $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında $f(x)$ fonksiyonunu interpolate ediyor ise

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$

şeklinde tanımlanan $k(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ 'i $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarında interpolate ettiğini gösteriniz.

Çözüm. $g(x)$ fonksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ noktalarında $f(x)$ 'i interpolate ettiğinden

$$0 \leq i \leq (n-1) \text{ için } g(x_i) = f(x_i)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $h(x)$ fonksiyonu $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında $f(x)$ 'i interpolate ettiğinden

$$1 \leq i \leq n \text{ için } h(x_i) = f(x_i)$$

eşitliği gerçekleşir. Buna göre

$$1 \leq i \leq (n-1) \text{ için } g(x_i) = h(x_i)$$

dir. Şimdi

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$