

şeklinde oluşturulur. 4-dijit ile $f(2.1) = \ln 2.1 = 0.7419$ olduğundan mutlak hata

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}$$

dir. Bununla beraber $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ ve $f'''(x) = 2/x^3$ olduğundan Teorem 3.1.5 ile verilen Lagrange hata terimi için bir sınır

$$\begin{aligned} |f(2.1) - P_2(2.1)| &= \left| \frac{f'''(\xi(2.1))}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3(\xi(2.1))^3} (0.1)(-0.1)(-0.2) \right| \\ &\leq \frac{0.002}{3} \max_{2.0 \leq \xi \leq 2.3} \left| \frac{1}{(\xi(2.1))^3} \right| = \frac{0.002}{3} \frac{1}{2^3} = 8.3 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu örnekte, gerçek hata değerinin bulunan hata üst sınırından küçük olmasının nedeni sonlu-dijit aritmetiğinin kullanılmasının bir sonucudur.

Örnek 3.2.7. Neville metodunu kullanarak $f(0.5)$ değerini bulmak için yapılan hesaplamalar sonucunda $x_0 = 0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.7$, $Q_{0,0} = 0$, $Q_{1,0} = 2.8$, $Q_{2,0} = \alpha$, $Q_{1,1} = 3.5$, $Q_{2,1} = \beta$, $Q_{2,2} = 27/7$ olarak belirlendiğine göre α ve β değerlerini tespit ediniz.

Çözüm. Önce Neville tablosunu oluşturalım:

x_i	$f(x_i) = Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$
$x_0 = 0.0$	$0.0 = Q_{0,0}$		
$x_1 = 0.4$	$2.8 = Q_{1,0}$	$3.5 = Q_{1,1}$	
$x_2 = 0.7$	$\alpha = Q_{2,0}$	$\beta = Q_{2,1}$	$27/7 = Q_{2,2}$

Buna göre

$$Q_{2,2}(0.5) = \frac{(0.5 - x_0)Q_{2,1} - (0.5 - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} \Rightarrow \frac{27}{7} = \frac{(0.5 - 0)\beta - (0.5 - 0.7)3.5}{0.7 - 0}$$

olduğundan $Q_{2,1} = \beta = 4$ elde edilir. Ayrıca

$$Q_{2,1}(0.5) = \frac{(0.5 - x_1)Q_{2,0} - (0.5 - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} \Rightarrow 4 = \frac{(0.5 - 0.4)\alpha - (0.5 - 0.7)2.8}{0.7 - 0.4}$$

ifadesinden $Q_{2,0} = \alpha = 6.4$ sonucuna ulaşılır.

3.3 Bölünmüş Farklar

$x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi $n + 1$ tane farklı noktada f fonksiyonun interpolate eden n . Lagrange polinomu $P_n(x)$ ile gösterilsin. Her ne kadar bu polinom tek türlü belirli olsa da bazı durumlarda avantaj sağlaması bakımından farklı cebirsel gösterilimleri kullanılabilir. f fonksiyonunun $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarına göre bölünmüş farkları $a_0, a_1, \dots, a_n$ 'ler uygun sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (3.5)$$

formundaki $P_n(x)$ polinomu ile ifade edilir. Öncelikle bu sabitleri tespit etmek için bir metot geliştirelim: (3.5) ifadesinde $x = x_0$ yazarsak sıfırdan farklı tek terim a_0 katsayısı olur. Buna göre

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

dır. Şimdi, Bölüm 2.5'de kullanılan Aitken Δ^2 notasyonu ile ilişkili olarak bölünmüş fark notasyonunu tanımlayalım. x_i noktasına göre f fonksiyonunun *sıfırıncı bölünmüş farkı* $f[x_i]$ ile gösterilir ve f 'nin x_i noktasındaki değeri

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde $P_n(x)$ polinomu x_1 noktasında hesaplanırsa, $P(x_1)$ ifadesindeki sıfırdan farklı terimler için

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

olduğundan

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (3.7)$$

elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarına göre *birinci bölünmüş farkı* $f[x_i, x_{i+1}]$ ile gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.

Rekürsif olarak *ikinci bölünmüş fark*, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ şeklinde gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

olarak tanımlanır.

$k - 1$ bölünmüş fark işlemi sonrasında

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] \quad \text{ve} \quad f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

terimleri elde edilmiş olur ve bunlara bağlı olarak f fonksiyonunun $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ noktalarına göre **k . bölünmüş farkı** $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \quad (3.9)$$

Son olarak verilen f fonksiyonunun n . *bölünmüş farkı*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde tanımlanır. (3.7) ifadesinden $a_1 = f[x_0, x_1]$ ve $a_0 = f(x_0) = f[x_0]$ olarak yazılabildiğinden (3.5) ile verilen interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1})$$

formunda bir gösterilime sahiptir. a_0 ve a_1 katsayılarının hesabından da sezildiği üzere aranan katsayılar $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

formundadır. Dolayısıyla f fonksiyonunun *Newton bölünmüş farkı* $P_n(x)$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1}) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ değeri $x_0, x_1, \dots, x_k$ sayılarının sırasına bağlı değildir.

Tabloda 3.1’de bölünmüş farkların ne şekilde hesaplandığı özetlenmektedir.

Tablo 3.1: Bölünmüş farklar tablosu

x	Birinci bölünmüş farklar	İkinci bölünmüş farklar	Üçüncü bölünmüş farklar
x_0	$f[x_0]$		
x_1	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
x_5	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
	Dördüncü bölünmüş farklar	Beşinci bölünmüş farklar	
	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0}$	
	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_1}$		

Örnek 3.3.1. Aşağıdaki tablo ile bazı noktalardaki değerleri verilen ve daha önceden Örnek 3.2.1’de incelenen değerler ile bölünmüş farklar tablosu oluşturunuz ve tüm bu verileri kullanarak bir interpolasyon polinomu inşa ediniz.

x	$f(x)$
$x_0 = 1.0$	0.7651977
$x_1 = 1.3$	0.6200860
$x_2 = 1.6$	0.4554022
$x_3 = 1.9$	0.2818186
$x_4 = 2.2$	0.1103623

Çözüm. x_0 ve x_1 ’i içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.6200860 - 0.7651977}{1.3 - 1.0} = -0.4837057,$$

x_1 ve x_2 ’yi içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0.4554022 - 0.6200860}{1.6 - 1.3} = -0.5489460,$$

x_2 ve x_3 ’ü içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{0.2818186 - 0.4554022}{1.9 - 1.6} = -0.5786120,$$

ve son olarak da x_3 ve x_4 ’ü içeren birinci bölünmüş fark ise

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{0.1103623 - 0.2818186}{2.2 - 1.9} = -0.5715210$$

şeklinde elde edilir. Şimdi ikinci bölünmüş farkları sırası ile elde edelim:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.5489460 - (-0.4837057)}{1.6 - 1.0} \\ &= -0.1087339, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-0.5786120 - (-0.5489460)}{1.9 - 1.3} \\ &= -0.0494433, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-0.5715210 - (-0.5786120)}{2.2 - 1.6} \\ &= 0.0118183. \end{aligned}$$

İkinci bölünmüş farkları kullanarak üçüncü bölünmüş farklar

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\
&= \frac{-0.0494433 - (-0.1087339)}{1.9 - 1.0} = 0.0658784,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f[x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} \\
&= \frac{0.0118183 - (-0.0494433)}{2.2 - 1.3} = 0.0680685
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak da dördüncü bölünmüş fark ise

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} \\
&= \frac{0.0680685 - 0.0658784}{2.2 - 1.0} = 0.0018251
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
1	1.3	0.6200860	-0.4837057			
2	1.6	0.4554022	-0.5489460	-0.1087339		
3	1.9	0.2818186	-0.5786120	-0.0494433	0.0658784	
4	2.2	0.1103623	-0.5715210	0.0118183	0.0680685	0.0018251

Tabloda kalın font ile gösterilen değerler interpolasyon polinomunun *Newton ileri bölünmüş farklar* formunun katsayılarıdır. Buna göre polinom

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) \\
&\quad + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\
&\quad + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer bu polinom kullanılarak $x = 1.5$ değeri hesaplanırsa $P_4(1.5) = 0.5118200$ sonucuna ulaşılır. Buna göre $f(1.5) \approx P_4(1.5)$ 'dir. Aslında bu yaklaşım değeri Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.5'de elde edilmişti. Bu durum her ne kadar formları farklı olsa da polinomun tek türlü belirli olmasından, yani aynı polinomun farklı formlarının göz önüne alınmasından kaynaklanmaktadır.

Örnek 3.3.2. $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 12)$ ve $(5, 147)$ değerleri verilsin. Üçüncü Newton bölünmüş fark formülünü kullanarak verilen noktalardan geçen, $P_3(x)$, Lagrange interpolasyon polinomunu Newton formunda yazınız ve $P_3(3)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm. Newton bölünmüş farklar tablosu verilen değerler için aşağıdaki gibi elde edilir:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
$x_0 = 0$	$2 = a_0$			
		$1 = a_1$		
$x_1 = 1$	3		$4 = a_2$	
		9		$1 = a_3$
$x_2 = 2$	12		9	
		45		
$x_3 = 5$	147			

Buna göre

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= 2 + 1(x - 0) + 4(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2) \\
 &= 2 - x + x^2 + x^3
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla istenen $P_3(3)$ değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$P_3(x) = 2 - 3 + 3^2 + 3^3 = 35.$$

Örnek 3.3.3. $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$ ve $x_5 = 3$ olmak üzere Newton bölünmüş fark formülü x_0, x_1, x_2, x_3 noktaları için uygulandığında bu noktalardan geçen interpolasyon polinomu

$$P_3(x) = 4 - 2(x + 2) + \frac{1}{2}(x + 2)(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 2)(x + 1)x$$

şeklinde elde ediliyor. Ayrıca

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4, x_5] = -1/3$$

olduğu bilindiğine göre $P_5(x)$ interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm. Dört noktadan geçen $P_3(x)$ Newton formunda Lagrange interpolasyon polinomu

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

olduğundan soruda verilen bilgiden $a_0 = 4, a_1 = -2, a_2 = 1/2$ ve $a_3 = 1/6$ olduğu görülür. Beşinci derece Lagrange interpolasyon polinomunu yazmak için bunlara ek olarak a_4 ve a_5 katsayıları tespit edilmelidir. $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4, x_5] = -1/3$ olarak verildiğine göre

...	Üçüncü bölünmüş farklar	Dördüncü bölünmüş farklar	Beşinci bölünmüş farklar
.	$a_3 = 1/6$		
.		$\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{2-(-2)} = -\frac{1}{8} = a_4$	
.	$-1/3$		$\frac{0+\frac{1}{8}}{3-(-2)} = \frac{1}{40} = a_5$
.		$\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{3-(-1)} = 0$	
.	$-1/3$		

olduğundan

$$P_5(x) = P_3(x) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ + a_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

yani

$$P_5(x) = P_3(x) - \frac{1}{8}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) + \frac{1}{40}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)$$

şeklinde yazılır.

(3.8) eşitliğine Ortalama Değer Teoremi (Teorem 1.1.8), $i = 0$ için uygulanırsa

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olduğundan f' türevinin mevcut olması durumunda x_0 ile x_1 arasındaki bir ξ sayısının $f'(\xi) = f[x_0, x_1]$ eşitliğini sağlayacak şekilde varlığını garantiler. Aşağıdaki teorem bu sonucun bir genelleştirilmesidir.

Teorem 3.3.4. $f \in C^n[a, b]$ ve $x_0, x_1, \dots, x_n, [a, b]$ aralığında birbirinden farklı sayılar olsun. Buna göre (a, b) aralığında

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

eşitliğini sağlayan bir ξ sayısı vardır.

Kanıt.

$$g(x) = f(x) - P_n(x)$$

şeklinde tanımlansın. Her $i = 0, 1, \dots, n$ için $f(x_i) = P_n(x_i)$ olduğundan g fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında $n + 1$ farklı sıfırı vardır. Dolayısıyla Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi'ne (Teorem 1.1.10) göre (a, b) aralığında $g^{(n)}(\xi) = 0$ eşitliğini sağlayan bir ξ sayısı mevcuttur. Buna göre

$$0 = g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = P_n^{(n)}(\xi)$$

yazılabilir. $P_n(x)$, katsayıları $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ şeklinde belirlenen n . dereceden bir polinom olduğundan n . türevi her x için

$$P_n^{(n)}(x) = n!f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

dir. Sonuç olarak

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{P_n^{(n)}(\xi)}{n!}$$

ifadesi elde edilir. $\square$

Newton bölünmüş fark formülü göz önüne alınan noktaların hepsinin eşit aralıklı olması durumunda daha basit bir formda ifade edilebilir. Bu durumda her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $h = x_{i+1} - x_i$ şeklinde tanımlansın ve $x = x_0 + sh$ olsun. Dolayısıyla $x - x_i$ farkı $x_i = x_0 + ih$ olduğu kullanılarak $x - x_i = (s-i)h$ şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (3.10) formülü

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + s(s-1)\dots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^n s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

haline gelir.

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

olarak tanımlanan Binom katsayıları yukarıda elde edilen $P_n(x)$ ifadesinde kullanılırsa

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (3.11)$$

formülüne ulaşılır.

3.3.1 İleri Farklar

Newton ileri fark formülü, Δ^2 Aitken metodunda ifade edilen ileri fark formülü Δ kullanılarak da inşa edilebilir. Bu notasyon ile

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) = \frac{1}{h}\Delta f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h} \left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \right) = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

ve en genel halde

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f(x_0)$$

elde edilir. $f[x_0] = f(x_0)$ olduğu kullanılarak (3.11) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Newton İleri Fark Formülü

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0). \quad (3.12)$$

3.3.2 Geri Farklar

Eğer interpolasyon noktaları sondan başa doğru $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ şeklinde dizilir ise interpolasyon formülü

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

olarak elde edilir.

Eğer verilen noktalar $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i - x_{i-1} = h$ eşitliğini sağlıyorsa yani, noktaların hepsi eşit aralıklı ise $x = x_n + sh$ ve $x - x_i = (s + n - i)h$ olmak üzere

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) \\ = f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\ + s(s+1) \dots (s+n-1)h^n f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

eşitliğini sağlayan **Newton geri fark formülü** elde edilir. Bu formülü daha kompakt hale getirmek için aşağıdaki tanıma ihtiyaç vardır:

Tanım 3.3.5. Verilen bir $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi için geri fark ∇p_n (*nabla p_n* olarak okunur)

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}, \quad n \geq 1$$

olarak ve daha yüksek mertebeler rekürsif olarak

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n), \quad k \geq 2$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 3.3.5'e göre

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

ve en genel halde

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f(x_n)$$

formülü elde edilir. Sonuç olarak

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_n) + \dots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!} \nabla^n f(x_n)$$

eşitliğine ulaşılır. Binom katsayı notasyonunun s 'nin tüm reel sayı değerlerine genişletilmesi ile elde edilen

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!}$$

ifadesi kullanılarak

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) \\ + \cdots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

formülü elde edilir.

Newton Geri Fark Formülü

$$P_n(x) = f(x_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n). \quad (3.13)$$

Örnek 3.3.6. Örnek 3.3.1’de verilen dataları kullanarak eşit aralıklı noktalar için Newton ileri fark tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir:

i	x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
0	1.0	<u>0.7651977</u>				
			<u>-0.1451117</u>			
1	1.3	0.6200860	-0.1646838	<u>-0.0195721</u>		
					<u>0.0106723</u>	
2	1.6	0.4554022	-0.1735836	-0.0088998	0.0110271	<u>0.0003548</u>
					<u>0.0021273</u>	
3	1.9	0.2818186	<u>-0.1714563</u>			
4	2.2	<u>0.1103623</u>				
i	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$	$\nabla^3 f(x_i)$	$\nabla^4 f(x_i)$

Her ne kadar Newton geri ve ileri fark formüllerinin kullanılma koşulu olan eşit aralıklı noktalar ile işlem yapma zorunluluğu bölünmüş fark formülünü kullanmak için bir gereklilik olmasa da ileride bir kıyaslama imkanı yaratmak için soruda noktalar eşit aralıklı olarak alınmıştı.

Yukarıdaki tablo göz önüne alınarak beş nokta kullanılarak farklı sayılarda 1., 2., 3. ve 4. dereceden interpolasyon polinomları yazılabilir. Biz burada interpolasyon polinomu ile yapılan yaklaşımın hassaslığı ile ilgili bir varsayımda bulunma imkanı sağlaması bakımından tektürlü belirli olduğu bilinen dördüncü derece polinom ile ilgileneceğiz.

Eğer $f(1.1)$ değerine bir yaklaşım yapılması istenirse daha önceden de vurgulandığı üzere $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ ve $x_4 = 2.2$ şeklinde verilen tüm noktaları işleme katarak dördüncü bölünmüş fark ile hesap yapmak hassaslığın artırılması bakımından mantıklı olacaktır. Buna göre $h = 0.3$ ve $x = x_0 + sh$ olduğundan $1.1 = 1.0 + s(0.3)$ yani $s = \frac{1}{3}$ için Newton ileri bölünmüş fark formülü yukarıdaki tabloda düz alt çizgi ile ifade edilen katsayı

değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
P_4(1.1) &= P_4 \left(1.0 + \frac{1}{3}(0.3) \right) = f(x_0) + \sum_{k=1}^4 \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \\
&= f(x_0) + \binom{s}{1} \Delta^1 f(x_0) + \binom{s}{2} \Delta^2 f(x_0) + \binom{s}{3} \Delta^3 f(x_0) + \binom{s}{4} \Delta^4 f(x_0) \\
&= f(x_0) + s \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} s(s-1) \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} s(s-1)(s-2) \Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + \frac{1}{4!} s(s-1)(s-2)(s-3) \Delta^4 f(x_0) \\
&= f(x_0) + \frac{1}{3} \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + \frac{1}{4!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \Delta^4 f(x_0) \\
&= 0.7651977 + \frac{1}{3} (-0.1451117) + \frac{1}{2!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (-0.0195721) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) 0.0106723 \\
&\quad + \frac{1}{4!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) 0.0003548 \\
&= 0.7196460
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yaklaşım yapılması istenen $f(x)$ değeri için x noktası verilen tablonun sonlarına doğru ise bu durumda Newton geri bölünmüş fark formülü kullanılır. Bu örnekte $f(2.0)$ değerine bir yaklaşım yapılması istenilirse $h = 0.3$ için $x = x_n + sh$ olduğundan $2.0 = 2.2 + s(0.3)$ yani $s = -\frac{2}{3}$ için Newton geri bölünmüş fark formülü yukarıdaki tabloda dalgalı alt çizgi ile ifade edilen katsayı değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
P_4(2.0) &= P_4 \left(2.2 - \frac{2}{3}(0.3) \right) \\
&= f(x_n) + \sum_{k=1}^4 (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \\
&= f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla^1 f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) \\
&\quad + (-1)^3 \binom{-s}{3} \nabla^3 f(x_n) + (-1)^4 \binom{-s}{4} \nabla^4 f(x_n) \\
&= f(x_n) + s \nabla f(x_n) + \frac{1}{2!} s(s+1) \nabla^2 f(x_n) + \frac{1}{3!} s(s+1)(s+2) \nabla^3 f(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{4!} s(s+1)(s+2)(s+3) \nabla^4 f(x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.1103623 - \frac{2}{3}(-0.1714563) - \frac{1}{2!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) 0.0021273 \\
&\quad - \frac{1}{3!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \left(-\frac{2}{3} + 2\right) 0.0110271 \\
&\quad - \frac{1}{4!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \left(-\frac{2}{3} + 2\right) \left(-\frac{2}{3} + 3\right) 0.0003548 \\
&= 0.2238754
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.7. $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 1.2$ ve $f(x) = \cos x^2$ olsun. Beş dijital yuvarlama artımetiği kullanarak Newton geri fark formülü ile verilen noktalarda $f(x)$ fonksiyonunu interpolate eden ikinci Lagrange polinomunu yardımıyla $f(1)$ değeri için bir yaklaşımda bulununuz. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hatayı hesaplayınız.

Çözüm. $h = 0.6$ ve $x = 1$ için $s = \frac{x-x_n}{h} = \frac{x-x_2}{h} = \frac{1-1.2}{0.6} = -\frac{1}{3}$ dir. Newton geri fark tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$
$x_2 = 1.2$	$0.13042 = f(x_2)$		
$x_1 = 0.6$	0.93590	$-0.80548 = \nabla f(x_2)$	
$x_0 = 0.0$	1.00000	-0.0641	$-0.74138 = \nabla^2 f(x_2)$

Buna göre

$$\begin{aligned}
f(1) &\approx P_2(1) = f(x_2) + s\nabla f(x_2) + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_2) \\
&\approx 0.13042 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-0.80548) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3} + 1\right)(-0.74138) \\
&\approx 0.48129
\end{aligned}$$

yaklaşımı elde edilir. $\cos 1^2 = 0.54030$ olduğundan bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$|0.54030 - 0.48129| = 0.05901$$

şeklinde bulunur.

3.3.3 Merkezi Farklar

Newton ileri ve geri fark formülleri yaklaşım yapılması istenen $f(x)$ değeri için x noktasının verilen tablonun ortalarında yer alması durumunda kullanışlı değildir. Bu durum için kullanılabilecek pek çok bölünmüş fark formülü mevcut

olmakla birlikte biz Stirling metodu olarak bilinen **merkezi fark formülü** üzerinde duracağız.

Yaklaşım yapılması istenen noktaya yakın bir x_0 noktası seçelim ve bu noktanın altında yer alan noktaları $x_1, x_2, \dots$, üzerinde yer alan noktaları ise $x_{-1}, x_{-2}, \dots$ olarak indisleyelim. Buna göre **Stirling formülü**, eğer $n = 2m+1$ gibi bir tek sayı ise

$$\begin{aligned}
P_n(x) = P_{2m+1}(x) = & f(x_0) + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2 h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\
& + \frac{s(s^2 - 1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] \\
& + \dots + s^2(s^2 - 1)(s^2 - 4) \dots (s^2 - (m-1)^2) h^{2m} f[x_{-m}, \dots, x_m] \\
& + \frac{s(s^2 - 1) \dots (s^2 - m^2) h^{2m+1}}{2} (f[x_{-m-1}, \dots, x_m] + f[x_{-m}, \dots, x_{m+1}]),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$n = 2m$ gibi bir çift sayı ise yukarıdaki formülün son satırının silinmesi ile elde edilen ifade olarak verilir. Bu formülde kullanılan girdi değerleri aşağıdaki tabloda altı çizilerek ifade edilmiştir.

x	$f(x_i)$	Birinci bölünmüş fark	İkinci bölünmüş fark	Üçüncü bölünmüş fark	Dördüncü bölünmüş fark
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$f[x_{-1}, x_0]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]$	
x_0	$f[x_0]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_0, x_1]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

Örnek 3.3.8. Örnek 3.3.1 verilen tablo değerleri göz önüne alımsın. $x_0 = 1.6$ olmak üzere $f(1.5)$ değerine Stirling formülünü kullanarak bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. Stirling formülünü uygulamak için aşağıdaki tabloda altı çizili olan değerleri ihtiyaç vardır:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$h = 0.3$ ve $x_0 = 1.6$ olduğundan $x = x_0 + sh$ için $1.5 = 1.6 + s(0.3)$ yani $s = -\frac{1}{3}$ değeri elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
f(1.5) &\approx P_4 \left(1.6 + \left(-\frac{1}{3} \right) (0.3) \right) \\
&= 0.4554020 + \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{0.3}{2} \right) ((-0.5489460) + (-0.5786120)) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 (0.3)^2 (-0.0494433) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 1 \right) (0.3)^3 (0.0658784 + 0.0680685) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 1 \right) (0.3)^4 (0.0018251) \\
&= 0.5118200
\end{aligned}$$

yaklaşımına ulaşılır.